

*В. Л. КОЛЯДИН***СИНТЕЗ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ В ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ РАДИОСИСТЕМАХ**

Значительная часть измерительных радиосистем (ИРС) предназначена для решения задач, которые можно классифицировать как обратные задачи математической физики. К указанным системам относятся различные радиолокационные комплексы, ориентированные на восстановление первичных полей физических объектов по результатам измерения их полей рассеяния [1], а также многоканальные радиометрические системы (радиотелескопы), применяемые в радиоастрономии [2]. В силу некорректности решаемых с их помощью задач широкое распространение получили алгоритмы обработки пространственно-временных сигналов, синтезированные в рамках концепции регуляризирующего оператора Тихонова [3]. Одной из основных трудностей при их практической реализации является выбор параметра регуляризации, существенно влияющий на конечный результат измерения. С другой стороны, согласно теории статистических решений, следует использовать наряду с процедурой получения решения методы определения степени его достоверности, что обычно упускается из вида при синтезе алгоритмов обработки информации в ИРС. Исследуем возможность синтеза процедур обработки радиосигналов в ИРС, позволяющих получить регуляризованное решение обратной задачи с установленным уровнем достоверности, что обеспечивается соответствующим методом выбора параметра регуляризации.

Рассматриваемая задача в общем виде формулируется как задача решения операторного уравнения

$$Au_n + \vec{n} = \vec{f}; \quad u_n \in U_n; \quad \vec{n}, \vec{f} \in C_m, \quad (1)$$

где $\mathcal{A}: U_n \rightarrow C_m$ — линейный оператор ранга n ; U_n — пространство решений — n -мерное подпространство гильбертова пространства U ; C_m — пространство наблюдений (радиоданных) — m -мерное комплексное евклидово пространство; \vec{f} — наблюдаемый вектор радиоданных; \vec{n} — вектор аддитивной помехи с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $R_{m \times m}$. Метод регуляризации Тихонова при решении уравнения (1) сводится к решению вариационной задачи [3]

$$\inf \{ \|u_n\|_U^2 + \alpha \|Au_n - \vec{f}\|_m^2 : u_n \in U_n \}, \quad (2)$$

где α — параметр регуляризации, $\|\cdot\|_m$ — евклидова норма в C_m ; $\|\cdot\|_U$ — гильбертова норма в U . Для численной реализации метода следует выбрать координатный базис $\{\Phi_i \in U_n; i = \overline{1, n}\}$ в подпространстве U_n . Тогда решение уравнения (1) запишем в виде $u_n = \sum_{i=1}^n a_i^* \Phi_i$ (3). Здесь $*$ — знак комплексного (для векторных величин — эрмитового) сопряжения. При этом каждому $u_n \in U_n$ взаимно однозначно соответствует вектор $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, конкретный вид которого определяется выбранным базисом, а операторному уравнению (1) соответствует система n линейных уравнений

$$\vec{A}\vec{a} + \vec{n} = \vec{f}; \quad \vec{a} \in C_n; \quad \vec{n}, \vec{f} \in C_m, \quad (4)$$

где A — матрица $(m \times n)$ вида $(\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n)$, $\vec{\varphi}_i \in C_m$, $\vec{\varphi}_i = \mathcal{A}\Phi_i$. Тогда

$$\|u_n\|_U^2 = (u_n, u_n)_U = \left(\sum_{i=1}^n a_i^* \Phi_i, \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i \right)_U = \vec{a}^* Q \vec{a}.$$

Здесь Q — матрица $(n \times n)$ с элементами $g_{ij} = (\Phi_i, \Phi_j)_U$, $(\cdot, \cdot)_U$ — скалярное произведение в U . Следовательно, вариационная задача (2) эквивалентна задаче

$$\inf \{ \vec{a}^* Q \vec{a} + \alpha \|A\vec{a} - \vec{f}\|_m^2 : \vec{a} \in C_n \}. \quad (5)$$

Регуляризирующему оператору $\mathcal{L}_\alpha: C_m \rightarrow U_n$ соответствует матрица $(n \times m)$, разрешающая вариационную задачу (5) $L_\alpha = (A^*A + \alpha Q)^{-1}A^*$ (6). При этом регуляризованная процедура решения уравнения (1) определяется выражениями

$$\widehat{\vec{a}} = L_\alpha \vec{f} \quad (7); \quad \widehat{u}_n = \sum_{i=1}^n \widehat{a}_i^* \Phi_i. \quad (8)$$

Выбор координатного базиса в подпространстве U_n влияет лишь на вид выражения (4), (6), а не на конечный результат \hat{U}_n , поскольку процедура (7), (8) независимо от выбора базиса является представлением одного и того же оператора $\hat{\mathcal{L}}_\alpha$.

В литературе нередко отождествляется использование для решения обратной задачи матрицы L_α вида $L_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*$ с методом регуляризации Тихонова. Однако последнее справедливо лишь в том случае, если базис ортонормирован, что непосредственно следует из выражения (6). Для дальнейшего анализа конкретизируем вид пространства U и рассмотрим случай, когда U — гильбертово пространство функций, определенных в области Ω N -мерного пространства R_N . Элементами из U могут быть: пространственный энергетический спектр электромагнитного поля в задачах радиометрии, поле коэффициента рассеяния поверхности в задачах активной радиолокации, функция, описывающая пространственное распределение показателя преломления в задачах дистанционного зондирования среды. В первых двух случаях размерность N области Ω равна двум, в третьем случае — трем. Тогда искомое решение u_n обратной задачи и базис $\{\Phi_i, i = \overline{1, n}\}$ также являются функциями от $\vec{\theta} \in \Omega$:

$$\hat{u}_n(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^n \hat{a}_i^* \Phi_i(\vec{\theta}) = \hat{a}^* \vec{\Phi}(\vec{\theta}),$$

где $\vec{\Phi}(\vec{\theta}) = (\Phi_1(\vec{\theta}), \dots, \Phi_n(\vec{\theta}))^T$. При этом процедура (7), (8) нахождения регуляризованного решения уравнения (1) по вектору радиоданных $\vec{f} \in C_m$ описывается выражением

$$\hat{u}_\alpha(\vec{\theta}) = \hat{a}^* \vec{\Phi}(\vec{\theta}) = \vec{f}^* L_\alpha^* \vec{\Phi}(\vec{\theta}). \quad (9)$$

Введем обозначение $\vec{B}_\alpha(\vec{\theta}) = L_\alpha^* \vec{\Phi}(\vec{\theta})$ (10). Выражение (9) с учетом (10) можно записать в виде

$\hat{u}_\alpha(\vec{\theta}) = \vec{f}^* \vec{B}_\alpha(\vec{\theta})$ (11). Из (11) следует, что алгоритм решения линейной обратной задачи (1) по методу регуляризации Тихонова (как и любой другой линейный алгоритм) при фиксированном параметре α сводится к взвешенному суммированию априорно известных функций $\{B_{i\alpha}(\vec{\theta}), i = \overline{1, n}\}$ с весовыми коэффициентами, численно равными компонентам вектора радиоданных \vec{f} . Указанные функции полностью определяют структуру алгоритма и зависят лишь от оператора \mathcal{A} и параметра регуляризации \mathcal{L} .

Следует отметить, что методы регуляризации позволяют определить только однопараметрическое семейство операторов α_α , в то время как выбор конкретного значения параметра α является самостоятельной задачей. Наиболее распространенным способом ее решения служит выбор параметра регуляризации по невязке [4].

Однако при этом не учитывается степень статистической достоверности получаемого решения $\hat{u}_\alpha(\vec{\theta})$, что снижает надежность результатов измерения. Цель дальнейшего рассмотрения — получение соотношений, позволяющих оценить уровень флюктуаций регуляризованного решения, и построение на их основе процедуры выбора параметра регуляризации, гарантирующей получение результатов с заданной степенью достоверности.

Определим дисперсию регуляризованного решения $\hat{u}_\alpha(\vec{\theta})$, соответствующую вкладу флюктуационной составляющей, которая присутствует в решении из-за влияния вектора помехи \vec{n} .

$$\sigma_\alpha^2(\vec{\theta}) = \langle \vec{n}^* \vec{B}_\alpha(\vec{\theta}) \vec{B}_\alpha^*(\vec{\theta}) \vec{n} \rangle = \text{tr} [R_{m \times m} D_\alpha(\vec{\theta})]. \quad (12)$$

Здесь $D_\alpha(\vec{\theta})$ — матричная функция аргумента $\vec{\theta}$, зависящая от параметра α , $D_\alpha(\vec{\theta}) = \vec{B}_\alpha(\vec{\theta}) \vec{B}_\alpha^*(\vec{\theta})$; $\langle \cdot \rangle$ — оператор усреднения по ансамблю реализаций; tr — след матрицы. Выражение (12) позволяет оценить дисперсию $\sigma_\alpha^2(\vec{\theta})$ решения $\hat{u}_\alpha(\vec{\theta})$ в каждой точке области Ω исходя из априорной информации о корреляционной матрице $R_{m \times m}$ вектора помехи \vec{n} . Регуляризованное решение обратной задачи (1) может считаться достоверным лишь в тех точках области Ω , в которых выполняется условие

$$|\hat{u}_\alpha(\vec{\theta})|^2 \geq k \sigma_\alpha^2(\vec{\theta}). \quad (13)$$

где k имеет значение порядка нескольких единиц. В противном случае величину $\hat{u}_\alpha(\vec{\theta})$ можно полностью отнести к флюктуационной составляющей.

Итак, выражения (11), (12) позволяют по наблюдаемому вектору радиоданных и априорно известной корреляционной матрице помехи определить регуляризованное решение рассматриваемой задачи, соответствующее методу регуляризации Тихонова, и дисперсию его флюктуационной составляющей. Уменьшение параметра α приводит к росту флюктуационной и уменьшению систематической погрешности. Предлагаемая далее процедура выбора указанного параметра обеспечивает компромисс между уровнями флюктуационной и систематической погрешностей при одновременном обеспечении условия (13) статистической достоверности решения. Эта процедура заключается в выборе минимального α из множества его значений, удовлетворяющих условию (13) в достаточно большой подобласти $\Omega' \subset \Omega$. При этом результатом измерения служит не только регуляризованное решение $\hat{u}_\alpha(\vec{\theta})$, но и его дисперсия $\sigma_\alpha^2(\vec{\theta})$ или среднеквадратичное отклонение $\sigma_\alpha(\vec{\theta})$, что полностью отвечает требованиям концепции доверительного интервала в современной теории статистических решений.

Проведенное рассмотрение позволяет сделать следующие выводы.

1. Любой регуляризирующий линейный алгоритм решения обратной задачи (1) можно представить в виде (11), то есть свести к взвешенному суммированию априорно известных функций с весовыми коэффициентами, численно равными компонентам вектора радиоданных. Это позволит существенно упростить аппаратную реализацию алгоритмов обработки сигналов в ИРС.

2. Алгоритм решения обратной задачи наряду с процедурой нахождения регуляризованного решения (11) должен включать процедуру оценивания дисперсии его флюктуационной составляющей (12).

3. Предлагаемая процедура выбора параметра регуляризации исходя из степени статистической достоверности решения отвечает требованиям теории статистических решений более полно, чем широко распространенный метод выбора указанного параметра по невязке. Получаемый при ее использовании результат измерения имеет заданный уровень достоверности.

Список литературы: 1. Фалькович С. Е., Хомяков Э. Н. Статистическая теория измерительных радиосистем.— М.: Радио и связь, 1981.— 286 с. 2. Есепкина Н. Е., Парийский Ю. Н., Корольков Д. В. Радиотелескопы и радиометры.— М.: Наука, 1973.— 340 с. 3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1973.— 195 с. 4. Гласко В. Б. Обратные задачи математической физики.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.— 103 с.

Поступила в редколлегию 26.12.85