

СПОСОБ ПОЛУЧЕНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С ЗАДАННОЙ СРЕДНЕЙ ЧАСТОТОЙ ПОЯВЛЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ

В. М. Ерухимович, А. Я. Шпильберг

Харьков

При решении задач с помощью импульсных АВМ [1] возникает необходимость в некоррелированных последовательностях с требуемыми значениями средних относительных частот появления импульсов в диапазоне от 0 до 1.

В статье описано получение последовательностей с заданной средней частотой появления импульсов посредством булевых операций над псевдослучайными последовательностями, генерируемыми сдвиговым регистром с линейной обратной связью (СРОС).

В работе [2] показано, что одноразрядные последовательности n -разрядного СРОС при определенных условиях имеют максимальный период $2^n - 1$. Такие последовательности принято называть M -последовательностями. Так как M -последовательности стационарны, можно обычным способом [3] определить математическое ожидание

$$M[\gamma(i)] = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n-1} \gamma(i) \quad (1)$$

и автокорреляционную функцию

$$K_\gamma(\tau) = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n-1} (\gamma(i) - M[\gamma(i)])(\gamma(i + \tau) - M[\gamma(i)]) = \\ = M[\gamma(i)\gamma(i + \tau)] - M^2[\gamma(i)], \quad (2)$$

где $\gamma(i)$ — значение некоторой периодической последовательности в i -м такте.

Для M -последовательности $M\gamma(i)$ имеем [4]

$$M[M\gamma(i)] = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}, \quad K_\gamma(\tau) = \begin{cases} \frac{2^{n-1}}{2^n - 1} - \frac{2^{2n-2}}{(2^n - 1)^2}, & \tau \equiv 0 \pmod{2^n - 1}, \\ \frac{2^{n-2}}{2^n - 1} - \frac{2^{2n-2}}{(2^n - 1)^2}, & \tau \not\equiv 0 \pmod{2^n - 1}. \end{cases}$$

Допуская ошибку порядка 2^{-n} , запишем

$$M[M\gamma(i)] \approx \frac{1}{2}, \quad K_\gamma(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \tau \equiv 0 \pmod{2^n - 1}, \\ 0, & \tau \not\equiv 0 \pmod{2^n - 1}. \end{cases} \quad (3)$$

Для последовательности, полученной с помощью булевой операции «отрицание», примененной к каждому члену M -последовательности, имеем

$$M[M\gamma(i)] = M[1 - \gamma(i)] = 1 - M[\gamma(i)] \approx \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Взаимная корреляционная функция двух M -последовательностей определится равенством

$$MK_{j, j+k}(\tau) = \frac{1}{2^n - 1} \sum_{i=1}^{2^n-1} (M\gamma_j(i) - M[M\gamma_j(i)])(M\gamma_{j+k}(i + \tau) - \\ - M[M\gamma_j(i)]) = M[M\gamma_j(i)M\gamma_{j+k}(i + \tau)] - M^2[M\gamma_j(i)], \quad (5)$$

где $M\gamma_j(i)$ — значение M -последовательности j -го разряда СРОС в i -м такте.

Если направление увеличения номера разряда СРОС совпадает с направлением сдвига в регистре, то

$$M\gamma_i(i) = M\gamma_{i \pm k}(i \pm k). \quad (6)$$

Сравнив (2) и (5) с учетом равенства (6), можно заключить, что взаимная корреляционная функция двух M -последовательностей равна автокорреляционной функции со сдвигом аргумента на число тактов, равное сдвигу по разрядам регистра. Таким образом,

$$MK_{i, i+k}(\tau) \cong \begin{cases} \frac{1}{4}, & \tau \equiv k \pmod{2^n - 1}, \\ 0, & \tau \not\equiv k \pmod{2^n - 1}. \end{cases} \quad (7)$$

Поскольку $K_{i, i+k}(\tau) \cong 0$ при $\tau = 0$, M -последовательности являются попарно независимыми и для них справедливо равенство

$$M \left[\prod_{j=1}^k M\gamma_j(i) \right] = \prod_{j=1}^k M[M\gamma_j(i)] \cong 2^{-k}. \quad (8)$$

Ввиду того что значение конъюнкции формально совпадает с арифметическим произведением, для конъюнкции от M -последовательностей СРОС имеем

$$M \left[\bigwedge_{j=1}^k M\gamma_j(i) \right] \cong 2^{-k}. \quad (9)$$

Пусть теперь требуется получить последовательность со средней относительной частотой, равной C . В двоичном разложении

$$c \cong \sum_{i=1}^l a_i 2^{-i}, \quad a_i \in [0, 1], \quad 0 \leq c < 1 \quad (10)$$

каждое слагаемое суммы может быть реализовано с помощью конъюнкции от j M -последовательностей. Необходимым условием выполнения сложения l конъюнкций с помощью дизъюнкции является попарная ортогональность (несовместность) последних. Для этого достаточно, чтобы M -последовательность, входящая в обе конъюнкции, входила в одну из них с отрицанием.

Пусть

$$p\gamma(i) = \prod_{j=1}^p M\gamma_j(i), \quad r\gamma(i) = \prod_{s=1}^r M\gamma_s(i)$$

и при некотором $j = s = l$

$$M\gamma_l(i) = 1 - M\gamma_s(i),$$

тогда

$$p\gamma(i)r\gamma(i) = 0, \quad p\gamma(i) \vee r\gamma(i) = p\gamma(i) + r\gamma(i). \quad (11)$$

На рис. 1 изображена схема, реализующая булеву функцию

$$c\gamma(i) = a_1 M\gamma_1(i) \vee a_2 (1 - M\gamma_1(i)) M\gamma_2(i) \vee \dots \vee a_l (1 - M\gamma_1(i)) \times \dots \times M\gamma_l(i). \quad (12)$$

Используя (4) и (8), получаем

$$M[c\gamma(i)] \cong \sum_{i=1}^l a_i 2^{-i} \cong c.$$

Рассмотренные последовательности в импульсных АВМ претерпевают линейные и нелинейные преобразования. При этом анализ точности машинного решения требует знания автокорреляционной функции таких

последовательностей. Автокорреляционную функцию последовательности $\gamma(i)$ можно найти, рассмотрев сумму случайных функций [3]:

$$K_c(\tau) = \sum_{j=1}^l a_j K_j(\tau) + \sum_{j \neq i} a_j K_{ji}(\tau), \quad (13)$$

где $K_j(\tau)$ — автокорреляционная функция последовательности, определяемой j -м слагаемым суммы (12):

$K_{ji}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция последовательностей, определяемых j -м и i -м слагаемыми суммы (12).

Пусть

$$k_\gamma(i) = \left(\prod_{s=1}^{k-1} (1 - M_{\gamma_s}(i)) \right) M_{\gamma_k}(i). \quad (14)$$

Отсюда, используя (2), находим

$$K_k(\tau) = M[k_\gamma(i) k_\gamma(i + \tau)] -$$

$$- M^2[k_\gamma(i)] = M \left[\left(\prod_{s=1}^{k-1} (1 - \right.$$

$$- M_{\gamma_s}(i)) M_{\gamma_k}(i) \left(\prod_{s=1}^{k-1} (1 - \right.$$

$$- M_{\gamma_s}(i + \tau)) M_{\gamma_k}(i + \tau) \Big] -$$

$$- M^2 \left[\left(\prod_{s=1}^{k-1} (1 - M_{\gamma_s}(i)) \right) M_{\gamma_k}(i) \right].$$

При этом

$$K_k(0) = M[k_\gamma(i)] - M^2[k_\gamma(i)].$$

Определяя $M[k_\gamma(i)]$ по формулам (4), (8), получаем

$$K_k(0) \approx 2^{-k} - 2^{-2k}.$$

При $0 < \tau < k$ всегда найдется значение s , удовлетворяющее (6), и

$$M_{\gamma_k}(i) = M_{\gamma_s}(i + \tau).$$

Тогда

$$M[k_\gamma(i) k_\gamma(i + \tau)] = 0,$$

$$K_k(\tau) = M^2[k_\gamma(i)] \approx -2^{-2k} = \text{const.}$$

При $\tau \geq k$

$$K_k(\tau) = M[k_\gamma(i) k_\gamma(i + k)] - M^2[k_\gamma(i)] \approx 0.$$

Найдем взаимную корреляционную функцию последовательностей $k_\gamma(i)$ и $p_\gamma(i)$, определяемых формулой (14) при $p = k + h$. Из выражения (5) следует

$$\begin{aligned} K_{pk}(\tau) &= M[p_\gamma(i) k_\gamma(i + \tau)] - M[p_\gamma(i)] M[k_\gamma(i)] = \\ &= M \left[\left(\prod_{s=1}^{p-1} (1 - M_{\gamma_s}(i)) \right) M_{\gamma_p}(i) \left(\prod_{s=1}^{k-1} (1 - M_{\gamma_s}(i + \tau)) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times M_{\gamma_k}(i + \tau) \right] - M[p_\gamma(i)] M[k_\gamma(i)]. \end{aligned}$$

Для $0 \leq \tau < p - k$ всегда найдется такое значение s , что

$$M_{\gamma_s}(i) = M_{\gamma_k}(i + \tau).$$

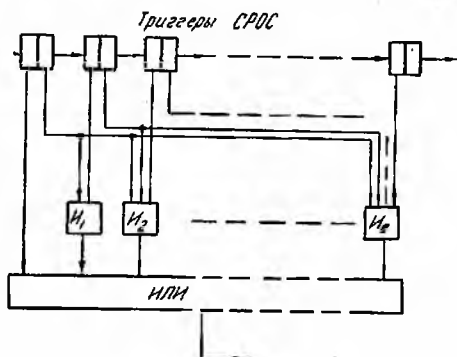


Рис. 1. Схема получения псевдослучайных последовательностей.

В этом случае

$$M[p_{\gamma}(i)k_{\gamma}(i+\tau)] = 0, K_{pk}(\tau) = -M[p_{\gamma}(i)]M[k_{\gamma}(i)] \approx -2^{-(p+k)}.$$

Для $\tau = p - k$

$$K_{pk}(\tau) = M[p_{\gamma}(i)] - M[p_{\gamma}(i)]M[k_{\gamma}(i)] \approx 2^{-p}(1 - 2^{-k}).$$

При $p - k < \tau < p$ всегда найдется такое s , что

$$M_{\gamma p}(i) = M_{\gamma s}(i + \tau).$$

Поэтому

$$K_{pk}(\tau) \approx -2^{-(p+k)}.$$

При $\tau \geq p$ $K_{pk}(\tau) \approx 0$.

Таким же образом для $K_{kp}(\tau)$ можно получить

$$K_{kp}(\tau) \approx \begin{cases} -2^{-(p+k)}, & 0 \leq \tau < k, \\ 0, & \tau \geq k. \end{cases}$$

Следовательно, для корреляционных функций слагаемых из выражения (13) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} K_I(\tau) &= \begin{cases} 2^{-j} - 2^{-2j}, & \tau = 0 \\ -2^{-2j}, & 0 < \tau < j \\ 0, & \tau \geq j, \end{cases} \\ K_{II}(\tau) &= \begin{cases} -2^{-(j+i)}, & 0 \leq \tau < j - i \\ 2^{-j}(1 - 2^{-i}), & \tau = j - i \\ -2^{-(j+i)}, & j - i < \tau < j \\ 0, & \tau \geq j, \end{cases} \\ K_{IJ}(\tau) &= \begin{cases} -2^{-(j+i)}, & 0 \leq \tau < i \\ 0, & \tau \geq i. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношения (15) для τ , представленного наименьшими неотрицательными вычетами, справедливы по mod $2^n - 1$.

Для корреляционных функций стационарных последовательностей справедливо

$$K_I(-\tau) = K_I(+\tau), K_{IJ}(+\tau) = K_{JI}(-\tau). \quad (16)$$

Используя (13) и (15), найдем дисперсию

$$D[c_{\gamma}(i)] = K_c(0) \approx \sum_{j=1}^i a_j (2^{-j} - 2^{-2j}) - 2 \sum_{j>i} a_j 2^{-j+i}. \quad (17)$$

Оценка по формуле (17) с погрешностью порядка 2^{-n} совпадает с дисперсией характеристической случайной величины X , распределенной по Бернулли при $P(X=1) = c$. Поэтому

$$D[c_{\gamma}(i)] \approx c(1 - c). \quad (18)$$

Результат (18) можно было предполагать, так как, сделав допущение о δ -образности автокорреляционной функции M -последовательности, мы можем представить последнюю как последовательность независимых испытаний Бернулли. В то же время известно, что для сумм и произведений характеристических величин распределение Бернулли сохраняется [5].

Соотношения (15) показывают, что автокорреляционная функция полученной последовательности с заданной средней частотой появления импульсов затухает за j тактов, где j — число разрядов СРОС, используемых при ее образовании.

Последовательности, для которых

$$M[c_1(i)] > \frac{1}{2},$$

могут быть получены с помощью булевой операции «отрицание», примененной к последовательности с

$$M[c_2(i)] < \frac{1}{2},$$

причем $K_{c_1}(\tau) = K_{c_2}(\tau)$.

На рис. 2 представлены автокорреляционные функции для различных c . Для наглядности дискретные значения $K_c(\tau)$ соединены линиями.

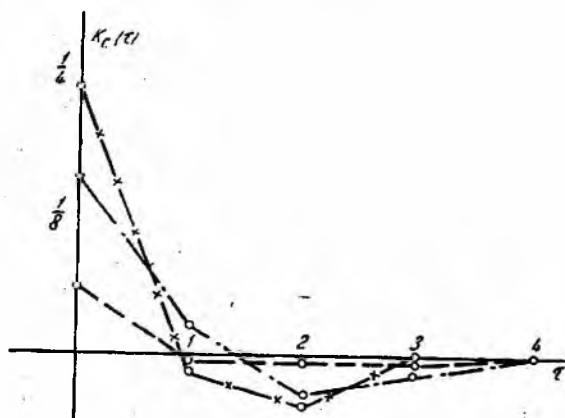


Рис. 2. Автокорреляционные функции для различных значений c .

Обозначения: — — — — — $c = \frac{1}{16} \left(\frac{15}{16} \right)$; - · - · - $c =$
 $= \frac{3}{16} \left(\frac{13}{16} \right)$; - × - × - $c = \frac{6}{16} \left(\frac{10}{16} \right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ribeiro Sergio T. Random — puls machines. IEEE Trans. Electron. Comput., № 3, 1967.
2. Б. Элспас. Теория автономных линейных последовательных цепей. Кибернетический сборник, № 7. Изд-во «Мир», 1963.
3. В. С. Пугачев. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1962.
4. А. Я. Шпильберг, Е. М. Ляховицкий, Г. К. Кладов. Моделирование случайных функций с помощью линейных автономных автоматов. Сб. «Вопросы теории ЭЦММ», вып. 2. Киев, 1967.
5. С. Уилкс. Математическая статистика. Изд-во «Наука», 1967.

БЕСПРОВОДНАЯ СИСТЕМА ТЕЛЕИЗМЕРЕНИЯ МЕТАНА ДЛЯ ДОБЫЧНОГО УЧАСТКА УГОЛЬНОЙ ШАХТЫ

**И. Ф. Огороднейчук, В. И. Яцышин, И. Я. Журавлев,
Н. И. Жук**

Харьков

Небольшая дальность передачи участковых систем телемеханики позволяет применять беспроводные линии связи, организованные по горным городам. В качестве носителя информации в данном случае исполь-