

УДК 615.47:621.375.7

А. А. ЦИБУЛЬСКИЙ, П. И. ЧЕРЕДНИКОВ

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В МЫШЕЧНЫХ ВОЛОКНАХ

Математические модели изолированной мышцы и одиночного мышечного волокна за немногими исключениями строились линейными и стационарными. Однако моделируемый объект представляет собой нелинейную нестационарную динамическую систему. Например, жесткость мышц нелинейно меняется при переходе от расслабления к максимальному сокращению. Об изменении характеристик системы во времени свидетельствуют очевидные изменения, связанные с усталостью.

Известен ряд публикаций, в которых частично рассматривается нелинейный характер изменения реакции мышечной системы на внешнее воздействие. В работе [1] описывается модель, позволяющая воспроизводить присущую реальной мышце нелинейную зависимость преобразования длины и напряжения с учетом свойств внешней среды, таких, как ускорение силы тяжести и массы воздействующих грузов, противодействие которых преодолевается сокращающейся мышцей. В работе [2] предлагается модель, в которой выход связан с входом сигналом посредством рядов Вольтера. Для идентификации ядер Вольтера применена техника идентификации ММО, т. е. анализ входных воздействий и ансамблей откликов на них.

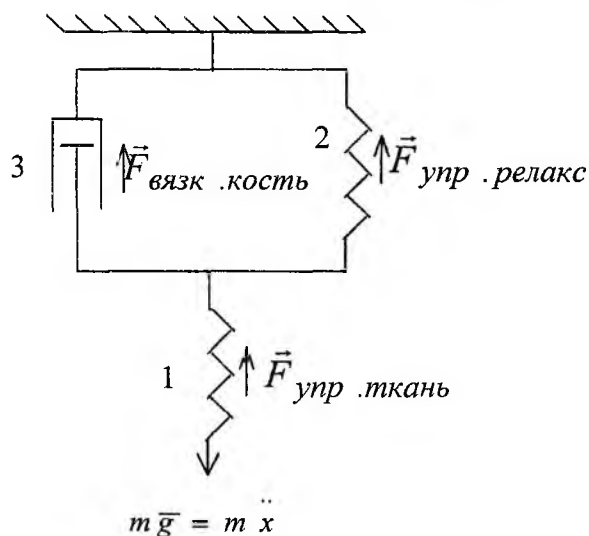


Рис. 1

В работе предложено использовать метод параметрического зонного взаимодействия на высших гармониках [3] при моделировании относительного удлинения мышечного волокна от приложенной внешней нагрузки. Для построения параметрической зонной модели мышечного волокна рассмотрим модель прямой аналогии Максвелла скелетной мышцы (на рис. 1). Функции элементов модели: поршень 3 – костная ткань (гидроксилапатит); пружина 1 (2) – волокнистый белок (коллаген). Этапы работы модели и соответствующие им процессы, протекающие в скелетной мышце: 1) растяжение пружины 1 – приложение нагрузки – относительное удлинение молекул коллагена; 2) выход поршня 3 и растяжение пружины 2 – относительное удлинение молекул гидроксилапатита; 3) сжатие пружины 1 – снятие нагрузки – релаксация коллагена; 4) сжатие пружины 2, вход поршня 3 – релаксация молекул гидроксилапатита.

Согласно теории колебаний, в системах с одной степенью свободы под действием вынуждающей силы модель может быть описана уравнением движения с учетом сил трения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t), \quad (1)$$

где  $h$  – коэффициент трения;  $k$  – коэффициент упругости;  $m$  – масса тела;  $x$  – отклонения массы от положения равновесия.

Поскольку модель на рис. 1 в большей степени описывает процессы растяжения – сжатия, выполним соответствующее преобразование уравнения (1):

$$m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2E \frac{d\varepsilon}{dt} + \eta \varepsilon = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – относительное удлинение;  $E$  – модуль Юнга;  $\eta$  – коэффициент вязкости среды.

Переход от  $x$  к  $\varepsilon$  носит формальный характер.

Согласно уравнению (2), упругие деформации пружины подчиняются закону Гука –  $\sigma = E\varepsilon$ , напряжение вязкой деформации –  $\sigma = \eta\varepsilon$ . Преобразуем уравнение (2):

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{2E}{m} \times \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\eta}{m} \varepsilon = 0.$$

Известно, что собственная частота системы –  $\omega_0^2 = \mu/m$ . Выполним также замену  $\delta = E/m$  – коэффициент затухания системы. Тогда

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + 2\delta \frac{d\varepsilon}{dt} + \omega_0^2 \varepsilon = 0. \quad (3)$$

Представленная на рис. 1 модель скелетной мышцы является параметрической системой, поскольку параметры системы относительное удлинение  $\varepsilon$  и напряжение  $\sigma$  зависят от внешней координаты  $t$ . В свою очередь величина  $\varepsilon$  зависит от параметров как внешней, так и внутренней среды. Известно, что зависимости  $\varepsilon = f(\sigma)$ ,  $\varepsilon = f(t)$  при  $\sigma = \text{const}$ ,  $\sigma = f(t)$  при  $\varepsilon = \text{const}$  носят нелинейный характер. Вследствие этого можно утверждать, что модель скелетной мышцы является нелинейной параметрической системой. При этом энергетическим параметром, согласно (3), является величина относительного удлинения  $\varepsilon$ .

Параметрический характер изменения параметров модели удобно моделировать с использованием эквивалентных электрических схем. Вариант эквивалентной электрической схемы для моделирования процессов в мышечном волокне представлен на рис. 2. В представленной электрической схеме функции элементов модели (рис. 1) выполняют параметрические резонансные колебательные контуры: пружина 1 – катушки индуктивности на ферромагнитных тороидальных сердечниках I и II, линейная емкость  $C_1$  и сопротивление  $R_1$  (потери); поршень 2 – катушки индуктивности на ферромагнитных тороидальных сердечниках III и IV, линейная емкость  $C_2$  и сопротивление  $R_2$ ; пружина 3 – катушки индуктивности на ферромагнитных тороидальных сердечниках V и VI, линейная емкость  $C_3$  и сопротивление  $R_3$ .

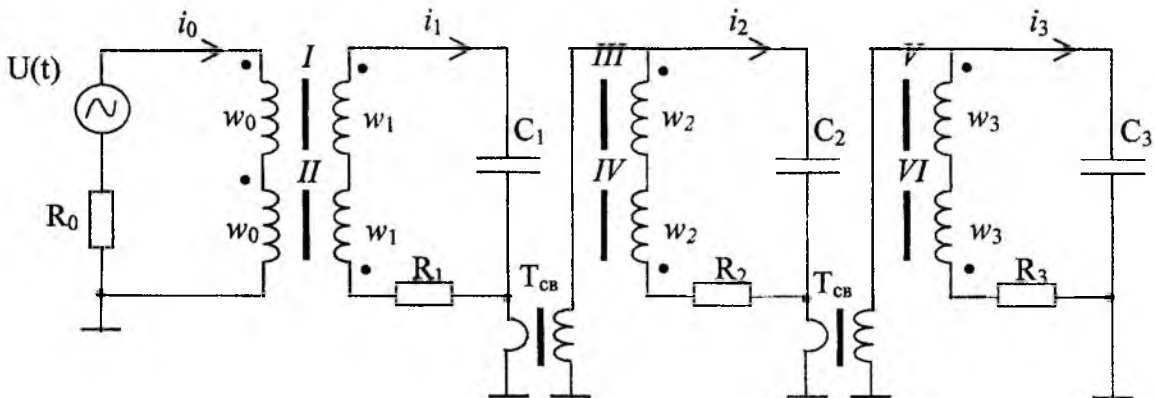


Рис. 2

Внешнее воздействие моделируется генератором накачки, в результате чего осуществляется модуляция энергоемкого параметра системы – индуктивности резонансных контуров с удвоенной частотой от тока возбуждения. Передача сигнала из одного контура в другой выполняется через гальваническую связь на трансформаторах  $T_{св1}$  и  $T_{св2}$ . Режим колебаний в каждом параметрическом контуре (параметроне) имеет свои особенности. Параметрический контур 1 – режим генерации колебаний, при котором изменение входного сигнала приводит к пропорциональному изменению амплитуды параметрических колебаний; входным сигналом является напряжение накачки (или ток возбуждения). Данный режим эквивалентен относительному удлинению коллагена в реальной мышце. Параметрический контур 2 – режим, при котором изменение входного сигнала вызывает параметрические колебания в контуре, при этом параметрон 2 реагирует на увеличение входного сигнала, определяемого

величиной тока накачки. Данный режим эквивалентен деформации костной ткани (гидроксилапатита). Параметрический контур 3 – регенеративный режим, при котором параметрические колебания устойчивы при определенных потерях в резонансном контуре, ограниченных критическим значением. В качестве потерь выступает сопротивление  $R_3$ . Срыв колебаний в параметроне 3 эквивалентен снятию нагрузки и релаксации коллагена.

Входным сигналом модели является напряжение накачки  $U(t) = U_m \sin \omega t$ , где  $U_m$  – амплитуда напряжения накачки;  $\omega$  – круговая частота накачки. В резонансных контурах в начальный момент времени присутствуют случайные электрические флуктуации  $E(t) = \sum_{k=1}^n E_k \sin k(\omega t + \varphi_k)$ , где  $E_k$ ,  $\varphi_k$  – соответственно амплитуда и фаза  $k$ -той гармоники напряжения шума. Исключив потери на гистерезис и вихревые токи в магнитных сердечниках, опишем по закону Кирхгофа процессы, протекающие в модели следующими уравнениями:

- первый параметрон (контур накачки и резонансный контур 1)

$$\begin{cases} sw_0 \frac{dB_I}{dt} + sw_0 \frac{dB_{II}}{dt} + i_0 R_0 = U(t), \\ sw_1 \frac{dB_I}{dt} - sw_1 \frac{dB_{II}}{dt} + i_1 R_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Равенство нулю второго уравнения системы формально, так как в реальных условиях в резонансном контуре присутствует широкий спектр гармоник  $E(t)$ .

- второй параметрон (контур накачки и резонансный контур 2) и третий параметрон (контур накачки и резонансный контур 3) соответственно

$$\begin{cases} sw_0 \frac{dB_{III}}{dt} + sw_0 \frac{dB_{IV}}{dt} + i_0 R_0 = U(t), \\ sw_2 \frac{dB_{III}}{dt} - sw_2 \frac{dB_{IV}}{dt} + i_2 R_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0; \end{cases} \begin{cases} sw_0 \frac{dB_V}{dt} + sw_0 \frac{dB_{VI}}{dt} + i_0 R_0 = U(t), \\ sw_3 \frac{dB_V}{dt} - sw_3 \frac{dB_{VI}}{dt} + i_3 R_3 + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt = 0. \end{cases}$$

Данные системы уравнений содержат по четыре неизвестных при двух уравнениях, вследствие этого, составим дополнительно три системы уравнений полного тока для первого, второго и третьего параметронов соответственно:

$$\begin{cases} i_0 w_0 + i_1 w_1 = l H_I, \\ i_0 w_0 - i_1 w_1 = l H_{II}; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} i_0 w_0 + i_2 w_2 = l H_{III}, \\ i_0 w_0 - i_2 w_2 = l H_{IV}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} i_0 w_0 + i_3 w_3 = l H_V, \\ i_0 w_0 - i_3 w_3 = l H_{VI}, \end{cases} \quad (7)$$

где  $S$  – сечения магнитопровода;  $l$  – длина средней магнитной линии в сердечнике;  $i_0$ – $i_3$ ,  $w_0$ – $w_3$  – соответственно токи и число витков в контурах;  $R_0$ – $R_3$  – активные сопротивления в цепях накачки и резонансных;  $C_1$ – $C_3$  – емкости в резонансных контурах;  $B_I$ – $B_{VI}$  – мгновенные значения индукции магнитного поля в сердечниках;  $H_I$ – $H_{VI}$  – мгновенные значения напряженностей магнитного поля в сердечниках.

Из систем уравнений (5–7) определим токи в цепях

$$i_0 = \frac{l}{2w_0} (H_I + H_{II}) = \frac{l}{2w_0} (H_{III} + H_{IV}) = \frac{l}{2w_0} (H_V + H_{VI}), \quad (8)$$

$$i_1 = \frac{l}{2w_1}(H_I - H_{II}), \quad i_2 = \frac{l}{2w_2}(H_{III} - H_{IV}), \quad i_3 = \frac{l}{2w_3}(H_V - H_{VI}). \quad (9)$$

Используем аппроксимацию нелинейной зависимости напряженности магнитного поля от индукции в виде гиперболического синуса  $H = \alpha sh \beta B$ . Далее математические выкладки проводим для уравнений (4, 8 и 9). Подставим уравнения (5 и 6) в (1):

$$\begin{cases} sw_0 \frac{d(B_I + B_{II})}{dt} + \frac{\alpha l R_0}{2w_0} sh \beta \left( \frac{B_I + B_{II}}{2} \right) ch \beta \left( \frac{B_I - B_{II}}{2} \right) = U(t), \\ sw_1 \frac{d(B_I - B_{II})}{dt} + \frac{\alpha l R_1}{2w_1} sh \beta \left( \frac{B_I - B_{II}}{2} \right) ch \beta \left( \frac{B_I + B_{II}}{2} \right) + \frac{1}{C_1} \frac{\alpha l}{2w_1} \int sh \beta \left( \frac{B_I - B_{II}}{2} \right) ch \beta \left( \frac{B_I + B_{II}}{2} \right) dt = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Обозначив  $x = \beta(B_I + B_{II})$ ,  $y = \beta(B_I - B_{II})$  и введя безразмерную время  $\tau = \omega t$ , приведем систему уравнений (10) к виду

$$\begin{cases} \frac{\omega sw_0}{\beta} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\alpha l R_0}{2w_0} sh \frac{x}{2} ch \frac{y}{2} = U(\tau), \\ \frac{\omega sw_1}{\beta} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\alpha l R_1}{2w_1} sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} + \frac{1}{C_1} \frac{\alpha l}{2w_1 \omega} \int sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} d\tau = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Преобразуем систему уравнений (11), чтобы коэффициенты при старшей производной равнялись единице:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} + \gamma_1 sh \frac{x}{2} ch \frac{y}{2} = U'(\tau), \\ \frac{dy}{d\tau} + \gamma_2 sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} + \gamma_3 \int sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} d\tau = 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\gamma_1 = \frac{\beta \alpha l R_0}{S w_0^2 \omega}$ ;  $\gamma_2 = \frac{\beta \alpha l R_1}{S w_1^2 \omega}$ ;  $\gamma_3 = \frac{\beta \alpha l}{2 S w_1^2 \omega^2 C_1}$ ;  $U'(\tau) = U(\tau) \frac{\beta}{S w_0 \omega}$ .

Для избавления от интеграла во втором уравнении системы (12) продифференцируем его

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \gamma_2 \frac{d}{d\tau} \left( sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} \right) + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} = 0,$$

где  $\frac{\omega_0^2}{2\omega^2} = \gamma_3 = \frac{1}{2L_0 C_1 \omega^2}$ ;  $L_0 = \frac{S w_1^2}{\alpha \beta l}$  – геометрический размер;  $\omega_0$  – собственная частота без на-

качки;  $\frac{\omega_0^2}{2\omega^2} = \xi$  – расстройка контура.

Окончательная математическая модель системы такова:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} + \gamma_1 sh \frac{x}{2} ch \frac{y}{2} = U'(\tau), \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \gamma_2 \frac{d \left( sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} \right)}{d\tau} + \xi sh \frac{y}{2} ch \frac{x}{2} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Сравнивая второе уравнение системы (13) с уравнением (3) приходим к выводу, что имеется аналогия между построенной моделью мышцы и моделью Максвелла на основании дифференциальных нелинейных уравнений Матье–Хилла. Системы уравнений для параметронов 2 и 3 аналогичны

(13). Математическая модель (13) является системой двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно мгновенных значений индукции в сердечниках, электрических и геометрических параметров цепей, частоты и напряжения накачки.

Решение системы (13) определяется в виде

$$x = 2B_H \sin(\tau + \varphi),$$

$$y = 2B_2 \sin 2(\tau + \varphi_2),$$

где  $B_H, B_2, \varphi, \varphi_2$  – соответственно амплитуда и фазы магнитной индукции накачки и колебаний в резонансном контуре на второй гармонике.

Разлагая гиперболический синус и косинус в тригонометрический ряд, ограничиваясь в первом приближении модифицированными функциями Бесселя нулевого и первого порядка и применяя метод гармонического баланса, определяем уравнения баланса амплитуд в контуре накачки и резонансном контуре для второй гармонике:

$$B_H + \gamma_1 I_1(B_H) \cdot I_0(B_2) = \frac{1}{2} U'(\tau), \quad (14)$$

$$-4B_2 + \gamma_2 I_0(B_H) \cdot I_1(B_2) + 2\xi I_0(B_H) \cdot I_0(B_2) = 0, \quad (15)$$

где  $I_0(B_H), I_0(B_2)$  и  $I_1(B_H), I_1(B_2)$  – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

Выражения (14), (15) описывают энергетические соотношения в нелинейной параметрической модели мышечного волокна и позволяют определить влияние случайных сигналов и гармонических составляющих на генератор накачки, амплитудные и частотные характеристики в резонансном контуре.

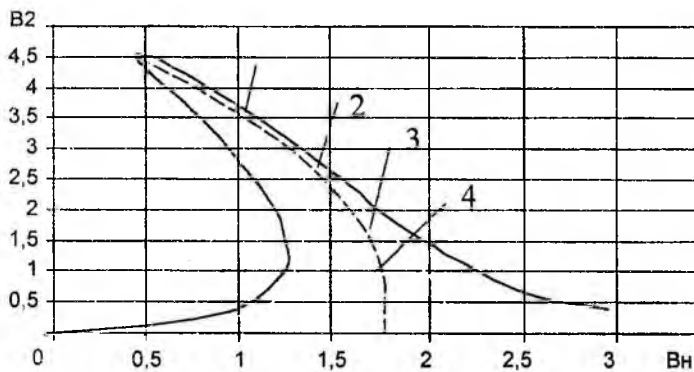


Рис. 3

Амплитудная характеристика  $B_2=f(B_H)$  приведена на рис. 3, где видна петлевая зависимость (явление затягивания) амплитуды магнитной индукции в резонансном контуре на второй гармонике от амплитуды магнитной индукции накачки при «жестком» режиме возбуждения, т. е.  $B_2=f(B_H), \omega=const$ . График показывает процесс энергетического обмена между элементами системы, при этом имеется устойчивое (возрастающий участок на кривых 1 и 2, рис. 3) и неустойчивое (падающий участок на кривых 1 и 2, рис. 3) состояние равновесия с соответствующими скачкообразными эффектами.

При увеличении напряжения накачки  $B_H$  и величины потерь зависимость  $B_2=f(B_H)$  вырождается в кривые, имеющие только устойчивое состояние (кривая 3, рис. 3), что эквивалентно релаксации мышечной и (или) костной ткани. При отсутствии потерь зависимость  $B_2=f(B_H)$  представляется так называемой «скелетной» кривой (кривая 4, рис. 3), определяющей поведение резонансных кривых и характер нелинейности восстанавливающей силы (накачки).

Представленная математическая модель позволяет исследовать энергетические процессы, протекающие в мышечном волокне в момент приложения и снятия нагрузки. С помощью эквивалентной электрической схемы возможно моделирование нелинейных процессов растяжения–сжатия мягких и костных тканей мышечной структуры организма.

Разработанная на основе теории параметрического зонного резонанса модель мышечного волокна может быть использована для создания научно-исследовательских и экспертных систем, изучающих поведение структурных элементов живого организма при внешних воздействиях различного рода.

**Список литературы:** 1. А.с. №765825. G 06 G7/60. Модель мышцы / С.П.Романов. 23.09.90. Бюл. № 35. 2. *Timevarying identification of the neuromuscular system. Isolated muscle mechanics* / Nielsen Poul, Hunter Ian, Kearney Rod // Proc 15th Annu. Northeast Bioeng. Conf., 1989. С.151-152. 3. А.с. №1681322 (СССР). Способ моделирования эволюции материи / ХИРЭ. П.И. Чередников. Опубл. 30.09.91. Бюл. №36, МКИ G09 В 23/06.

Поступила в редколлегию 9.07.2001.