УДК 519.6

О.М. Литвин, О.В. Ярмош

Українська інженерно-педагогічна академія,
Харків, Україна, yel_mag@mail.ru

ПРО ПОХИБКУ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ БІЛІНІЙНИМИ СПЛАЙНАМИ МНК В ІНТЕГРАЛЬНІЙ ФОРМІ

Досліджується похибка наближення функцій двох змінних, заданих слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих точно або з похибками, операторами інтерлінації з використанням допоміжних функцій у вигляді білінійних сплайнів методом найменших квадратів (МНК) в інтегральній формі. Також запропоновано вигляд оператора наближення функцій двох змінних операторами інтерлінації функцій за допомогою МНК в інтегральній формі.

ПОХИБКА НАБЛИЖЕННЯ, БІЛІНІЙНИЙ СПЛАЙН, МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ, ОПЕРАТОР ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ

Вступ

Практичне отримання найкращих наближень для окремих функцій або для класів функцій за допомогою тригонометричних поліномів (чи інших систем ортогональних функцій) є складною задачею. Тому на практиці, як правило, користуються операторами апроксимації Фур'є, Фейєра, Валле Пуссена, Хаара та іншими операторами, що не дають найкращого наближення, але мають ряд переваг (простота обчислення коефіцієнтів, менша кількість арифметичних операцій для обчислення наближеного значення функції в одній точці тощо).

На даний час достатньо добре вивчено наближення інтерполяційними сплайнами функцій однієї та багатьох змінних [1-7]. Слід підкреслити таку особливість одновимірної теорії сплайнів: в одновимірному випадку теорію наближення сплайнами можна створювати на відрізку $I=[0,1]$, а потім заміною змінних переносити результати на відрізок $[a,b]$. Тому питання вивчення вигляду операторів наближення з використанням допоміжних функцій у вигляді білінійних сплайнів, а також порівняння похибки такого наближення з похибками інших операторів наближення є актуальними.

В роботах [6,7] побудовані оператори сплайн-апроксимації та сплан-інтерлінації функцій, що дозволяють отримати наближення функцій високої точності та встановлені точні оцінки похибки наближення функцій однієї змінної сплайнами першого порядку в нормі $L_2[0,1]$.

1. Постановка задачі

В даній роботі досліджується похибка наближення функцій двох змінних, заданих слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих, операторами інтерлінації з використанням білінійних сплайнів методом найменших квадратів (МНК) в інтегральній формі.

В основу роботи покладено теорему, що наведена в роботі [2, с. 302] без доведення.

Теорема 1. Для функції $f(x,y)\in W_2^{1.1}(I^2)$, $I=[0,1]$ оператори

$$L_{m,n}(x,y,C)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}C_{i,j}s_{m,i}(x)s_{n,j}(y),$$

коефіцієнти $C_{i,j}, i=\overline{0,m}, j=\overline{0,n}$ яких знаходяться з умови

$$J_{m,n}(C,L_{m,n})=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\sum_{p=0}^{1}\sum_{q=0}^{1}\left(\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\partial y^q}\left[f(x,y)-L_{m,n}(x,y,C)\right]\right)^2 dxdy\to \quad (1)$$

$$\to\min_C,$$

можна зобразити у вигляді

$$L_{m,n}f(x,y)=A_{1,m}A_{2,n}f(x,y),$$

де

$$A_{1,m}f(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\varphi_i(y)s_{m,i}(x),$$

$$A_{2,n}f(x,y)=\sum_{j=0}^{m}\psi_j(x)s_{n,j}(y),$$

а невідомі функції $\varphi_i(y)$, $\psi_j(x)$ знаходяться МНК з умов

$$\int_0^1\sum_{p=0}^{1}\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left[f(x,y)-A_{1,m}f(x,y)\right]\right)^2 dx\to\min_{\varphi_i(y)},$$

$$\int_0^1\sum_{q=0}^{1}\left(\frac{\partial^q}{\partial y^q}\left[f(x,y)-A_{2,n}f(x,y)\right]\right)^2 dy\to\min_{\psi_j(x)}.$$

2. Похибка наближення функції двох змінних, отримана за допомогою похибок наближення операторами, що діють на одну змінну

В роботі [3] доведені теореми щодо вигляду операторів наближення, запропонованих у [2].

Нехай $h_{1,k}(x)$, $h_{2,l}(y)$ – задана система лінійно незалежних функцій; функції $\varphi_k(y),\psi_l(x)$ і сталі $C_{k,l}$ вважаються невідомими. Доведено, що запропонований у [6-8] оператор наближення функції $f(x,y)$

$$Z(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(y)h_{1,k}(x)+\sum_{l=0}^{N}\psi_l(x)h_{2,l}(y)-$$
$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y),$$

у якому невідомі $\varphi_k(y),\psi_l(x)$ і $C_{k,l}$ знаходяться з умови (1), де замість $L_{m,n}(x,y,C)$ стоїть $Z(x,y)$, має вигляд

$$Z^*(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y)+F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y)-$$
$$-h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T,$$

може бути також представлений так:

$$Z^*(x,y)=A_1f(x,y)+A_2f(x,y)-A_1A_2f(x,y)\ ,\qquad (2)$$

де оператори A_1, A_2 визначаються МНК з умов

$$\int_0^1\left[f(x,y)-C1(x)h_2^T(y)\right]^2dy\to\min_{C1},$$

$$\int_0^1\left[f(x,y)-h_1(x)C2^T(y)\right]^2dx\to\min_{C2},$$

$$\int_0^1\int_0^1\left[f(x,y)-h_1(x)Ch_2^T(y)\right]^2dxdy\to\min_{C}$$

формулами:

$$A_1f(x,y)=h_1(x)\varphi^T(y)=h_1(x)B_1^{-1}F_1^T(y)\ ,$$
$$A_2f(x,y)=\psi(x)h_2^T(y)=F_2(x)B_2^{-1}h_2^T(y)\ ,$$
$$A_1A_2f(x,y)=h_1(x)B_1^{-1}FB_2^{-1}h_2^T(y)\ ,$$

де $\quad F=\int_0^1\int_0^1h_1^T(x)f(x,y)h_2(y)dxdy$;

$$F_1^T(y)=\int_0^1h_1^T(x)f(x,y)dx\ ,$$

$$F_2(x)=\int_0^1f(x,y)h_2(y)dy\ ,\ B_1=\int_0^1h_1^T(x)h_1(x)dx\ ,$$

$$B_2=\int_0^1h_2^T(y)h_2(y)dy\ .$$

Також доведено, що оператор

$$Z0(x,y;C)=Z0(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y)=$$
$$=h_1(x)Ch_2^T(y),$$

у якому матриця C знаходиться МНК, можна представити так

$$Z0(x,y)=Z0f(x,y)=A_1A_2f(x,y)\ .\qquad (3)$$

Зображення операторів наближення (2) та (3) у вигляді операторів, що діють на одну змінну (x або y), дозволяють довести теореми про вигляд похибки наближення.

Теорема 2 [8]. Похибка наближення функції $f(x,y)$ за допомогою $Z0f(x,y)$ має вигляд:

$$\begin{aligned}Rf(x,y)&=f(x,y)-Z0f(x,y)=\\&=\left(R_1+R_2-R_1R_2\right)f(x,y),\end{aligned}\qquad (4)$$

де $\quad R_1f(x,y)=f(x,y)-A_1f(x,y)$,

$$R_2f(x,y)=f(x,y)-A_2f(x,y)\ .$$

Теорема 3 [8]. Похибка наближення функції $f(x,y)$ за допомогою $Zf(x,y)$, де $Zf(x,y)=Z^*(x,y)$ визначається формулою (2), має вигляд:

$$Rf(x,y)=f(x,y)-Zf(x,y)=R_1R_2f(x,y)\ .\qquad (5)$$

Наслідок 1. Припустимо, що

$$\max_{0\le y\le 1}\left|f(x,y)-A_1f(x,y)\right|=O(\varepsilon),\ 0\le x\le 1\ ,$$

$$\max_{0\le x\le 1}\left|f(x,y)-A_2f(x,y)\right|=O(\varepsilon),\ 0\le y\le 1\ .$$

Тоді для залишку $f(x,y)-Zf(x,y)$ справедлива оцінка $\left|f(x,y)-Zf(x,y)\right|=O(\varepsilon^2)\forall(x,y)\in\left[0,1\right]^2$.

Відповідну оцінку похибки для випадку, коли функція задається своїми слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих з похибками, можна отримати за допомогою такої теореми.

Теорема 4. У випадку, якщо відомі сліди функції $f(x_p,y)$ та $f(x,y_q)$ ($p,q=\overline{0,M}$) і наближуємо $f(x,y)$ з умови

$$\begin{aligned}J(C)=&\sum_{p=0}^{M}\int_0^1\left[f(x_p,y)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y)\right]^2dy+\\&+\sum_{q=0}^{M}\int_0^1\left[f(x,y_q)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y_q)\right]^2dx\to\min_{C},\end{aligned}\qquad (6)$$

де функції $h_{1,k}(x)$ та $h_{2,l}(y)$ — відомі лінійно-незалежні функції, $C_{k,l}$, $k,l=\overline{0,N}$ — невідомі сталі, то для матриці C виконується співвідношення:

$$C=A^{-1}F\ ,\qquad (7)$$

де $A=\left[a_{i,j}\right]_{i,j=0}$,

$$a_{(N+1)\mu+\nu,(N+1)k+l}=\tilde{A}_{k,l,\mu,\nu}=B2_{l,\nu}b1_{k,\mu}+B1_{k,\mu}b2_{l,\nu}\ ,$$

$$F_{(N+1)\mu+\nu}=\tilde{F}_{\mu,\nu}=F1_{\mu,\nu}+F2_{\mu,\nu}\ ,$$

$$B1_{k,\mu}=\int_0^1h_{1,k}(x)h_{1,\mu}(x)dx\ ,\ B2_{l,\nu}=\int_0^1h_{2,l}(y)h_{2,\nu}(y)dy\ ,$$

$$b1_{k,\mu}=\sum_{p=0}^{M}h_{1,k}(x_p)h_{1,\mu}(x_p)\ ,\ b2_{l,\nu}=\sum_{q=0}^{M}h_{2,l}(y_q)h_{2,\nu}(y_q)\ ,$$

$$F1_{\mu,\nu}=\sum_{p=0}^{M}\int_0^1f(x_p,y)h_{2,\nu}(y)dyh_{1,\mu}(x_p)\ ,$$

$$F2_{\mu,\nu}=\sum_{q=0}^{M}\int_0^1f(x,y_q)h_{1,\mu}(x)dxh_{2,\nu}(y_q)\ .$$

Доведення. З умови (6) отримуємо рівняння для знаходження матриці C:

$$\frac{\partial J}{\partial C_{\mu,\nu}}=0\Rightarrow$$

$$\sum_{p=0}^{M}\int_0^1\left[f(x_p,y)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x_p)h_{2,l}(y)\right]\times$$
$$\times h_{1,\mu}(x_p)h_{2,\nu}(y)dy+$$
$$+\sum_{q=0}^{M}\int_0^1\left[f(x,y_q)-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y_q)\right]\times$$
$$\times h_{1,\mu}(x)h_{2,\nu}(y_q)dx=0,$$
$$\mu,\nu=\overline{0,N}.$$

Перепишемо отримані рівності у вигляді:

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}\left[\int_0^1 h_{2,l}(y)h_{2,\nu}(y)dy\sum_{p=0}^{M}h_{1,k}(x_p)h_{1,\mu}(x_p)\right]+$$
$$+\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}\left[\int_0^1 h_{1,k}(x)h_{1,\mu}(x)dx\sum_{q=0}^{M}h_{2,l}(y_q)h_{2,\nu}(y_p)\right]=$$
$$=\sum_{p=0}^{M}\int_0^1 f(x_p,y)h_{2,\nu}(y)dyh_{1,\mu}(x_p)+$$
$$+\sum_{q=0}^{M}\int_0^1 f(x,y_q)h_{1,\mu}(x)dxh_{2,\nu}(y_q),\ \mu,\nu=\overline{0,N}$$

або

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}C_{k,l}(B2_{l,\nu}b1_{k,\mu}+B1_{k,\mu}b2_{l,\nu})=F1_{\mu,\nu}+F2_{\mu,\nu},$$
$$C_{k,l}(A1_{k,l,\mu,\nu}+A1_{k,l,\mu,\nu})=F1_{\mu,\nu}+F2_{\mu,\nu},$$
$$C_{k,l}A_{k,l,\mu,\nu}=F_{\mu,\nu}.$$

Перейдемо від чотиривимірного масиву до двовимірного: $t=(N+1)k+l$ та $s=(N+1)\mu+\nu$.

Тоді отримуємо $\sum_{t=0}^{(N+1)^2-1}A_{s,t}C_t=F_s$, $s=\overline{0,(N+1)^2-1}$, звідки $C=A^{-1}F$.

Теорема 4 доведена.

Для перевірки твердження теореми 4 розглянуто приклад.

Приклад. Нехай $f(x,y)=\ln\left[(x+a)^2+(y+b)^2\right]$, $a=b=1$. Якщо наближувати функцію $f(x,y)$, задану за допомогою слідів на системі взаємно перпендикулярних прямих, то з умови (6) отримуємо похибку наближення $\varepsilon=O(10^{-4})$.

3. Похибка наближення функції двох змінних, якщо вона задана наближено своїми слідами

Дослідимо рівень загальної похибки для випадку, коли функція задається своїми слідами на системі взаємноперпендикулярних прямих з деякими похибками. У такому випадку необхідно враховувати як власне похибку методу наближення функції, так і похибку даних.

Теорема 5. Якщо $f(x,y)\in C^{2,2}[0,1]^2$ та сліди $f(x_k,y)$, $f(x,y_l)$ задані функціями $\varphi_k(y)$, $\psi_l(x)$ з похибками, значення функції $f(x_k,y_l)$ також задано числами $\tilde{f}_{k,l}$ з похибками, тобто

$$\left\|f(x_k,y)-\varphi_k(y)\right\|_{C[0,1]}\le\eta,\ \left\|f(x,y_l)-\psi_l(x)\right\|_{C[0,1]}\le\eta,$$
$$\max_{k,l}\left|f(x_k,y_l)-\tilde{f}_{k,l}\right|\le\eta,$$

то загальна похибка наближення функції $f(x,y)$ оператором сплайн-інтерлінації

$$\tilde{O}f(x,y)=\sum_{k=0}^{N}\varphi_k(y)h_{1,k}(x)+\sum_{l=0}^{N}\psi_l(x)h_{2,l}(y)-$$
$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\tilde{f}_{k,l}h_{1,k}(x)h_{2,l}(y)$$

з використанням допоміжних функцій у вигляді сплайнів першого степеня визначаються таким чином:

$$\left\|f(x,y)-\tilde{O}f(x,y)\right\|_{C[0,1]^2}\le O(\varepsilon^2)+O(\eta),$$
$$\varepsilon=O\left(\frac{1}{N^2}\right). \qquad (8)$$

Доведення. Для оцінки норми

$$\left\|f(x,y)-\tilde{O}f(x,y)\right\|_{C[0,1]^2}$$

запишемо наступну низку співвідношень:

$$\left\|f(x,y)-\tilde{O}f(x,y)\right\|_{C[0,1]^2}=$$
$$=\left\|f(x,y)-Of(x,y)+Of(x,y)-\tilde{O}f(x,y)\right\|_{C[0,1]^2}\le \qquad (9)$$
$$\le\left\|f(x,y)-Of(x,y)\right\|_{C[0,1]}+\left\|Of(x,y)-\tilde{O}f(x,y)\right\|_{C[0,1]},$$

де

$$Of(x,y)=\sum_{k=0}^{N}f(x_k,y)h_{1,k}(x)+\sum_{l=0}^{N}f(x,y_l)h_{2,l}(y)-$$
$$-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}f(x_k,y_l)h_{1,k}(x)h_{2,l}(y).$$

З урахуванням тверджень, наведених у [6-7], запишемо:

$$\left\|f(x,y)-Of(x,y)\right\|_{C[0,1]}=O(\varepsilon^2)=O\left(\frac{1}{N^4}\right),$$
$$N\to\infty.$$

Для оцінки другого доданку у правій частині (9) запишемо різницю під знаком норми так:

$$\left\|Of(x,y)-\tilde{O}f(x,y)\right\|_{C[0,1]}=$$
$$=\left\|\sum_{k=0}^{N}\big(f(x_k,y)-\varphi_k(y)\big)h_{1,k}(x)+\right.$$
$$+\sum_{l=0}^{N}\big(f(x,y_l)-\psi_l(x)\big)h_{2,l}(y)-$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\big(f(x_k,y_l)-\tilde{f}_{k,l}\big)h_{1,k}(x)h_{2,l}(y)\right\|_{C[0,1]}.$$

Звідси отримуємо

$$\left\| Of(x,y) - \tilde{O}f(x,y) \right\|_{C[0,1]} =$$
$$= \max_{0\le x,y\le 1} \left\| \sum_{k=0}^{N} \left(f(x_k,y) - \varphi_k(y) \right) h_{1,k}(x) + \right.$$
$$+ \sum_{l=0}^{N} \left(f(x,y_l) - \psi_l(x) \right) h_{2,l}(y) -$$
$$\left. - \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} \left(f(x_k,y_l) - \tilde{f}_{k,l} \right) h_{1,k}(x) h_{2,l}(y) \right\|_{C[0,1]} \le$$
$$\le \max_{k,l} \left\{ \left\| f(x_k,y) - \varphi_k(y) \right\|_{C[0,1]}; \right.$$
$$\left. \left\| f(x,y_l) - \psi_l(x) \right\|_{C[0,1]}; \left| f(x_k,y_l) - \tilde{f}_{k,l} \right| \right\} = O(\eta).$$

Теорема 5 доведена.

Зауваження. Таким чином, якщо $O(\eta) > O(\varepsilon^2)$, то внесок у загальне значення похибки від похибок задання слідів $f(x_k,y)$, $f(x,y_l)$ та значень $f(x_k,y_l)$ буде більшим, ніж похибка інтерлінації, тобто загальна похибка для $f(x,y) \in C^{2,2}[0,1]^2$ складе

$$R = \left\| f(x,y) - \tilde{O}f(x,y) \right\|_{C[0,1]^2} = O\left(\frac{1}{N^4} \right) + O(\eta),$$
$$N \to \infty,\ \eta \to 0.$$

Висновки

Випадок наближення функцій двох і більше змінних, заданих слідами на системі взаємно перпендикулярних прямих, має важливе практичне значення, оскільки сліди функції двох і більше змінних на системі заданих перетинних ліній або поверхонь все частіше знаходять застосування в різноманітних задачах науки і техніки (комп'ютерній томографії, цифровій обробці багатовимірних сигналів, конструюванні просторових математичних моделей розподілу корисних копалин тощо).

Сьогодні залишається проблема нестачі та неточності вхідних даних, що є особливо гострою для сфери економіки, освіти і науки та ін., та гальмує використання математичних методів в їх дослідженні. В таких випадках виникає необхідність дослідження похибок наближення функції та вхідних даних.

Отримані авторами результати використано при дослідженні сфери освітніх послуг, де дані найчастіше і задаються з похибками, а саме для дослідження рівня попиту на освітні послуги в залежності від рейтингу вищого навчального закладу та ціни освітньої послуги.

Список літератури: **1.** *Ciesielsky Z.* Properties of the orthonormal Franklin systems [Текст] / Z. Ciesielsky// Studia mathematica, 1963. – 23, № 2. – С. 141-157. **2.** *Завьялов, Ю.С.* Методы сплайн-функций [Текст] / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. - М.: Наука, 1980. – 350 с. **3.** *Каюмов, А.Р.* О задаче наилучшего среднеквадратического приближения L-сплайнами 2-го порядка [Текст] / А.Р. Каюмов. – Труды междунар. научн. конф. «Теория приближения», Екатеринбург, 2000. **4.** *Корнейчук, Н.П.* Сплайны в теории приближения [Текст] / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 350 с. **5.** *Стечкин, С.Б.* Сплайны в вычислительной математике [Текст] / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М.: Наука, 1976. – 248 с. **6.** *Литвин, О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування [Текст] / О.М. Литвин. – Х.: Основа, 2002. – 544 с. **7.** *Литвин, О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи: навч. посіб. [Текст] / О.М. Литвин. – К.: Наукова думка, 2005. – 344 с. **8.** *Литвин, О.Н.* Приближение функции $f(x,y)$ суммами вида $\varphi_0(x)\psi_0(x) + \ldots + \varphi_N(x)\psi_N(x)$ [Текст] / О.Н. Литвин, Е.В. Ярмош// Компьютерная математика. – Киев, 2011. – Вып. 2. – С. 151-159.

Надійшла до редколегії 16.01.2012

УДК 519.6

Об ошибке аппроксимации функции двух переменных билинейным сплайнами МНК в интегральной форме / О.Н. Литвин, Е.В. Ярмош // Бионика интеллекта: научн.-техн. журнал. – 2012. – № 1 (78). – С. 33-36.

В статье рассмотрена погрешность приближения функций двух переменных, заданных следами на системе взаимноперпендикулярных прямых, с использованием вспомогательных функций в виде билинейных сплайнов методом наименьших квадратов в интегральной форме, приближение которых получено с помощью одномерных операторов. Сформулированы и доказаны теоремы о виде оператора и погрешность приближения функции для случая, когда следы функции на системе взаимноперпендикулярных прямых задаются с ошибками. Рассмотрен пример.

Библиогр.: 8 назв.

UDK 519.6

The error of the approximation of two variables functions by means bilinear splines with help least squares method in integral form / O.N. Lytvyn, O.V. Iarmosh // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2012. – № 1 (78). –P. 33-36.

The paper considers the approximation of two variables functions defined on a system of signs mutually perpendicular lines, using the auxiliary functions in the form of bilinear splines with help least squares method in integral form which is obtained by one-dimensional operators. Formulated and proved the theorem about the form of the operator and the approximation error function for the case where the traces of functions on a system of mutually perpendicular lines are set with error. Example are considered.

Ref.: 8 items.