

УДК 621.372

П.Е. МИНҚО, А. Г. НЕРУХ, канд. физ.-мат. наук

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ МЕЖДУ РАСЩЕПИВШИМИСЯ
ВОЛНАМИ ПРИ РЕЗКОМ ИЗМЕНЕНИИ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ**

При измерении энергетических параметров электромагнитных колебаний возможны ситуации, в которых среда, заполняющая высокочастотные тракты, испытывает изменения во времени, влияние которых на процесс измерения должно быть учтено.

Для исследования происходящих при этом преобразований электромагнитного поля представляет интерес модельная задача о прохождении электромагнитной волны в среду, параметры которой изменяются во времени. В качестве среды рассматривается холодная изотропная плазма. Концентрация плазмы является ступенчатой функцией времени. Исследование такого нестационарного явления

описывается смешанной краевой задачей. Данную задачу представляется целесообразно решать с помощью интегральных уравнений макроскопической электродинамики [1]. Решение таких интегральных уравнений производится с помощью метода резольвенты.

В случае нормального падения электромагнитной волны $E_0(t, x)$ на плоскую границу плазмы, занимающей полупространство $x \geq 0$, согласно методу интегральных уравнений макроскопической электродинамики [1] как прошедшее, так и отраженное поле удовлетворяют соотношению [2]

$$E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{2\pi}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t', x, x') \chi(x') P(t', x') dx', \quad (1)$$

где $\Gamma(t, t', x, x') = \theta\left(t - t' - \frac{|x - x'|}{c}\right)$, $P(t, x)$ — электрическая поляризация среды.

Пусть плазма, отсутствующая до нулевого момента времени, образуется в результате действия сторонних источников. Плазма характеризуется плазменной частотой ω_{e1} , которая в определенные промежутки времени испытывает скачки. Подобная задача об одном скачке плазменной частоты рассматривалась в работе [3]. В общем случае изотропной среды с учетом конечной скорости распространения взаимодействия связь между поляризацией и полем запишем следующим образом:

$$P(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, t', x, x') \Gamma(t, t', x, x') E(t', x') dx', \quad (2)$$

где $\alpha(t, t', x, x')$ — поляризуемость среды. Для холодной изотропной плазмы в простейшем случае нестационарности поляризация описывается выражением [4]

$$\alpha(t, t', x, x') = \frac{\omega_e^2(t')}{4\pi} (t - t') \delta(x - x'). \quad (3)$$

После нулевого момента времени в силу свойств функции $\Gamma(t, t', x, x')$ выделяется два временных интервала, в которых уравнения для поля с учетом вида поляризации (2) и поляризуемости (3) имеют разный вид

$$E_{1,2}(t, x) = E_0(t, x) - \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t', x, x') \chi_{1,2}(x') \omega_e^2(t') E_{1,2}(t', x') dx'. \quad (4)$$

Индекс 1 соответствует временному интервалу $0 < t < \frac{x}{c}$, в котором возмущение, распространяющееся со скоростью света из точки наблюдения x , не успевает достичь границы среды. В этом случае влияние краевых эффектов еще не сказывается, и все члены урав-

нения определены именно в данной области ($0 < t < \frac{x}{c}$). Это эквивалентно тому, что $\chi_1(x) = 1$. Решение задачи в таком временном интервале соответствует определению поля в безграничной среде.

Индекс 2 соответствует временному интервалу $t \geq \frac{x}{c}$, в котором возмущение достигло границы плазмы и начинают сказываться краевые эффекты. В этом интервале $\chi_2(x) = \Theta(x)$. Пространственно-временная картина рассматриваемой задачи представлена на рис. 1. Здесь A — точка наблюдения с координатами (t, x) , а линии характеристик задаются уравнениями

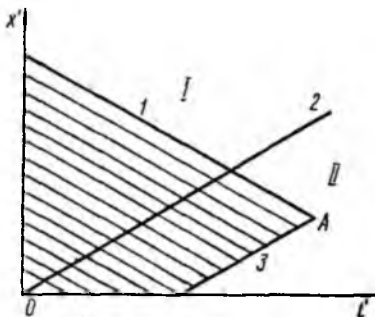


Рис. 1

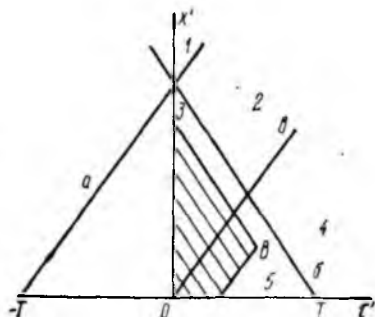


Рис. 2

1 : $x' = -ct' + ct + x$; 2 : $x' = ct'$; 3 : $x' = ct' - ct + x$. Уравнение (4), описывающее нестационарную дифракцию электромагнитных волн, запишем в операторном виде $E(x) = F(x) + \hat{K}E(x)$ (5), где интегральный оператор $\hat{K}$ является суперпозицией операторов $\hat{K} = \hat{\Gamma}\hat{V}$, в которой $\hat{\Gamma} = \int dx' \langle x | \hat{\Gamma} | x' \rangle$; $\hat{V} = -\omega_e^2(t')\Theta(x')$. Здесь введены скобочные обозначения для матричных элементов оператора в координатном представлении, вектор $x = (t, x)$ и интегрирование производится по полупространству $0 < t < \infty$; $-\infty < x < \infty$.

В рассматриваемой задаче оператор $\hat{K}$ является оператором Вольтерра, и следовательно, уравнение (5) — двумерное уравнение Вольтерра II рода. Как известно, такое уравнение допускает построение решения с помощью резольвенты $\hat{R}: E = F + \hat{R}F$ (6), которая удовлетворяет операторному уравнению с таким же ядром, как и в (5) $\hat{R} = \hat{K} + \hat{K}\hat{R}$ (7).

Таким образом, решение задачи нестационарной дифракции сводится к построению резольвенты, удовлетворяющей уравнению (7).

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда в новом состоянии плазмы ее частота $\omega_{e1} = \text{const}$. В первом временном интервале $0 < t < \frac{x}{c}$, в котором еще не сказываются краевые эффекты, оператор, характеризующий состояние среды, $\hat{V} = -\omega_{e1}^2$. Постро-

ение резольвенты удобно производить в импульсном представлении Фурье-Лапласа. Уравнение для резольвенты (7) в представлении Фурье-Лапласа имеет вид

$$\langle \vec{p} | \hat{R}_1 | \vec{p}' \rangle - \int d\vec{p}_1 \langle \vec{p} | \hat{K}_1 | \vec{p}_1 \rangle \langle \vec{p}_1 | \hat{R}_1 | \vec{p}' \rangle = \langle \vec{p} | \hat{K}_1 | \vec{p}' \rangle, \quad (8)$$

где ядро $\hat{K}_1$ представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | \hat{K}_1 | \vec{p}' \rangle &= \int d\vec{p}_1 \langle \vec{p} | \Gamma | \vec{p}_1 \rangle \langle \vec{p}_1 | V | \vec{p}' \rangle = \\ &= -\omega_{e1}^2 \frac{2\pi\delta(s-s')}{(p^2 + c^2 + s^2)(p-p')}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\text{Re} p > \text{Re} p_1 > \text{Re} p'$; p — комплексная; s — действительная переменная. Подставив (9) в (8) и выполнив все интегрирования с учетом аналитичности резольвенты $\hat{R}_1$, найдем

$$\langle \vec{p} | \hat{R}_1 | \vec{p}' \rangle = \omega_{e1}^2 \frac{2\pi\delta(s-s')}{(p-p')(p^2 + c^2s^2 + \omega_{e1}^2)}. \quad (10)$$

Переходя от импульсного представления резольвенты $\hat{R}_1$ к пространственно-временному, получим

$$\langle \vec{x} | \hat{R}_1 | \vec{x}' \rangle = -\frac{\omega_{e1}^2}{2c} \Gamma(t, t', x, x') J_0 \left(\omega_{e1} \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{c^2}} \right). \quad (11)$$

При построении резольвенты $\hat{R}_2$ во втором временном интервале $t \geq \frac{x}{c}$ (рис. 1) необходимо учитывать, что ядро уравнения (5) имеет более сложный вид $\langle \vec{x} | \hat{K}_2 | \vec{x}' \rangle = \Theta(x) \Gamma V \Theta(x')$, так как учитывает наличие границы среды с помощью характеристической функции $\chi_2(x) = \Theta(x)$. Ядро $\hat{K}_2$ в импульсном представлении описывается выражением

$$\langle \vec{p} | \hat{K}_2 | \vec{p}' \rangle = \frac{\omega_{e1}^2}{p-p'} \left[\frac{i}{(p^2 + c^2s^2)(s-s'-i0)} + \frac{c}{2p(p-ics)(p-ics')} \right]. \quad (12)$$

Исходя из вида ядра $\hat{K}_2$ и аналогии резольвенты $\hat{R}_1$ с ядром $\hat{K}_1$, резольвенту $\hat{R}_2$ ищем в виде

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | \hat{R}_2 | \vec{p}' \rangle &= \frac{\omega_{e1}^2}{p-p'} \left\{ \frac{i}{(p^2 + c^2s^2 + \omega_{e1}^2)(s-s'-i0)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{2\varphi(\varphi-ics')} \left[\frac{1}{\varphi-ics} + \frac{R(p)}{\varphi+ics} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varphi = \sqrt{p^2 + \omega_{e1}^2}$; $R(p)$ — коэффициент, подлежащий определению. Подставив (12), (13) в (7), найдем, что резольвента $\hat{R}_2$ удовлетворяет этому уравнению, если

$$R(p) = \frac{p-\varphi}{p-\varphi}. \quad (14)$$

Следует отметить аналогию этого выражения с коэффициентом отражения электромагнитной волны частоты ω от плоской границы плазмы, который, как известно, определяется выражением

$$R(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{e1}^2} - \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{e1}^2} + \omega}. \quad (15)$$

Если в этом выражении перейти от переменной преобразования Фурье к переменной преобразования Лапласа $p = -i\omega$ и учесть, что отражение происходит от стороны плазмы, для чего необходимо взять $R(\omega)$ с противоположным знаком, то найдем, что (15) переходит в (14).

В координатном представлении резольвента $\hat{R}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | \hat{R}_2 | \vec{x}' \rangle = & -\frac{\omega_{e1}^2}{2c} \Gamma(t, t', x, x') J_0 \left(\omega_{e1} \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{c^2}} \right) \theta(x') - \\ & - \frac{\omega_{e1}^2}{2c} \frac{t-t' - \frac{x+x'}{c}}{t-t' + \frac{x+x'}{c}} \theta \left(t-t' - \frac{x+x'}{c} \right) J_2 \left(\omega_{e1} \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x+x')^2}{c^2}} \right) \times \\ & \times \theta(x) \theta(x'). \end{aligned} \quad (16)$$

Так как резольвента $\hat{R}_1$ входит в $\hat{R}_2$, это позволяет с помощью резольвенты $\hat{R}_2$ находить поле в любой точке рассматриваемой области.

Рассмотрим теперь серию двух скачков плазменной частоты, когда через промежуток времени T плазменная частота изменяется от ω_{e1} до ω_{e2} , т. е. при $t \geq 0$ имеем $\omega_p^2(t) = \omega_{e1}^2 \theta(T-t) + \omega_{e2}^2 \theta(t-T)$. Тогда уравнение (5) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} E(t, x) = E_0(t, x) - \frac{\omega_{e1}^2}{2c} \int_0^T dt' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t', x, x') \chi(x') E(t', x') dx' - \\ - \frac{\omega_{e2}^2}{2c} \int_T^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t', x, x') \chi(x') E(t', x') dx'. \end{aligned} \quad (17)$$

Поле $E(t, x)$, входящее в первое интегральное слагаемое, определяется с помощью резольвенты (16). Поэтому этот интеграл можно отнести к свободному члену

$$F(t, x) = E_0(t, x) - \frac{\omega_{e1}^2}{2c} \int_0^T dt' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, t', x, x') \chi(x') E(t', x') dx'. \quad (18)$$

Если произвести преобразование начала отсчета времени $t = \tau + T$; $t' = \tau' + T$ (19), то уравнение (17) примет вид

$$E(\tau, x) = F(\tau, x) - \frac{\omega_{e2}^2}{2c} \int_0^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau, \tau', x, x') \chi(x') E(\tau', x') dx'. \quad (20)$$

Полученное уравнение аналогично уравнению (5), отличаясь от него свободным членом $F(\tau, x)$ и постоянным множителем ω_{e2} . Так как ядра этих уравнений совпадают, решение уравнения (20) определится резольвентой (16), если в ней заменить ω_{e1} на ω_{e2} . Использование описанного алгоритма решения задачи дает возможность учесть любое количество скачков плазменной частоты, не накладывая ограничения на время T , в течение которого частота остается постоянной.

Исходя из этого без потери общности можно считать, что до нулевого момента времени плазма отсутствовала, т. е. $\omega_{e0} = 0$ при $t < 0$, что и оправдывает предположение об образовании плазмы в нулевой момент времени. Используем построенный алгоритм для исследования структуры прошедшего в плазму поля при скачкообразном изменении во времени концентрации плазмы. Пусть падающее поле $E_0(t, x)$ является плоской волной с частотой ω и волновым числом $\frac{\omega}{c}$. С помощью резольвенты $\bar{R}_1$ (11) определим поле в первом временном интервале $0 < t < \frac{x}{c}$, в котором еще не сказывается влияние границы

$$E_1(t, x) = \left[\frac{\omega_1 + \omega}{2\omega_1} e^{i\omega_1 t} + \frac{\omega_1 - \omega}{2\omega_1} e^{-i\omega_1 t} \right] e^{-i\frac{\omega}{c}x} \quad (21)$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 + \omega_{e1}^2}.$$

Как видно из этого выражения, после образования плазмы падающее поле расщепляется на две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях. Эти волны имеют такое же волновое число $\frac{\omega}{c}$, как и падающая волна, но в отличие от нее имеют другую частоту ω_1 , которая определяется как частотой падающего поля ω , так и плазменной частотой ω_{e1} . Амплитуды прошедших волн также зависят от частоты падающего поля ω и плазменной частоты ω_{e1} . Эти результаты совпадают с аналогичными результатами работы [5].

Во втором временном интервале $t \geq \frac{x}{c}$, в котором уже сказывается влияние границы, поле определяется с помощью резольвенты $\bar{R}_2$ (16) и имеет вид

$$E_2(t, x) = E_1(t, x) + \omega_{e1}^2 \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} dp \frac{(p+i\omega) e^{pt - \frac{\omega}{c}x}}{(p-i\omega)(p^2 + \omega_1^2)\varphi}. \quad (22)$$

Если контурный интеграл в этом выражении представить в виде свертки, то выражение для поля $E_2(t, x)$ запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} E_2(t, x) = & E_1(t, x) - (ic) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t dt' \theta\left(t - t' - \frac{x}{c}\right) \times \\ & \times J_0\left(\omega_{e1} \sqrt{(t-t')^2 - \frac{x^2}{c^2}}\right) \times \\ & \times \left[2\omega e^{i\omega t'} - \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2\omega_1} e^{i\omega_1 t'} - \frac{(\omega_1 - \omega)^2}{2\omega_1} e^{-i\omega_1 t'} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Отсюда следует, что во втором временном интервале, в котором уже сказывается влияние границы среды, структура поля $E_2(t, x)$ состоит из двух слагаемых. Первое представляет собой переходящее из предыдущего интервала $(0 < t < \frac{x}{c})$ поле $E_1(t, x)$, а второе обусловлено непосредственно влиянием границы среды.

Рассмотрим случай двух скачков плазменной частоты, когда через некоторый промежуток времени T плазменная частота вновь изменила свое значение до ω_{e2} . При $0 < t < T$ прошедшее поле $E(t, x)$ определяется выражениями (21), (23), что позволяет определить новый свободный член $F(t, x)$ (18) уравнения (20). В формулу для свободного члена $F(t, x)$ входят поля E_1 , E_2 , определяемые разными выражениями. Поэтому вид свободного члена $F(t, x)$ зависит от того, к какой из зон, указанных на рис. 2, принадлежит точка наблюдения B с координатами (τ, x) . Здесь линии характеристик задаются уравнениями $a : x' = c\tau' + cT$; $b : x' = -c\tau + cT$; $v : x' = c\tau$. Так в зонах 1—3, в которых еще не начали сказываться краевые эффекты, свободные члены $F_1 - F_3$ связаны между собой следующей цепочкой соотношений

$$\begin{aligned}
 F_1(\tau, x) &= [(\omega_1 + \omega)^2 e^{i\omega_1 T} - (\omega_1 - \omega)^2 e^{-i\omega_1 T}] \frac{e^{i\omega\tau - i\frac{\omega}{c}x}}{4\omega_1\omega} \times \\
 &\quad \times [e^{-i\omega_1 T} - e^{i\omega_1 T}] \frac{\omega_{e1}^2}{4\omega_1\omega} e^{-i\omega\tau - i\frac{\omega}{c}x}; \\
 F_2(\tau, x) &= F_1(\tau, x) + \frac{\omega_{e1}^2}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d\rho \frac{(p+i\omega) e^{pT - \varphi(\tau - \frac{x}{c})}}{(p-i\omega)(p^2 + \omega_1^2)\varphi}; \\
 F_3(\tau, x) &= F_2(\tau, x) + \frac{\omega_{e1}^2}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d\rho \frac{(p-\varphi)(p+i\omega) e^{pT - \varphi(\tau + \frac{x}{c})}}{(p+\varphi)(p-i\omega)(p^2 + \omega_1^2)\varphi}. \quad (24)
 \end{aligned}$$

В области, в которой присутствует влияние границы, выделяются зоны 4, 5, в которых свободный член имеет вид

$$\begin{aligned}
 F_4(\tau, x) &= F_1(\tau, x) - I_1; \\
 F_5(\tau, x) &= F_4(\tau, x) + F_3(\tau, x) - F_2(\tau, x), \quad (25)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left[\frac{(\omega_1 + \omega)^2}{4\omega_1\omega} e^{i\omega_1 T} - \frac{(\omega_1 - \omega)^2}{4\omega_1\omega} e^{-i\omega_1 T} - e^{i\omega T} \right] - \\
 &\quad - \frac{\omega_{e1}^2}{2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} d\rho \frac{(p+i\omega) e^{pT}}{(p-i\omega)(p^2 + \omega_1^2)\varphi}.
 \end{aligned}$$

По найденному свободному члену $F(\tau, x)$ с помощью резольвенты $\bar{R}_2$ определяется поле после второго скачка плазменной частоты. Так,

в зоне 1 поле, определяемое с помощью резольвенты $\hat{R}_1$, описывается выражением

$$E_1^{(1)}(t, x) = [(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 + \omega)e^{i(\omega_1 - \omega_2)T} - (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega)]e^{i(\omega_1 - \omega_2)T} e^{\frac{i\omega_2 t - i\frac{\omega}{c}x}{4\omega_1\omega_2}} + [(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega)e^{-i(\omega_1 - \omega_2)T} - (\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega)e^{i(\omega_1 + \omega_2)T}] \times e^{\frac{-i\omega_2 t - i\frac{\omega}{c}x}{4\omega_1\omega_2}}. \quad (26)$$

Здесь $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + \omega_{e2}^2}$.

Как и до момента времени T , поле в зоне 1 состоит из двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях. При этом волновое число сохраняется, совпадая с волновым числом падающего поля, а частота ω_2 определяется новым значением плазменной частоты ω_{e2} . Амплитуды прошедших волн зависят как от значений плазменной частоты ω_{e1} , ω_{e2} , так и от времени T . Следует отметить, что в предельных случаях как при $T = 0$, так и при $\omega_{e1} = \omega_{e2}$ поле $E_1^{(1)}(t, x)$ совпадает с выражением для поля $E_1(t, x)$, определяемым формулой (21).

В зонах 4, 5, в которых уже учитывается влияние границы, поля определяются с помощью резольвенты $\hat{R}_2$ (16) по свободным членам F_4 , F_5 . Например, в зоне 5 поле равно $E_2^{(5)} = E_2^{(4)} + E_1^{(3)} + E_1^{(2)} + I_2$, где

$$I_2 = \frac{\omega_{e1}^2 \omega_{e2}^2}{4} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} dp_1 \frac{(p_1 - \varphi_1) e^{\frac{p_1(t-T) - \varphi_1 x}{c}}}{\varphi_1(p_1 + \varphi_1)} \times \int_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} dp_2 \frac{(p_2 - \varphi_2)(p_2 + i\omega) e^{p_2 T}}{\varphi_2^2(p_1^2 + \omega_1^2)(p_2 - i\omega)(p_2 + \varphi_2)(p_1 + \varphi_2)(\varphi_1 + \omega_2)}.$$

Продолжая предложенный алгоритм, можно получить выражения для прошедшего поля после любого числа скачков плазменной частоты. Существенно, что алгоритм не зависит от вида падающего поля. Это имеет важное значение для задач, исследующих различные виды источников поля.

Список литературы: 1. Хижняк Н. А. Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред // Журн. техн. физики. 1958. 28. № 7. С. 1592—1609. 2. Нерух А. Г. Рассеяние электромагнитных волн плазменным полупространством после начала его движения // Журн. техн. физики. 1984. 54. № 2. С. 216—226. 3. Борисов В. В. Преобразование электромагнитного поля при изменении свойств среды со временем в ограниченной области // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. 25. № 9. С. 1053—1059. 4. Тыжненко А. Г., Хижняк Н. А. Рассеяние волн на плазменном эллипсоиде с переменной концентрацией плазмы // Радиотехника и электроника. 1973. Т 18. № 1. С. 19—25. 5. Fante R. L. Transmission of electromagnetic waves into time-varying media // IEEE. Trans. on Anten and Propag. 1971. v. AP—19. № 3. P. 417—424.

Поступила в редколлегию 09.02.87