УДК 517.87; 537.958

Л. Н. ШУЛЬГА

ТРАНСФОРМАЦИЯ ГАУССОВА ИМПУЛЬСА ИМПУЛЬСНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ ВО ВРЕМЕНИ СВОЙСТВ БЕЗГРАНИЧНОЙ СРЕДЫ

1. Введение

Параметрические явления в радиофизике изучаются давно и по-прежнему тщательно. Однако с развитием численно-аналитического аппарата прикладных математических наук и электронно-вычислительных средств, ученые постоянно получают новые и новые результаты численных расчетов требующие физическую интерпретацию и контроль точности для впервые решенных численно классов задач. В связи с этим растет необходимость получения новых аналитических решений для каждого класса задач, решаемых численным путем.

В данной статье впервые решается задача преобразования плоского гауссового электромагнитного импульса двойным синхронным возмущением проницаемостей безграничного изотропного магнитодиэлектрического пространства во времени в виде прямоугольного импульса. На параметры последовательности импульсов не накладывается никаких ограничений. Данная работа является логическим продолжением [1] и также решается посредством метода интегральных уравнений в интерпретации эволюционного подхода А.Г. Неруха и Н.А. Хижняка [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную безграничную, свободную магнитодиэлектрическую среду, в которой до момента времени $t=0$ распространялась ТМ-волна, вектор электрической индукции которой характеризуется компонентой $E_0(t,x)$ как функцией временной переменной t и пространственной компонентой x. Пусть, начиная с момента времени $t=0$, ее диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости начинают синхронно меняться во времени по закону двух прямоугольных периодических импульсов

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon(t)&=\varepsilon_0+(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\sum_{k=1}^{2}\{\theta(t-(k-1)T)-\theta(t-t_1-(k-1)T)\},\\ \mu(t)&=\mu_0+(\mu_1-\mu_0)\sum_{k=1}^{2}\{\theta(t-(k-1)T)-\theta(t-t_1-(k-1)T)\},\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где ε_0 и μ_0 – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости невозмущенной среды; ε_1, μ_1 – то же для возмущенной среды; t_1 – время длительности импульсов проницаемости; $T=t_1+t_2$ – период изменения возмущения свойств среды, а t_2 – их скважность. Тогда, как показано в [3], компонента вектора электрического поля $E_n(t,x)$ на произвольном интервале n постоянства материальных параметров среды ($t>0$) будет определяться формулами

$$\left.\begin{aligned}E_n(t,x)&=F_n(t,x)+\int_{t_{n-1}}^{t}dt'\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,R_n(t,t',x,x')F_n(t',x'),\\ F_n(t,x)&=E_0(t,x)+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{t_{i-1}}^{t_i}dt'\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,K_i(t,t',x,x')E_i(t',x'),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $R_n(t,t',x,x')$ и $K_n(t,t',x,x')$ – соответственно резольвента и ядро интегрального уравнения (1), которые, как показано в [1], определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned}
&(n-1)T < t < t_1 + (n-1)T, \quad n = 1,...,N: \\
&K_n(t,t',x,x') = \left[1 - m^2\right]\theta(t-t')\delta(t-t')\delta(x-x') - \\
&-\theta(t-t')\frac{1-a^2m^2}{2a^2}\frac{\partial}{\partial t}\delta(v_0(t-t') - |x-x'|), \\
&R_n(t,t',x,x') = \left[1 - \frac{1}{m^2}\right]\theta(t-t')\delta(t-t')\delta(x-x') - \\
&-\theta(t-t')\frac{1-a^2m^2}{2m^2}\frac{\partial}{\partial t}\delta(mv_0(t-t') - |x-x'|);
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}
&t_1 + (n-1)T < t < nT, \quad n = 1,...,N: \\
&K_n(t,t',x,x') = 0 = R_n(t,t',x,x').
\end{aligned} \qquad (4)$$

Пусть первичное электромагнитное поле инициировано гауссовым электромагнитным импульсом, электрическая компонента которого выражается равенством

$$E_0(t,x) = e^{-(\omega t - kx)^2}, \quad k = \omega/v_0. \qquad (5)$$

Подставляя выражения для функции первичного поля (5) и резольвенты из (4) в (2), получим выражение для электрической компоненты поля на первом интервале возмущения параметров среды

$$E_1(t,x) = A_1^+ e^{-(am\omega t - kx)^2} + A_1^- e^{-(am\omega t + kx)^2}, \quad 0 < t < t_1, \qquad (6)$$

где выражения для амплитуд $A_1^\pm = \pm\frac{1 \pm am}{2m}a$ полностью совпадают с соответствующими выражениями для амплитуд [1] в случае первичной монохроматической волны единичной амплитуды со значениям частоты и волнового числа, соответственно равных ω и $k = \omega/v_0$. Так же, как и в [1], приходим к следующей картине эволюции волн в пространстве: скачок проницаемостей безграничной магнитодиэлектрической среды расщепляет первичный гауссиан на прямой и обратный со значениями «аналогов» волновых чисел первичной волны и новыми значениями «аналогов» частот, равных $am\omega$.

Подставляя далее (5), (6) и соответствующее выражение для ядра из (3) в (2), получим выражения для электрической компоненты поля на первом интервале покоя свойств среды

$$E_2(t,x) = B_1^+ e^{-(\omega t - kx - \alpha_1^-)^2} + B_1^- e^{-(\omega t - kx - \alpha_1^+)^2} - C_1 e^{-(\omega t + kx - \alpha_1^-)^2} + C_1 e^{-(\omega t + kx - \alpha_1^+)^2}, \qquad (7)$$
$$t_1 < t < T,$$

где $B_1^\pm = \pm\frac{(1 \pm am)^2}{4am}$, $C_1 = \frac{1 - a^2m^2}{4am}$, $\alpha_1^\pm = (1 \pm am)t_1$.

Как видно из (7), скачок свойств среды к первоначальным привел к расщеплению каждого из импульсов (волн), описывающихся выражением (6), на прямой и обратный. Подобная картина расщепления волн при возвратном скачке параметров среды вырисовывалась и в случае первичной монохроматической волны [1, 4]. Однако в этом случае волны, явившиеся следствием расщепления, интерферируя между собой сложным образом, всегда приводили к тому, что поле в пространстве было представимо в виде только лишь прямой и обратной волн, что обусловлено дискретностью монохроматических волн. В данном случае, непрерывность спектра гауссова импульса позволяет «визуально» отследить расщепление уже существующих волн на пару «прямая – обратная».

Описанный выше алгоритм подстановок соответствующих выражений в выражения (2) приводит к выражениям, описывающим эволюцию электрической компоненты поля на втором периоде изменения свойств среды

$$\begin{aligned}
E_3(t,x) = {} & A_2^+ e^{-(am\omega t-kx+\alpha_2^-)^2} - B_2^- e^{-(am\omega t-kx-\alpha_2^+)^2} - \\
& - C_2^- e^{-(am\omega t-kx+\alpha_1^-+\alpha_2^- -\alpha_1^+)^2} + B_2^- e^{-(am\omega t-kx-\alpha_1^+-\alpha_2^+ +\alpha_1^-)^2} + \\
& + A_2^- e^{-(am\omega t-kx-\alpha_2^+)^2} - B_2^+ e^{-(am\omega t+kx+\alpha_2^-)^2} + B_2^+ e^{-(am\omega t+kx+\alpha_1^-+\alpha_2^- -\alpha_1^+)^2} - \\
& - B_2^+ e^{-(am\omega t+kx-\alpha_1^+-\alpha_2^+ +\alpha_1^-)^2}, \quad T < t < t_1 + T,
\end{aligned} \tag{8}$$

где $A_2^\pm = \dfrac{(1 \pm am)^3}{8m^2}$; $B_2^\pm = \dfrac{(1-a^2m^2)(1 \pm am)}{8m^2}$; $\alpha_2^\pm = (1 \pm am)t_2$.

$$\begin{aligned}
E_4(t,x) = {} & A_3^+ e^{-(\omega t-kx-2\alpha_1^-)^2} + A_3^- e^{-(\omega t-kx-2\alpha_1^+)^2} - B_3 e^{-(\omega t-kx-2\alpha_1^+-\alpha_2^+-\alpha_2^-)^2} + \\
& + B_3 e^{-(\omega t-kx-2\alpha_1^- -\alpha_2^- -\alpha_2^+)^2} - 2B_3 e^{-(\omega t-kx-\alpha_1^+-\alpha_1^-)^2} + B_3 e^{-(\omega t-kx-\alpha_1^- -\alpha_2^- -\alpha_2^+)^2} + \\
& + 2B_3 e^{-(\omega t-kx-\alpha_1^- -\alpha_2^- -\alpha_1^+-\alpha_2^+)^2} - B_3 e^{-(\omega t-kx-\alpha_2^- -\alpha_1^+-\alpha_2^+)^2} - \\
& - C_3^+ e^{-(\omega t+kx-2\alpha_1^-)^2} - C_3^- e^{-(\omega t+kx-2\alpha_1^+)^2} + C_3^+ e^{-(\omega t+kx-2\alpha_1^+-\alpha_2^+-\alpha_2^-)^2} + \\
& + C_3^- e^{-(\omega t+kx-2\alpha_1^- -\alpha_2^- -\alpha_2^+)^2} + D e^{-(\omega t+kx-\alpha_1^+-\alpha_1^-)^2} + C_3^- e^{-(\omega t+kx-\alpha_1^- -\alpha_2^- -\alpha_2^+)^2} - \\
& - D e^{-(\omega t+kx-\alpha_1^- -\alpha_2^- -\alpha_1^+-\alpha_2^+)^2} - C_3^+ e^{-(\omega t+kx-\alpha_2^- -\alpha_1^+-\alpha_2^+)^2}, \\
& t_1 + T < t < 2T,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $A_1^\pm = \pm\dfrac{(1 \pm am)^4}{16a^2m^2}$; $B_3 = \dfrac{(1-a^2m^2)^2}{16a^2m^2}$; $C_3^\pm = \dfrac{(1-a^2m^2)(1 \pm am)^2}{16a^2m^2}$; $D = \dfrac{1-a^4m^4}{16a^2m^2}$.

Вид выражений (8-9) говорит о том, что закономерность расщепления каждой из волн на прямую и обратную при скачкообразном изменении свойств среды действительно имеет место. При этом каждая из вновь образующихся волн при расщеплении «наращивает» набег фазы.

Интересно отметить также, что вид амплитуд в (6-9) позволяет заключить, что при каждом скачкообразном изменении свойств среды каждая волна расщепляется на пару волн с противоположной полярностью.

Заметим также, что как и в случае первичной монохроматической волны, в данном случае преобразование поля гауссова импульса в безграничной магнитодиэлектрической среде при изменении во времени свойств среды по закону прямоугольных импульсов инвариантно относительно изменений проницаемостей (при выполнении в (7, 9) замен $m \to a$, $a \to m$ эти выражения остаются неизменными).

3. Заключение

Получено точное решение задачи преобразования плоского гауссова электромагнитного импульса двойным синхронным возмущением проницаемостей безграничного изотропного магнитодиэлектрического пространства во времени в виде прямоугольного импульса. Показано, что скачкообразное изменение во времени проницаемостей безграничной изотропной магнитодиэлектрической среды приводит к расщеплению каждого из имеющихся в пространстве гауссовых импульсов на прямой и обратный импульсы с противоположными полярностями. Показано также, что образованные таким образом импульсы расплываются в сравнении с импульсами, результатом расщепления которых они явились. Кроме того, удалось получить, что после возвратного скачка параметров среды выражения, описывающие преобразованное поле, инвариантны относительно изменений проницаемостей.

Список литературы: 1. *Слипченко Н.И., Шульга Л.Н., Рыбин О.Н.* Преобразование плоской волны периодически нестационарной диэлектрической средой // ЖТФ. 2001. Т. 71, № 10. С. 123 – 127. 2. *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: НПО Тест-Радио, 1991. 280 с. 3. *Рыбин О.Н.* Нестационарные электромагнитные явления в диссипативном диэлектрике с изменяющимися во времени параметрами: Дисс… канд. физ. – мат. наук: 01.04.03. Харьков, 1999. 4. *Рыбин О.Н., Слипченко Н.И.* Преобразование плоской монохроматической волны импульсно-периодической модуляцией во времени параметров безграничной среды // ЖТФ. 2001. Т. 71, № 7. С. 7 – 13.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 23.05.2003