УДК 621.391:51.142

ТЕОРЕМЫ О НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТОЖДЕСТВАХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ В ГПВЯ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Развивается подход к суммированию рядов в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром (ГПВЯ). Путем доказательства теорем, имеющих теоретическое и практическое значение, выводятся новые результаты для интегральных тождеств.

Введение

Данная статья является продолжением работ [**1-3**], связанных с аналитическими исследованиями по суммированию рядов в ГПВЯ. Известно, что методы ГПВЯ применяются при решении задач теории связи, теории информации, радиоэлектроники и оптики, где используются модели сигналов с финитным спектром. С их помощью уже получены новые математические результаты, имеющие прикладной характер [**3**]. Основные положения теории ГПВЯ рассмотрены в [**4**]. Новые результаты применительно к суммированию рядов приведены в [**1**]. Практическая и теоретическая необходимость продолжения исследований в данном направлении обусловлена использованием результатов при решении, в частности, задач электродинамики, дифракции волн, антенной техники, а также развитием новых технологий в микроэлектронике и системотехнике, которые привели к возникновению понятия IP-core**,** как интеллектуального продукта, подготовленного к реализации на кристалле микросхемы. В нашем случае речь идет об аппаратурной (программной) реализации ad hoc (новой специализированной) технологии для вычисления значений рядов, используемых в математических расчетах при проектировании радиоэлектронной аппаратуры. По сравнению с существующими методами и реализациями предлагаемая методика вычисления рядов определенного типа может быть ускорена в сотни и тысячи раз [**5**], что является *актуальным* и, безусловно, востребованным для проектирования IP-core, средств Mathematica, математических сопроцессоров и радиоэлектронной аппаратуры.

1. Постановка цели и задач исследования

Цель исследования – определить результаты для некоторых интегральных выражений от функций Бесселя путем доказательства тождеств с использованием метода суммирования рядов в ГПВЯ.

Задачи исследования заключаются в доказательстве теорем, определяющих значения следующих интегральных выражений:

1) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)(w+k)}dw\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} tI_\nu(xt)K_\nu(wt)dt$,

2) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{(w^2-k^2)}\frac{dw}{w}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} tJ_t(x)H_t^{(2)}(w)dt$,

3) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)}\frac{wdw}{w+k}\int\limits_0^\infty J_\nu(tx)J_\nu(wt)tdt$,

4) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)}\frac{wdw}{w+k}\int\limits_0^\infty G_\nu(xt)F_\nu(wt)tdt$,

5) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}dw\int\limits_0^\infty K_{it}(x)K_{it}(w)t\,\mathrm{sh}(\pi t)dt$,

6) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}\frac{dw}{w}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} tK_t(x)J_t(w)dt$.

2. Основные теоретические положения

Теоретическое обоснование базируется на теореме, которая устанавливает связь между разложениями по полной ортонормированной системе и по выборочным значениям в ГПВЯ [**4**, с.144-145] и следствии из нее: *в ГПВЯ* H_3 *любая функция* $f\in H_3$ *разлагается в ряд по выборочным значениям*

$$f(s)=\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\frac{2k}{s+k}\frac{\sin\pi(s-k)}{\pi(s-k)},\ 0<s<\infty. \quad (1)$$

3. Доказательство интегральных тождеств

Для реализации задач исследования и достижения поставленной цели найдем значения перечисленных интегральных выражений путем доказательства следующих теорем.

Теорема 1. *Имеет место тождество*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)(w+k)}dw\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} tI_\nu(xt)K_\nu(wt)dt=$$

$$=\frac{i\sin\pi(x-k)}{\sqrt{x}(x^2-k^2)}, \quad (2)$$

где $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – *модифицированные функции Бесселя 1-го и 3-го рода соответственно*; $k=1,2,3,\ldots$, $0<x<\infty$, $0<w<\infty$.

Доказательство. Перепишем (2) в виде:

$$\frac{\sin\pi(x-k)}{(x^2-k^2)}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{i\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}dw\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} tI_\nu(xt)K_\nu(wt)dt. \quad (3)$$

Умножим левую и правую части (3) на $\frac{2k}{\pi}f(k)$, где $f(k)$ − выборочные значения некоторой функции непрерывного аргумента из ГПВЯ, $k = 1,2,3,...$:

$$\frac{2kf(k)\sin\pi(x-k)}{\pi(x^2-k^2)} = \tag{4}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{i\pi}\frac{2kf(k)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}dw \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} tI_\nu(xt)K_\nu(wt)dt .$$

Просуммируем левую и правую части (4) по $k = 1,2,3,...$:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{x+k}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}f(k) = \tag{5}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{i\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{2kf(k)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}dw \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} tI_\nu(xt)K_\nu(wt)dt .$$

Нетрудно видеть, что левая часть (5) является разложением функции $f(x)$ в ряд по выборочным значениям в ГПВЯ (1):

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{i\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{2kf(k)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}dw \times$$

$$\times \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} tI_\nu(xt)K_\nu(wt)dt . \tag{6}$$

Изменим в правой части (6) порядок суммирования и интегрирования:

$$f(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} I_\nu(xt)\sqrt{xt}dt\int_0^\infty K_\nu(wt)\sqrt{tw} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{(w+k)}\frac{\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)}f(k)\right)dw . \tag{7}$$

В правой части (7) стоит разложение функции $f(w)$ в ряд (1) в ГПВЯ:

$$f(x) = \frac{1}{i\pi}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} I_\nu(xt)\sqrt{xt}dt\int_0^\infty K_\nu(wt)\sqrt{tw}f(w)dw . \tag{8}$$

Последнее выражение является интегральным представлением Мейера [**6**, с.87], следовательно, (2) справедливо, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Имеет место тождество*

$$\frac{-2\sin\pi(x-k)}{(x^2-k^2)} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{(w^2-k^2)}\frac{dw}{w}\int_{-i\infty}^{i\infty} tJ_t(x)H_t^{(2)}(w)dt , \tag{9}$$

где $H_t^{(2)}(z)$ − *функция Бесселя 3-го рода*, $0 < x < \infty$, $0 < w < \infty$, $k = 1,2,3,...$.

Доказательство. Умножим левую и правую части (9) на $\frac{2k}{\pi}f(k)$, где $f(k)$ − выборочные значения некоторой функции непрерывного аргумента $f(z)$ из ГПВЯ, а затем просуммируем по $k = 1,2,3,...$, после чего получим:

$$-2\sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{(x+k)}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}f(k) = \tag{10}$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \frac{2kf(k)}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{(w^2-k^2)}\frac{dw}{w}\int_{-i\infty}^{i\infty} tJ_t(x)H_t^{(2)}(w)dt .$$

Изменяя порядок суммирования и интегрирования в правой части (10), получаем:

$$-2\sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{(x+k)}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}f(k) = \tag{11}$$

$$= \int_{-i\infty}^{i\infty} tJ_t(x)dt\int_0^\infty H_t^{(2)}(w)\left[\sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{(w+k)}\frac{\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)}f(k)\right]\frac{dw}{w}.$$

В обеих частях равенства (11) стоят разложения функции f в ряды по выборочным значениям в ГПВЯ, поэтому можно записать:

$$f(x) = -\frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty} tJ_t(x)dt\int_0^\infty H_t^{(2)}(w)f(w)\frac{dw}{w} . \tag{12}$$

Выражение (12) известно как интегральное представление Конторовича-Лебедева [**6**], которое верно для произвольной функции f, а значит, и для функций из ГПВЯ. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)(x+k)} = \int_0^\infty \frac{\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)}\frac{wdw}{w+k} \times$$

$$\times \int_0^\infty J_\nu(tx)J_\nu(wt)tdt , \tag{13}$$

где $0 < x < \infty$, $0 < w < \infty$, $k = 1,2,3,...$.

Доказательство. Умножим левую и правую части (13) на $2kf(k)$, где $f(k)$ − выборочные значения некоторой функции непрерывного аргумента $f(z)$ из ГПВЯ, затем просуммируем по $k = 1,2,3,...$, после чего в правой части полученного равенства изменим порядок суммирования и интегрирования. В результате имеем:

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{2k}{(x+k)}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}f(k) =$$

$$= \int_0^\infty J_\nu(tx)tdt\int_0^\infty J_\nu(wt)w \times$$

$$\times[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{(w+k)}\frac{\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)}f(k)]dw\,. \qquad (14)$$

Учитывая разложение функции f в ряд в ГПВЯ, получаем равенство, которое известно как интегральная формула Ганкеля [6]:

$$f(x)=\int_0^{\infty}J_{\nu}(tx)tdt\int_0^{\infty}f(w)J_{\nu}(wt)wdw\,.$$

Оно верно для произвольной функции $f(x)$, а значит, и для функций из ГПВЯ. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Справедливо интегральное тождество*

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi(w-k)}{\pi(w-k)}\frac{wdw}{w+k}\int_0^{\infty}G_{\nu}(xt)F_{\nu}(wt)tdt=$$

$$=\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)(x+k)},\ 0<x<\infty,\ k=1,2,3,..., \quad (15)$$

где $G_{\nu}(z)=\cos(a\pi)J_{\nu}(z)+\sin(a\pi)Y_{\nu}(z)$;

$F_{\nu}(z)=\dfrac{2^{2-\nu-2a}s_{\nu+2a-1,\nu}(z)}{\Gamma(a)\Gamma(\nu+a)}$; $s_{\nu+2a-1,\nu}(z)$ – *функция Ломмеля* [6, с. 76]; $\Gamma(z)$ – *гамма-функция*; $Y_{\nu}(z)$ – *функция Неймана.*

Доказательство проводится аналогично – сведением к обобщенному интегральному представлению Ганкеля [6] для произвольной функции f:

$$f(x)=\int_0^{\infty}G_{\nu}(xt)tdt\int_0^{\infty}F_{\nu}(wt)wf(w)dw\,.$$

Теорема 5. *Имеет место тождество*

$$\frac{\sin\pi(x-k)}{x^2-k^2}=\frac{2}{x\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}dw\times$$

$$\times\int_0^{\infty}K_{it}(x)K_{it}(w)tsh(\pi t)dt\,. \qquad (16)$$

Доказательство выполняется аналогично – сведением к интегральному представлению Лебедева (1946) для произвольной функции $f(x)$ [6]:

$$xf(x)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}K_{it}(x)tsh(\pi t)dt\int_0^{\infty}K_{it}(w)f(w)dw\,.$$

Теорема 6. *Для* $0<x<\infty$, $0<w<\infty$, $k=1,2,3,...$ *имеет место тождество*

$$\frac{\sin\pi(x-k)}{x^2-k^2}=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}\frac{dw}{w}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}tK_t(x)J_t(w)dt\,. \qquad (17)$$

Доказательство приводит к интегральному представлению Лебедева (1947) для произвольной функции $f(x)$ [6]:

$$f(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}tK_t(x)dt\int_0^{\infty}f(w)J_t(w)\frac{dw}{w}\,.$$

Выводы

Таким образом, проведенные исследования позволили получить *новые теоретические результаты* для интегральных выражений путем доказательства теорем 1-6**,** которые отсутствуют в известной литературе. *Практическая значимость результатов* работы определяется возможностью их использования в математическом аппарате при решении задач. Учитывая преимущества предложенного метода и полученные результаты, можно указать *перспективы* дальнейших исследований в данном направлении: доказательство тождеств и теорем; решение сумматорных уравнений, в том числе кратных; решение интегральных и двойных интегральных уравнений; решение интегро-сумматорных уравнений; решение систем дуальных сумматорных уравнений; решение систем парных интегральных уравнений.

Литература: 1. *Chumachenko S.V.* Summation method of selected series for IP-core design // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №3. С. 197-203. **2.** *Хаханов В.И., Чумаченко С.В.* Модели пространств в научных исследованиях // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №1. С. 124-132. **3.** *Чумаченко С.В.* Гильбертовы пространства с воспроизводящими ядрами и некоторые их применения // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №4. С. 141-144. **4.** *Функции* с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971. 256с. **5.** *Veliev E.I., Oksasoglu A.* Bessel functions series in two dimensional diffraction problems / J. of Electromagnetic and Applications. 1996. Vol. 10. N4. P. 493-507. **6.** *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. М.: Наука, 1966. Т.2. 296с.

Поступила в редколлегию 21.02.2004

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Хаханов В.И.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326.