УДК 621.385.69

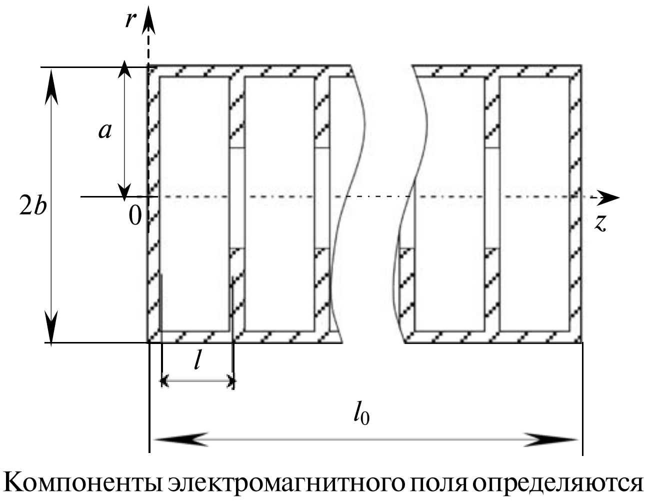
ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДИАФРАГМИРОВАННОГО РЕЗОНАТОРА. I

РУЖЕНЦЕВ И.В., ХМЕЛЬ С.И., ЧУМАЧЕНКО В.С.

Решается граничная электродинамическая задача для цилиндрического диафрагмированного резонатора. Получено дисперсионное уравнение относительно собственных частот.

Объемные электромагнитные резонаторы применяются в технике сверхвысоких частот и в ускорителях заряженных частиц [1–3]. В связи с этим представляет интерес найти поля и собственные частоты для диафрагмированных резонаторов цилиндрического и коаксиального типов.

Рассмотрим задачу об отыскании собственных частот колебаний электрического типа в цилиндрическом резонаторе с диафрагмами (рисунок). Формулы получены для различных расстояний между диафрагмами и различных больших радиусов дополнительных областей. На рисунке изображен частный случай – продольный разрез резонатора, когда расстояния между диафрагмами одинаковы и большие радиусы дополнительных областей также одинаковы.



Компоненты электромагнитного поля определяются по формулам [3]:

$$E_z^{(m)}(r,z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Pi^{(m)}(r,z),\quad j=\sqrt{-1}\,; \tag{1}$$

$$H_\varphi^{(m)}(r,z)=-\frac{\partial\Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r}\,; \tag{2}$$

$$E_r^{(m)}(r,z)=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial^2\,\Pi^{(m)}(r,z)}{\partial r\partial z},\ m=I,II,III\,. \tag{3}$$

Потенциальные функции $\Pi^{(m)}(r,z)$ являются решениями скалярного однородного уравнения Гельмгольца, и для трех областей резонатора определяются следующим образом:

$$\Pi^{(0)}(r,z)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(0)}Z_0^{(0)}\left(k_{ri}^{(0)}r\right)\cos\left(k_{zi}^{I}z\right),$$

$$\Pi^{(1)}(r,z)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(1)}Z_0^{(1)}\left(k_{ri}^{(1)}r\right)\cos\left[k_{zi}^{(1)}(z-l_1)\right],$$

$$\Pi^{2}(r,z)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(2)}Z_0^{(2)}\left(k_{ri}^{(2)}r\right)\cos\left[k_{zi}^{(2)}(z-l_3)\right],$$

$$\Pi^{(3)}(r,z)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(3)}Z_0^{(3)}\left(k_{ri}^{(3)}r\right)\cos\left[k_{zi}^{(3)}(z-l_5)\right], \tag{4}$$

....

$$\Pi^{(N)}(r,z)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(N)}Z_0^{(N)}\left(k_{ri}^{(N)}r\right)\cos\left[k_{zi}^{(N)}(z-l_{2N-1})\right],$$

где k – собственные числа и

$$k_{zi}^{(0)}=\frac{\pi i}{l_0},\ k_{zi}^{(1)}=\frac{\pi i}{l_2-l_1}=\frac{\pi i}{\Delta l_1},\ k_{zi}^{(2)}=\frac{\pi i}{l_4-l_3}=\frac{\pi i}{\Delta l_2},$$

$$\ldots,\ k_{zi}^{(N)}=\frac{\pi i}{l_{2N}-l_{2N-1}}=\frac{\pi i}{\Delta l_N},$$

$$k_{ri}^{(0)}=\sqrt{k_0^2-\left(k_{zi}^{(0)}\right)^2}=\sqrt{k_0^2-\left(\frac{\pi i}{l_0}\right)^2},\ \ldots,$$

$$k_{ri}^{(N)}=\sqrt{k_N^2-\left(k_{zi}^{(N)}\right)^2}=\sqrt{k_N^2-\left(\frac{\pi i}{\Delta l_N}\right)^2},\ i=0,1,2,\ldots;$$

$$\Delta l_1=l_2-l_1;\ \Delta l_2=l_4-l_3,\ \ldots,\ \Delta l_N=l_{2N}-l_{2N-1};$$

$$k_0^2=\varepsilon^{(0)}\omega^2\mu_0,\ k_1^2=\varepsilon_1\omega^2\mu_0,\ \ldots,\ k_N^2=\varepsilon_N\omega^2\mu_0.$$

Частичные области резонатора могут заполняться материалами с различными диэлектрическими константами:

$$\varepsilon^{(0)}=\varepsilon_0\left(\varepsilon'_{(0)}-j\,\varepsilon''_{(0)}\right),\ \ldots,\varepsilon_1=\varepsilon_0\left(\varepsilon'_1-j\,\varepsilon''_1\right),$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_0\left(\varepsilon'_2-j\,\varepsilon''_2\right),\ \ldots,\ \varepsilon_N=\varepsilon_0\left(\varepsilon'_N-j\,\varepsilon''_N\right).$$

Если $k_r^2\ge 0$, то $k_r=\sqrt{k^2-k_z^2}$,

$n=0,1,2$; $\tau=1,2,3,\ldots$

$$Z_n^{(0)}\left(k_{r\tau}^{(0)}r\right)=J_n\left(k_{r\tau}^{(0)}r\right)N_0\left(k_{r\tau}^{(0)}b\right)-J_0\left(k_{r\tau}^{(0)}b\right)N_0\left(k_{r\tau}^{(0)}r\right),$$

$$Z_n^{(1)}\left(k_{r\tau}^{(1)}r\right)=J_n\left(k_{r\tau}^{(1)}r\right)N_0\left(k_{r\tau}^{(1)}a_1\right)-J_0\left(k_{r\tau}^{(1)}a_1\right)N_n\left(k_{r\tau}^{(1)}r\right),$$

$$Z_n^{(2)}\left(k_{r\tau}^{(2)}r\right)=J_n\left(k_{r\tau}^{(2)}r\right)N_0\left(k_{r\tau}^{(2)}a_2\right)-J_0\left(k_{r\tau}^{(2)}a_2\right)N_n\left(k_{r\tau}^{(2)}r\right),$$

$$Z_n^{(N)}\left(k_{r\tau}^{(N)}r\right)=J_n\left(k_{r\tau}^{(N)}r\right)N_0\left(k_{r\tau}^{(N)}a_N\right)-J_0\left(k_{r\tau}^{(N)}a_N\right)N_n\left(k_{r\tau}^{(N)}r\right),$$

b – внешний радиус резонатора; a_1 – меньший радиус 1-й области; a_2 – меньший радиус 2-й области; a_N – малый радиус N -й области.

На границе раздела частичных областей электрическое и магнитное поля должны быть непрерывными, а касательные составляющие вектора электрического поля должны обращаться в нуль на идеально проводящих стенках резонатора, т.е. необходимо выполнение следующих граничных условий:

$$E_z^{(0)}=E_z^{(N)},\ r=a,\ z\in Щ,\qquad E_z^{(0)}=0,\ r=a,\ z\in M, \tag{5}$$

$$H_\varphi^{(0)}=H_\varphi^{(N)},\ r=a,\ z\in Щ. \tag{6}$$

Определив составляющие E_z и H_φ по формулам (1)-(3) и подчинив их граничным условиям (5),(6), получим систему функциональных уравнений, из которой следует бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_i:

$$\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(0)}x_i^{(0)}Z_i^{(0)}\left(x_i^I\right)\Bigg[\delta_{ij}\left(1+\delta_{j0}\right)\frac{l_0\left(x_j^{(0)}\right)^2Z_0^{(0)}\left(x_j^{(0)}\right)}{2\left(x_j^{(0)}\right)Z_1^{(0)}\left(x_j^{(0)}\right)}-$$

$$-2\frac{\varepsilon^{(0)}}{\varepsilon_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_1(j,k)i_1(i,k)}{\left(1+\delta_{k0}\right)\Delta l_1}\frac{\left(x_k^{(1)}\right)^2Z_0^{(1)}\left(x_k^{(1)}\right)}{x_k^{(1)}Z_1^{(1)}\left(x_k^{(1)}\right)}-$$

$$-2\frac{\varepsilon^{(0)}}{\varepsilon_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_2(j,k)i_2(i,k)}{\left(1+\delta_{k0}\right)\Delta l_2}\frac{\left(x_k^{(2)}\right)^2Z_0^{(2)}\left(x_k^{(2)}\right)}{x_k^{(2)}Z_1^{(2)}\left(x_k^{(2)}\right)}-$$

$$-2\frac{\varepsilon^{(0)}}{\varepsilon_3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_3(j,k)i_3(i,k)}{\left(1+\delta_{k0}\right)\Delta l_3}\frac{\left(x_k^{(3)}\right)^2Z_0^{(3)}\left(x_k^{(3)}\right)}{x_k^{(3)}Z_1^{(3)}\left(x_k^{(3)}\right)}- \tag{7}$$

....

$$-2\frac{\varepsilon^{(0)}}{\varepsilon_N}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_N(j,k)i_N(i,k)}{\left(1+\delta_{k0}\right)\Delta l_N}\frac{\left(x_k^{(N)}\right)^2Z_0^{(N)}\left(x_k^{(N)}\right)}{x_k^{(N)}Z_1^{(N)}\left(x_k^{(N)}\right)}\Bigg]=0,$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty}A_i^{(0)}x_i^{(0)}Z_i^{(0)}\left(x_i^I\right)\Bigg[\delta_{ij}\left(1+\delta_{j0}\right)\frac{l_0\left(x_j^{(0)}\right)^2Z_0^{(0)}\left(x_j^{(0)}\right)}{2\left(x_j^{(0)}\right)Z_1^{(0)}\left(x_j^{(0)}\right)}-$$

$$-2\varepsilon^{(0)}\sum_{\tau=1}^{N}\frac{1}{\varepsilon_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_\tau(j,k)i_\tau(i,k)}{\left(1+\delta_{k0}\right)\Delta l_\tau}\frac{\left(x_k^{(\tau)}\right)^2Z_0^{(\tau)}\left(x_k^{(\tau)}\right)}{x_k^{(\tau)}Z_1^{(\tau)}\left(x_k^{(\tau)}\right)}\Bigg]=0,$$

$$x_\tau^{(1)}=k_{r\tau}^{(1)}a=a\sqrt{k_1^2-\left(\frac{\pi\tau}{\Delta l_1}\right)^2},$$

$$x_\tau^{(2)}=k_{r\tau}^{(2)}a=a\sqrt{k_2^2-\left(\frac{\pi\tau}{\Delta l_2}\right)^2},$$

$$x_\tau^{(3)}=k_{r\tau}^{(3)}a=a\sqrt{k_3^2-\left(\frac{\pi\tau}{\Delta l_3}\right)^2},\ \dots,$$

....

$$x_\tau^{(N)}=k_{r\tau}^{(N)}a=a\sqrt{k_N^2-\left(\frac{\pi\tau}{\Delta l_N}\right)^2},$$

$$x_\tau^{(\mu)}=k_{r\tau}^{(\mu)}a=a\sqrt{k_\mu^2-\left(\frac{\pi\tau}{\Delta l_\mu}\right)^2},$$

$$\tau=0,1,2,3,\dots;\ \mu=0,1,2,3,\dots;$$

$$i_N\left(M_1,M_2\right)=\int_{l_{2N-1}}^{l_{2N}}\cos\left(k_{zM_1}^{(0)}z\right)\cos\left[k_{zj}^{(N)}\left(z-l_{2N-1}\right)\right]dz.$$

Условием существования и единственности решения системы (7) является обращение в нуль ее определителя:

$$\det\Bigg\{x_i^{(0)}Z_i^{(0)}\left(x_i^I\right)\Bigg[\delta_{ij}\left(1+\delta_{j0}\right)\frac{l_0\left(x_j^{(0)}\right)^2Z_0^{(0)}\left(x_j^{(0)}\right)}{2\left(x_j^{(0)}\right)Z_1^{(0)}\left(x_j^{(0)}\right)}-$$

$$-2\varepsilon^{(0)}\sum_{\tau=1}^{N}\frac{1}{\varepsilon_\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i_\tau(j,k)i_\tau(i,k)}{\left(1+\delta_{k0}\right)\Delta l_\tau}\frac{\left(x_k^{(\tau)}\right)^2Z_0^{(\tau)}\left(x_k^{(\tau)}\right)}{x_k^{(\tau)}Z_1^{(\tau)}\left(x_k^{(\tau)}\right)}\Bigg]\Bigg\}=0. \tag{8}$$

Следует заметить, что при $k_r^2<0$ имеет место $k_r=-j\bar{k}_r=-j\sqrt{k_z^2-k^2}$ и $\bar{k}_r=\sqrt{k_z^2-k^2}$, и функции Z_s представляются модифицированными функциями Бесселя:

$$Z_n^{(0)}\left(\bar{k}_{rz}^{(0)}r\right)=-\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)\Big[I_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(0)}r\right)K_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(0)}b\right)-$$
$$-(-1)^nI_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(0)}b\right)K_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(0)}r\right)\Big],$$

$$Z_n^{(1)}\left(\bar{k}_{rz}^{(1)}r\right)=-\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)\Big[I_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(1)}r\right)K_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(1)}a_1\right)-$$
$$-(-1)^nI_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(1)}a_1\right)K_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(1)}r\right)\Big],$$

$$Z_n^{(2)}\left(\bar{k}_{rz}^{(2)} r\right) = -\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)\left[I_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)} r\right)K_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)} a_2\right) - (-1)^n I_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)} a_2\right)K_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(2)} r\right)\right],$$

$$Z_n^{(N)}\left(\bar{k}_{rz}^{(N)} r\right) = -\frac{2}{\pi}\exp(-jn\pi/2)\left[I_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(N)} r\right)K_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(N)} a_N\right) - (-1)^n I_0\left(\bar{k}_{r\tau}^{(N)} a_N\right)K_n\left(\bar{k}_{r\tau}^{(0)} r\right)\right] .$$

Полученное в такой форме дисперсионное уравнение позволяет разработать оптимальный численный алгоритм для расчета резонансных частот рассматриваемого резонатора. Алгоритм и результаты численных расчетов на ЭВМ будут приведены в продолжении данной статьи.

Литература: 1. *Лупандин О.С., Ковпак Н.Е., Баранов Л.Н., Хижняк Н.А.* Исследование электродинамических свойств резонаторов с патрубками. Харьков: ХФТИ. Препринт 70/34. 1970. 15с. 2. *Вайнштейн Л.А., Маненков А.Б.* Коаксиальные резонаторы//Радиотехника и электроника. 1973. Т.18. Вып.9. С.1777-1784. 3. *Вальднер О.А., Шальнов А.В., Диденко А.Н.* Ускоряющие волноводы. М., 1973. 192 с.

Поступила в редколлегию 15.12.99

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Лучанинов А.И.

Руженцев Игорь Викторович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой метрологии и измерительной техники ХТУРЭ. Научные интересы: радиофизика и измерительная техника. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-31.

Хмель Сергей Иванович, соискатель кафедры МИТ ХТУРЭ. Научные интересы: радиофизика и измерительная техника. Адрес: Украина, 61726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 14-08-02.

Чумаченко Виктор Савельевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Харьковского научного физико-технологического центра НАНУ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61145, Харьков, ул. Новгородская, 1, тел. 32-45-67.

УДК 537.877

РАСЧЕТ ИСКАЖЕНИЯ ОГИБАЮЩЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ЕГО РАСПРОСТРАНЕНИИ В РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ. I

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Предлагается общая схема решения задачи о расчете искажения огибающей электромагнитного импульса, распространяющегося в регулярном волноводе. При заданных огибающей, несущей частоте входного сигнала и длине волновода с использованием преобразования Фурье выводится общая формула, из которой можно определить искажения огибающей выходного сигнала.

Для волновода без потерь длиной l, рассматриваемого как четырехполюсник, передаточная функция имеет вид [1,2]:

$$A(\omega) = \exp\left(-jt_0\sqrt{\omega^2-\omega_c^2}\right), \qquad (1)$$

где $t_0 = l/c$, l — длина волновода; c — скорость света; ω — частота электромагнитного поля; ω_c — критическая частота волновода. Пусть на вход этого волновода подается импульс с несущей частотой ω_0:

$$u_1(t) = g_e(t)\cos\omega_0 t , \qquad (2)$$

здесь $g_e(t)$ — огибающая этого импульса.

Введем в рассмотрение спектр огибающей импульса, вычисляемый по формуле

$$g_e(t) \circ\!-\!\bullet\, u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_e(t)e^{-j\omega t}d\omega ; \qquad (3)$$

$$u_1(t) \circ\!-\!\bullet\, F_{\text{вх}} = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{2}u(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}u(\omega+\omega_0) . \qquad (4)$$

Итак, спектр входного сигнала представим в виде:

$$u_1(t) \circ\!-\!\bullet\, F_{\text{вх}} = \frac{1}{2}u(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}u(\omega+\omega_0). \qquad (5)$$

На выходе волновода с учетом $A(\omega)$ и использованием обратного преобразования Фурье получим выходной сигнал

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_{\text{вх}}(\omega)A(\omega)e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u(\omega+\omega_0)A(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \qquad (6)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u(\omega-\omega_0)A(\omega)e^{j\omega t}d\omega .$$

При замене переменных

$$\omega+\omega_0 = \omega';\quad \omega = \omega'-\omega_0 ;$$

$$\omega-\omega_0 = \omega'';\quad \omega = \omega''+\omega_0 ;$$

$$e^{j\omega t} = e^{j(\omega'-\omega_0)t} = e^{j\omega' t}e^{-j\omega_0 t} ;$$

$$e^{j\omega t} = e^{j(\omega''+\omega_0)t} = e^{j\omega'' t}e^{j\omega_0 t}$$

получим

$$u_2(t) = \frac{1}{2\pi}e^{-j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}u(\omega')A(\omega'-\omega_0)e^{j\omega' t}d\omega' +$$