

# ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН У КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛОСКОМ ЭКРАНЕ

Ю. В. Гандель

Задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в бесконечно тонком идеально проводящем плоском экране посвящено очень большое число работ, библиография которых до 1960 года приведена в работе [1].

Были получены приближенные решения в области как длинных, так и коротких волн.

В настоящей работе доказывается, что рассматриваемая задача может быть сведена, и притом точно, к интегральному уравнению вида

$$g(t) + \frac{i}{\pi} \int_0^t \left\{ \frac{\text{sh } k(t+x)}{t+x} + \frac{\text{sh } k(t-x)}{t-x} \right\} g(x) dx = f(x), \tag{1}$$

которое нужно решать два раза: при двух различных правых частях  $f(x)$ .

Впервые интегральное уравнение (1) появилось в статье Н. И. Ахиезера и А. Н. Ахиезера [2]\*. В этой статье приведена одна система спаренных интегральных уравнений, решение которой сводится к решению уравнения (1), после чего указанные спаренные уравнения применяются для отыскания первого длинноволнового приближения в интересующей нас задаче дифракции электромагнитных волн. Построение дальнейших приближений методом, предложенным в [2], и исследование вопроса сходимости представляют большие трудности. Все эти трудности отпадают, если задача точно сведена к уравнениям вида (1).

Нужно заметить, что скалярная задача дифракции звуковых волн уже была точно сведена к уравнению (1) в статье Н. И. Ахиезера [4], посвященной спаренным интегральным уравнениям.

## 1. Постановка задачи

Экран расположен в плоскости  $xOy$ , отверстие в нем — круг радиуса  $a$  с центром в начале координат.

Пусть при отсутствии отверстия в экране поле в полупространстве  $z < 0$  имеет вид

$$\vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \vec{H}_0 e^{-i\omega t},$$

где

$$\vec{E}_0 = \{2i \sin kz, 0, 0\}, \vec{H}_0 = \left\{0, 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos kz, 0\right\} \tag{2}$$
$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}.$$

\* Недавно уравнение (1) совсем из других соображений, но в связи с родственной задачей дифракции получено в работе [3].

Эта стоячая волна представляет собой сумму падающей и отраженной волн. В полупространстве  $z > 0$  в этом случае поле отсутствует.

Наличие отверстия изменяет поле. Будем искать  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , полагая, что зависимость от времени дается множителем  $e^{-i\omega t}$ , в виде

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 + \vec{E}^- \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{H}^- \end{aligned} \right\} \quad (\text{в полупространстве } z < 0)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^+ \\ \vec{H} &= \vec{H}^+ \end{aligned} \right\} \quad (\text{в полупространстве } z > 0)$$

Поскольку экран предполагается идеально проводящим, то на нем обращается в нуль тангенциальная составляющая электрического поля и нормальная составляющая магнитного поля. Связь между падающим полем и дифрагированным в отверстии мы получим из условия непрерывности полей. Таким образом, приходим к следующим краевым условиям [5]:

$$\left. \begin{aligned} E_x^+(x, y, +0) &= E_y^+(x, y, +0) = \\ &= H_z^+(x, y, +0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} > a), \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} E_z^+(x, y, +0) &= H_x^+(x, y, +0) = 0 \\ H_y^+(x, y, +0) &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } r < a) \quad (4)$$

Поля  $\vec{E}^+(x, y, z)$  и  $\vec{H}^+(x, y, z)$  выражаются через магнитный вектор Герца:

$$\vec{E}^+ = i \operatorname{rot} \vec{\Pi}, \quad \vec{H}^+ = \frac{1}{\omega \mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}. \quad (5)$$

Вектор  $\vec{\Pi}$  ищется в виде [5]:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{M}(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y) - z\gamma} \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}}, \quad (6)$$

где  $\vec{M} = \{M_x, M_y, 0\}$  подлежит определению.

Условие излучения требует, чтобы радикал  $\gamma \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - k^2}$  был взят со знаком плюс, если  $\lambda^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 \geq k^2$ , а при  $\lambda^2 < k^2$  его мнимая часть должна быть отрицательной.

Легко показать, что если в формуле (6) всюду перед радикалом  $\gamma$  поменять знак на противоположный, то она при той же вектор-функции  $\vec{M}(\alpha, \beta)$  представит вектор Герца для полей  $\vec{E}^-$  и  $\vec{H}^-$ .

Выразим две из компонент поля  $\vec{E}^+$ ,  $\vec{H}^+$  через вектор-функцию  $\vec{M}$ :

$$H_z^+(x, y, z) = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y) - z\gamma} d\alpha d\beta; \quad (7)$$

$$E_y^+(x, y, z) = -\frac{i}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} M_x(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y) - z\gamma} d\alpha d\beta, \quad (8)$$

где для краткости положено [2]

$$\Phi(\alpha, \beta) = \alpha M_x(\alpha, \beta) + \beta M_y(\alpha, \beta). \quad (7')$$

Кроме того, введем обозначение [2]

$$\Psi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} M_x(\alpha, \beta). \quad (8')$$

Прежде чем идти дальше, необходимо указать функциональный класс, которому должна принадлежать искомая вектор-функция  $\vec{M}$ . Это должно быть сделано на основании физических соображений. Мы их приведем несколько ниже, а здесь сформулируем результат. Функции  $\Phi(\alpha, \beta)$  и  $\Psi(\alpha, \beta)$  должны удовлетворять соотношениям

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{|\gamma|} < \infty, \quad (9)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} |\beta \Psi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{|\gamma|} < \infty. \quad (10)$$

Благодаря этому требованию правые части формул (7), (8) имеют пределы при  $z \rightarrow +0$  и, учитывая условия (3), (4), мы приходим к выводу, что должны иметь место следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta &= 0 \\ \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, \beta) \beta e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta &= 0 \end{aligned} \right\} (r > a) \quad (11)$$

$$(12)$$

Эти интегралы, подобно аналогичным дальнейшим, рассматриваются как результат предельного перехода  $z \rightarrow +0$ .

Дальнейшие уравнения для определения вектор-функции  $\vec{M}(\alpha, \beta)$  получаются аналогично и имеют следующий вид:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \alpha \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = k^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} M_x e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma}; \quad (13)$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \beta \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = k^2 \iint_{-\infty}^{+\infty} M_y e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} - 4\pi^2 k; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, \beta) (\alpha^2 + \beta^2) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = \\ & = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \Phi(\alpha, \beta)}{\beta} e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} \quad (\text{при } r < a) \end{aligned} \quad (15)$$

Сведением системы спаренных интегральных уравнений (11, 12), (13, 14, 15) к уравнениям Фредгольма мы займемся в следующих параграфах.

Обратимся теперь к обоснованию условий (9), (10), а именно, покажем, что эти условия выражают конечность энергии. Следовательно, они эквивалентны обычно вводимым условиям Майкснера [6]. В связи с этим

заметим, что из (7), (8) в силу равенства Парсеваля следуют соотношения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_z^+(x, y, z)|^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2 \omega^2 \mu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 e^{-z(\gamma+i)} d\alpha d\beta;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_z^+(x, y, z)|^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |M_x(\alpha, \beta)|^2 e^{-z(\gamma+i)} d\alpha d\beta.$$

Отсюда, интегрируя по  $z$  от 0 до  $\infty$  и замечая, что  $\gamma + i = 0$  при  $\alpha^2 + \beta^2 < k^2$ , получаем

$$\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} |H_z^+(x, y, z)|^2 dx dy = \frac{k}{4\pi^2 \omega^2 \mu^2} \int_{\alpha^2 + \beta^2 < k^2} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2 \omega^2 \mu^2} \int_{\alpha^2 + \beta^2 > k^2} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} d\alpha d\beta;$$

$$\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} |E_z^+(x, y, z)|^2 dx dy = \frac{k}{4\pi^2} \int_{\alpha^2 + \beta^2 < k^2} |M_x(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta +$$

$$+ \frac{1}{8\pi^2} \int_{\alpha^2 + \beta^2 > k^2} |M_x(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}.$$

Вспомянув выражение для энергии электромагнитного поля, мы убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Заметим теперь, что в [2] вместо наших условий (9), (10) приняты другие условия, заменяющие требования Майкснера, а именно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\alpha, \beta)|^p d\alpha d\beta < \infty, \quad (9')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\beta \Psi(\alpha, \beta)|^p d\alpha d\beta < \infty, \quad (10')$$

где число  $p > 2$  сколь угодно близко к 2.

Покажем теперь, что из этих последних условий вытекают условия (9), (10).

Пусть, например, выполнено условие (9'). Чтобы получить (9), докажем, что при достаточно большом  $R$

$$\iint_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{\lambda} < \infty,$$

где область  $(R)$  есть внешность круга радиуса  $R$  с центром  $\alpha = \beta = 0$ . Воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\iint_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^2 \frac{d\alpha d\beta}{\lambda} \leq \left[ \iint_{(R)} |\Phi(\alpha, \beta)|^p d\alpha d\beta \right]^{\frac{2}{p-2}} \times$$

$$\times \left[ \iint_{(R)} \frac{d\alpha d\beta}{\lambda^{\frac{2}{p-2}}} \right]^{\frac{p-2}{p}}.$$

Если только  $2 < p < 4$ , то из справедливости (9') при любом сколь угодно близком к 2, но большем его  $p$  неравенство (9) также будет справедливо.

## 2. Сведение задачи к решению системы спаренных интегральных уравнений специального вида

Примем как известный факт, что рассматриваемая нами краевая задача имеет единственное решение при условиях (9), (10), равносильных условиям Майкснера.

Наша задача состоит в нахождении решения, точнее говоря, в построении уравнений, удобных для решения.

Воспользуемся единственностью решения следующим образом: заменим во всех уравнениях (11, 12), (13—15)  $x$  на  $-x$ , а затем заменим переменную интегрирования  $\alpha$  на  $-\alpha$ . Из рассмотрения получающихся таким образом уравнений благодаря единственности решения можно заключить, что

$$\Phi(-\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta), \quad \Psi(-\alpha, \beta) = -\Psi(\alpha, \beta).$$

Аналогично получим равенства

$$\Phi(\alpha, -\beta) = -\Phi(\alpha, \beta), \quad \Psi(\alpha, -\beta) = \Psi(\alpha, \beta).$$

Этим соотношениям можно удовлетворить, полагая

$$\Phi(\alpha, \beta) = \beta E(\lambda), \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha D(\lambda).$$

Сделав предположение, покажем, что оно приведет нас к решению, после чего остается снова воспользоваться единственностью.

Мы можем положить

$$E(\lambda) = C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda),$$

так что, благодаря соотношениям (7'), (8'),

$$M_x = \alpha \beta D(\lambda), \quad M_y = C(\lambda) + \beta^2 D(\lambda) \quad (16)$$

$$\Phi(\alpha, \beta) = \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)], \quad \Psi(\alpha, \beta) = \alpha D(\lambda). \quad (17)$$

После подстановки выражений (16), (17) в систему уравнений (11, 12), (13—15) приходим к следующим уравнениям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = 0 \quad (r < a); \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta \left[ \frac{C(\lambda)}{\gamma} + \gamma D(\lambda) \right] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r < a); \quad (19)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a); \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^2 \gamma D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\gamma} C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta - 4\pi^2 k \quad (r < a); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a), \quad (22)$$

которые после несложных преобразований приводятся к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha C(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} \frac{d\alpha d\beta}{\gamma} = 0 \quad (r < a); \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta \gamma D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r < a); \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \beta D(\lambda) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a); \quad (25)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma [C(\lambda) + \beta^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = -4\pi^2 k \quad (r < a); \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a). \quad (27)$$

Вводя в плоскости  $\alpha, \beta$  полярные координаты  $\lambda, \psi$ , мы сможем во всех двойных интегралах выполнить интегрирование по полярному углу, после чего останутся простые интегралы.

Уравнения (24), (25) непосредственно приводятся к виду

$$\int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^3 J_2(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = A J_2(kr) \quad (r < a); \quad (28)$$

$$\int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^3 J_2(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a). \quad (29)$$

С помощью (25) приведем (27) к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta = 0 \quad (r > a), \quad (30)$$

откуда

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a). \quad (31)$$

После ряда преобразований из (27) и (23) получим

$$\int_0^{\infty} \lambda \left[ C(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} D(\lambda) \right] J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = \frac{2\pi}{k} + \frac{A}{2} J_0(kr) \quad (r < a); \quad (32)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda^2 C(\lambda) J_1(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = 0 \quad (r < a). \quad (33)$$

Можно показать, что (32) является следствием остальных уравнений при условии, что

$$\int_0^{\infty} \lambda \left[ C(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} D(\lambda) \right] \frac{d\lambda}{\gamma} = \frac{2\pi}{k} + \frac{A}{2}. \quad (34)$$

Таким образом, мы получили два спаренных интегральных уравнения для определения функций  $D(\lambda)$  и  $C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)$ :

$$(I) \begin{cases} \int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^2 J_2(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = A J_2(kr) & (r < a); \\ \int_0^{\infty} D(\lambda) \lambda^3 J_2(\lambda r) d\lambda = 0 & (r > a); \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda^2 [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] J_1(\lambda r) \frac{d\lambda}{\gamma} = A k J_1(kr) & (r < a); \\ \int_0^{\infty} \lambda^2 [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = 0 & (r > a). \end{cases}$$

Константу  $A$ , которая появилась при интегрировании, можно найти из условия (34). Остается преобразовать неравенства, выражающие условие Майкснера. Это легко приводит к следующему результату:

$$\int_N^{\infty} |C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)|^2 \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} < \infty, \quad (35)$$

$$\int_N^{\infty} |\lambda^2 D(\lambda)|^2 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} < \infty.$$

Эти условия будут удовлетворены, если, как отмечалось выше, при  $\rho > 2$

$$\int_0^{\infty} |\lambda [C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)]|^{\rho} \lambda d\lambda < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} |\lambda^2 D(\lambda)|^{\rho} \lambda d\lambda < \infty.$$

Однако мы примем условия (35).

### 3. Интегральные уравнения Фредгольма для рассматриваемой задачи

Спаренные уравнения (I) и (II) могут быть сведены к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с вещественным симметричным ядром и чисто мнимым параметром. Этот вопрос подробно рассмотрен в статье [4], где изучаются также и более общие спаренные уравнения. Для удобства мы приведем здесь формулировку\* нужной нам теоремы из статей [2] и [4].

\* Здесь внесено лишь одно изменение, а именно: в статье [2] вместо условия (36) требуется, чтобы при любом

$$\int_0^{\infty} |\tilde{\gamma}(\lambda) \lambda^m|^{\rho} \lambda d\lambda < \infty.$$

Даны спаренные уравнения

$$\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} d\lambda = 0 \quad (r > a);$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) J_m(\lambda r) \lambda^{m+1} \frac{d\lambda}{\gamma} = F(r) r^m \quad (0 \leq r < a),$$

где  $m (\geq 0)$  целое число,  $\gamma$  определено, как выше,  $F(r)$  ( $0 \leq r \leq a$ ) — гладкая функция.

Ищется решение  $\varphi(\lambda)$ , удовлетворяющее условию

$$\int_0^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 \lambda^{2m} d\lambda < \infty. \quad (36)$$

Это решение единственно и имеет вид

$$\varphi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g(t) \cos(t\lambda) dt,$$

где  $g(t)$  есть решение уравнения

$$g(t) + \frac{t}{\pi} \int_0^a \left[ \frac{\operatorname{sh} k(t+x)}{t+x} + \frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x} \right] g(x) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t r f(r) \frac{\operatorname{ch}(k\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}} dr,$$

и  $f(r)$  находится при помощи квадратур по формуле

$$\left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^m f(r) = (-1)^m F(r),$$

а произвольные постоянные в составе  $f(r)$  однозначно определяются из условия, чтобы функция  $\varphi(\lambda)$  удовлетворяла соотношению (36).

Для пояснения заметим, что неравенство (36) при заданном  $m$  требует определенной гладкости функции  $g(t)$  и удовлетворения некоторым условиям ею и ее производными до определенного порядка на концах интервала  $[0, a]$ . Для этого и нужны произвольные постоянные в составе  $f(r)$ . Если  $m=0$ , то, конечно, никаких постоянных не будет, но и условие (36) будет выполнено автоматически.

При  $m=1$  условие (36) будет выполнено, если потребовать, чтобы

$$g(a) = 0.$$

Ниже мы на этом еще остановимся.

Для системы (1) функция  $f(r)$ , входящая в правую часть интегрального уравнения, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 f(r) = A \frac{J_2(kr)}{r^2},$$

которое дает для  $f(r)$  следующее выражение:

$$f(r) = A \left[ \frac{J_0(kr)}{k} + B_1 r^2 + B_2 \right];$$

возникшие здесь постоянные интегрирования  $B_1$  и  $B_2$  должны быть найдены из условия

$$\int_0^{\infty} |D(\lambda) \lambda^2|^2 d\lambda < \infty.$$

Как это сделать, мы укажем ниже.

Для вычисления правой части интегрального уравнения воспользуемся вторым определенным интегралом Сонина [7]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\mu}(z \sin \theta) J_{\nu}(\zeta \cos \theta) \sin^{\mu+1} \theta \cos^{\nu+1} \theta d\theta = \\ = \frac{z^{\mu} \zeta^{\nu} J_{\mu+\nu+1}(\sqrt{z^2 + \zeta^2})}{(\sqrt{z^2 + \zeta^2})^{\mu+\nu+1}} \quad (\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re} \nu > -1). \end{aligned}$$

Полагая  $\mu = 0$ ,  $\nu = -1/2$ ,  $\zeta = ikt$ , получаем

$$\int_0^t r J_0\left(\frac{z}{t} r\right) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = t \frac{\sin \sqrt{z^2 - (kt)^2}}{\sqrt{z^2 - (kt)^2}}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при  $z \rightarrow kt$ , будем иметь

$$\int_0^t r J_0(kr) \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr = t.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \int_0^t r \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr &= \frac{\operatorname{sh} kt}{k}, \\ \int_0^t r^2 \frac{\operatorname{ch} k \sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr &= \frac{2}{k^2} t \operatorname{ch} kt - \frac{2}{k^2} \operatorname{sh} kt. \end{aligned}$$

Окончательно получаем следующий результат. Решение системы (I) имеет вид

$$D(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g_1(t) \cos(t\gamma) dt,$$

где  $g_1(t)$  подлежит определению из интегрального уравнения с вещественным симметричным ядром

$$\begin{aligned} g_1(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x} g_1(x) dx = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{k} [1 + B_1 \operatorname{ch} kt + 2B_2 t \operatorname{sh} kt]. \end{aligned}$$

Аналогично для системы (II) будем иметь

$$C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a g_2(\lambda) \cos(t\gamma) dt,$$

где  $g_2(t)$  подлежит определению из уравнения

$$g_2(t) + \frac{i}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{sh} k(t-x)}{t-x} g_2(x) dx = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} kA [1 + B \operatorname{ch} kt],$$

а постоянная  $B$  может быть найдена из условия

$$\int_0^{\infty} |[C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda)] \lambda|^2 d\lambda < \infty. \quad (37)$$

Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$C(\lambda) + \lambda^2 D(\lambda) = \frac{\sin \gamma a}{\gamma} g_2(a) - \int_0^a g_2'(t) \frac{\sin \gamma t}{\gamma} dt,$$

где  $\gamma = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$  и для выполнения (37) достаточно положить  $g_2(a) = 0$ . Это условие и даст возможность вычислить  $B$ .

Аналогично находим, что для определения постоянных  $B_1$  и  $B_2$  нужно потребовать  $g_1(a) = g_1'(a) = 0$ .

Подробным расчетом дифрагированного поля на основе изложенного здесь метода мы предполагаем заняться в следующей статье.

В заключение автор выражает благодарность Н. И. Ахиезеру за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. W. H. Eggmann. Higher — Order Evaluation of Electromagnetic Diffraction by Circular Disks. IRE trans. on microwave theory and techn., September (1961).
2. Н. И. Ахиезер и А. Н. Ахиезер. К задаче о дифракции электромагнитных волн у кругового отверстия в плоском экране. ДАН СССР, 109 (1956).
3. A. E. Heins. Function — theoretic Aspects of Diffraction Theory. Electromagnetic Waves, Madison, 1962.
4. Н. И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. Зап. матем. отд. физ.-матем. ф-та ХГУ и Харьк. матем. об-ва, т. XXV (1957).
5. K. Westphal. Zur strengen Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an ebenen Schirmen allgemeiner Gestalt. Zs. Phys., 141, 3 (1955).
6. I. Meixner. Die Kantenbedingungen in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitender ebenen Schirmen. Ann. Phys. B. 6, s. 2 (1949).
7. Уиттекер, Ватсон. Курс современного анализа, ч. II, М., 1963.