

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ _____ ” _____ 2019 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Заверусі Ользі Ігорівні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне моделювання магнітостатичних систем методом R-функцій

затверджена наказом по університету від 31 жовтня 2019 р. № 1600 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 9 грудня 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель магнітостатичної системи

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми математичного моделювання задач магнітостатики

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2019 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2019 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2019 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2019 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2019 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2019 р.	виконано

Дата видачі завдання 2 вересня 2019 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ доц. Сидоров М.В.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 65 с., 29 рис., 7 табл., 1 додаток, 28 джерел.

ЗАДАЧА МАГНІТОСТАТИКИ, МЕТОД БУБНОВА-ГАЛЬОРКІНА, МЕТОД R -ФУНКЦІЙ, СИСТЕМА МАКСВЕЛЛА, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.

Об'єкт дослідження – процеси магнітостатики.

Мета роботи – застосувати методи Бубнова-Гальоркіна та R -функцій до дослідження магнітної індукції та характеристик магнітної системи.

Метод дослідження – методи Бубнова-Гальоркіна та R -функцій.

Атестаційна робота присвячена дослідженню застосування методів Бубнова-Гальоркіна та R -функцій для чисельного аналізу задачі математичного моделювання магнітної системи. Побудовано структуру розв'язку крайової задачі для z -координати векторного потенціалу вектору магнітної індукції (задача магнітостатики) та обгрунтовано застосування методу R -функцій, яка враховує умови спряження на межі контакту «ферромагнетик-вакуум». Для апроксимації невизначеної компоненти структури розв'язку пропонується використати проєкційний метод Гальоркіна. Ефективність використаного методу підтверджено низкою обчислювальних експериментів.

ABSTRACT

Introductory note: 65 p., 29 pic., 7 tabl., 1 app., 28 sources.

GOAL OF MAGNETOSTATICS, BUBNOV-GALERKIN METHOD, R-FUNCTION METHOD, MAXWELL SYSTEM, MATHEMATICAL MODELING.

Object of research – Processes of magnetostatics.

Purpose of work – apply Bubnov-Galerkin and R-functions methods to research of magnetic induction and features of magnet system.

Methods of research – Bubnov-Galerkin and R-functions methods.

The qualification paper is dedicated to research of applying Bubnov-Galerkin and *R*-functions methods to numerical analysis of magnet system math modelling goal. The structure of solution of boundary value problem for *z*-coordinates of magnetic induction vector potential (goal of magnetostatics) was developed, and applying of *R*-function method was proved, which takes into account the conditions of connection on the contact measure (“ferrimagnetic-vacuum”). For approximation of undetermined components of solution structure, Galerkin projective method is suggested. The efficiency of the method is confirmed by a number of computational experiments.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесів магнітостатіки та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесів магнітостатіки	9
1.1.1 Вербальна модель системи	9
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	10
1.1.4 Інформаційна модель системи	13
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання процесів магнітостатіки	14
1.2.1 Модель аналізу проблеми	14
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	16
1.2.3 Модель вирішення проблеми	19
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	20
1.3.1 Змістовна постановка задачі	20
1.3.2 Формальна постановка задачі	21
1.4 Постановка задач дослідження	23
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	24
2.1 Рівняння Максвела для електромагнітного поля	24
2.2 Метод R -функцій в задачах математичного моделювання	27
2.2.1 Метод R -функцій та обернена задача аналітичної геометрії	27
2.2.2 Структурний метод R -функцій	32
2.3 Метод Бубнова-Гальоркіна	34
2.4 Застосування методу R -функцій та Бубнова-Гальоркіна в математичному моделювання процесів магнітостатіки	40

	7
3 Програмна реалізація	43
3.1 Mathematica 11.1 як система символної математики.....	43
3.2 Опис програми.....	44
4 Результати обчислювального експерименту	45
5 Аналіз можливих застосувань	57
Висновки	58
Перелік джерел посилання	59
Додаток А Код програми	62

ВСТУП

Магнітні системи широко поширені в природі і техніці – це атоми в кристалічній решітці феромагнетиків, магніти прискорювальних установок, системи стабілізації штучних супутників та ін. З огляду на велику собівартість натурного дослідження таких систем в останнє десятиліття на перший план почало виходити математичне моделювання і чисельний аналіз за допомогою ЕОМ. Математичне моделювання дозволяє зменшити час аналізу і витрати ресурсів обчислювальних машин, а так само дозволяє досліджувати ще і ті частини конструкції магніту, вимірювання в яких досить скрутні, але розподіл поля в даних конструкціях позначається на характеристиках і роботі магніту. Отже, незважаючи на наявне програмно-математичне забезпечення, залишається багато важливих практичних завдань, для яких отримання результатів і саме обчислення є досить складним.

В основному для чисельного аналізу магнітних систем використовуються методи скінченних різниць, скінченних елементів, граничних інтегральних рівнянь та ін. Кожний з цих методів має свої переваги і недоліки [9, 19]. Як основний недолік перелічених методів слід зазначити необхідність заново генерувати і підлаштовувати під особливості кожної області розрахункову сітку. Як альтернатива існуючим методам чисельного розрахунку магнітних систем є використання структурно-варіаційного методу R -функцій, запропонованого академіком Національної академії наук України В.Л. Рвачовим [9, 13, 15]. Стосовно до розв'язання задач математичної фізики метод R -функцій дозволяє будувати структури розв'язку крайових задач – жмутки функцій, які точно задовольняють крайові умови задачі. При цьому геометрія області враховується точно на аналітичному рівні. Метод R -функцій у задачах математичного моделювання фізико-механічних полів різної природи використовувався, наприклад, у [1, 16, 20, 21, 23 – 27].

Отже, вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу магнітних систем, використовуючи метод R -функцій, є актуальною науковою задачею.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ МАГНІТОСТАТИКИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми математичного моделювання процесів магнітостатики

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Магнітна система».

Предмет аналізу – «Прискорююча магнітна установка».

Точка зору: дослідник.

Ціль: представлення глобальної математичної моделі для вивчення різних фізичних процесів у магнітному прискорювачі.

Модель типу «чорний ящик» акцентує увагу на взаємодії системи із зовнішнім середовищем (рис. 1.1). Тут виходами системи є її цільові продукти, а входи – вплив середовища на систему. Зміст «чорного ящика» не розкривається, бо увага звертається тільки на межу системи. Межа, в свою чергу, підкреслює цілісність системи, відокремленість її від зовнішнього середовища і взаємодію системи і середовища [6].

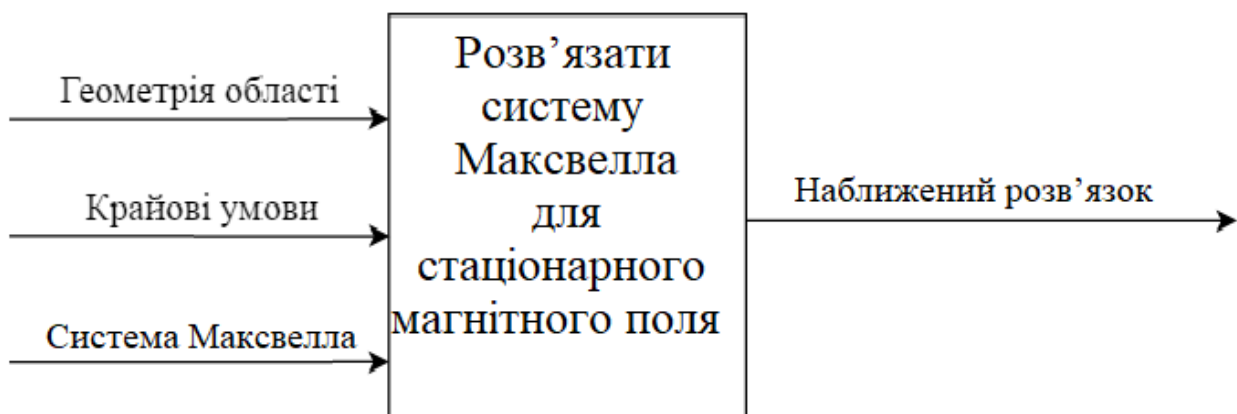


Рисунок 1.1 – Модель типу «чорний ящик»

1.1.2 Морфологічний опис системи

Морфологічний опис системи розпочнемо з опису зовнішнього середовища, модель якого наведено на рис. 1.2.

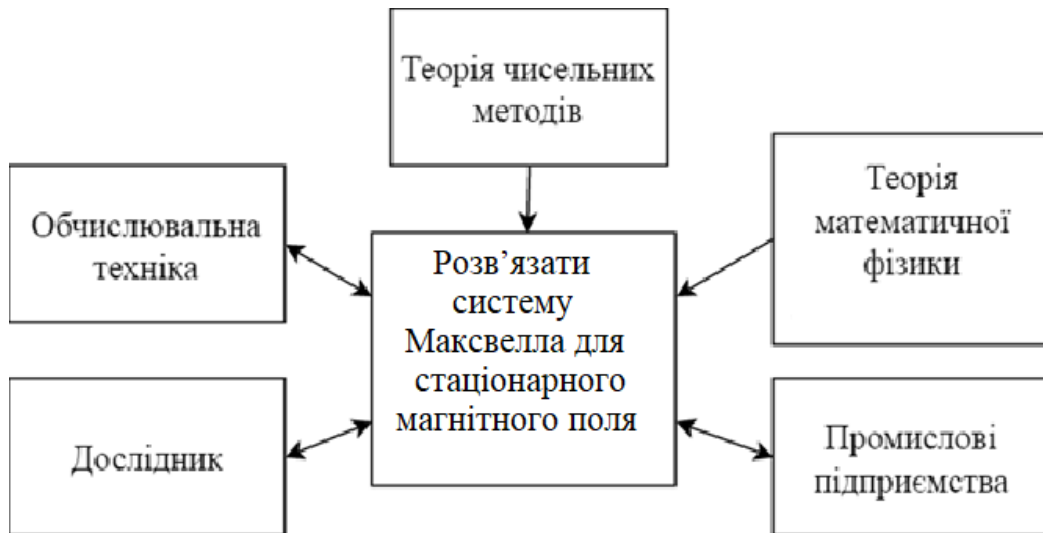


Рисунок 1.2 – Модель зовнішнього середовища системи

Зовнішнє середовище – це сукупність всіх об'єктів за межею системи, зміна властивостей яких впливає на систему, а також тих об'єктів, чії властивості змінюються в результаті поведінки системи [6].

1.1.3 Функціональна модель системи

Контекстна діаграма є вершиною деревовидної структури діаграм і дає загальний опис системи та її взаємодії із зовнішнім середовищем.

Контекстна діаграма зображує функціонування системи в цілому (рис. 1.3). В рамках методології IDEF0 процес подається у вигляді набору елементів, які взаємодіють між собою, а також ресурсів, що споживаються кожною роботою.

Після опису системи в цілому проводиться розбиття її на великі фрагмен-

ти. Цей процес називається функціональною декомпозицією, а діаграми, які описують кожен фрагмент і взаємодію фрагментів, називаються діаграмами декомпозиції. Після декомпозиції контекстної діаграми проводиться декомпозиція кожного великого фрагмента системи на більш дрібні і так далі, до досягнення потрібного рівня деталізації опису [7, 12].



Рисунок 1.3 – Контекстна діаграма (рівень А-0)

Після того, як контекст описаний, проводиться побудова наступних діаграм в ієрархії. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт на попередній діаграмі. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Розв'язання системи рівнянь Максвелла для стаціонарного магнітного поля». Декомпозиція контекстної діаграми (рис. 1.4) демонструє основні функції системи та їх деталізації за рівнями (рис. 1.5).

IDEF3 – це метод, який має основною метою дати можливість аналітикам описати ситуацію, коли процеси виконуються в певній послідовності, а також описати об'єкти, які беруть участь спільно в одному процесі [6, 7].

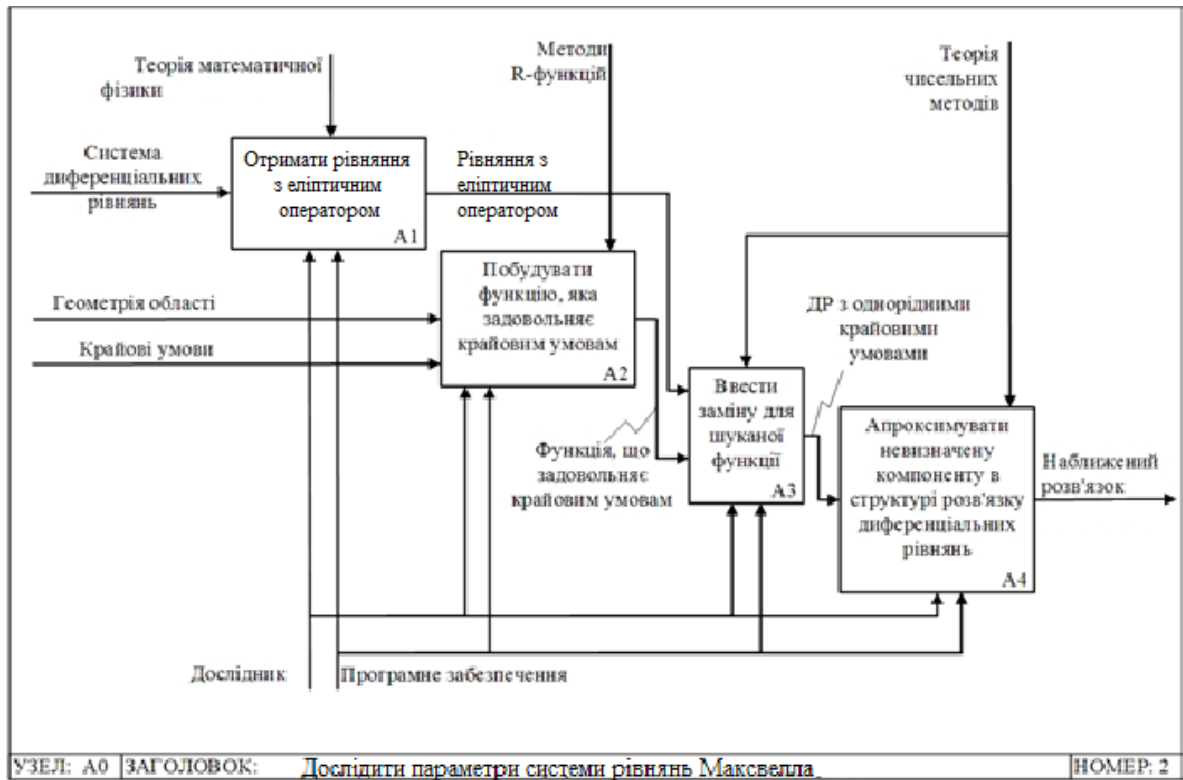


Рисунок 1.4 – Декомпозиція роботи «Дослідити параметри системи рівнянь Максвелла»: рівень A0

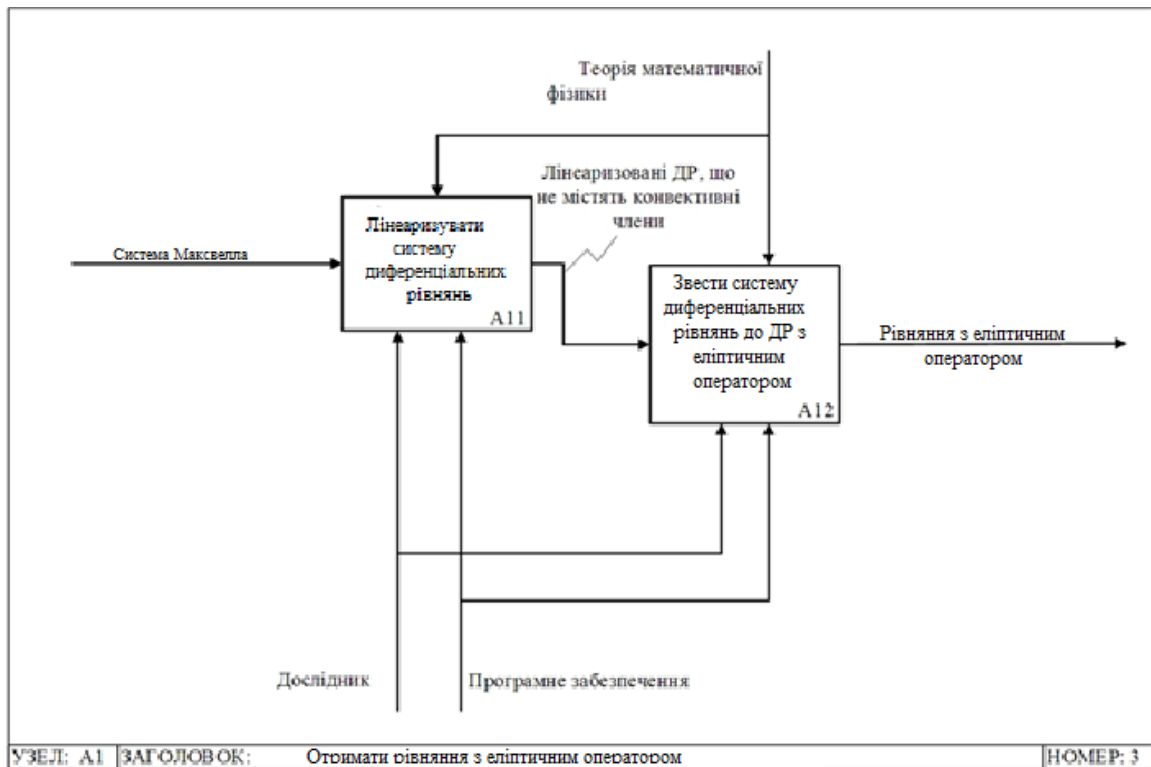


Рисунок 1.5 – Декомпозиція роботи «Отримати рівняння з еліптичним оператором»: рівень A1

За допомогою методу IDEF3 описуємо процес дослідження параметрів системи Максвелла та отримання рівняння з еліптичним оператором, що наведено на рис 1.6 та рис. 1.7 відповідно. Ці схеми можна використовувати як доповнення до моделі декомпозиції роботи, яка наведена на рис. 1.5, для більш наглядного відображення процесів.

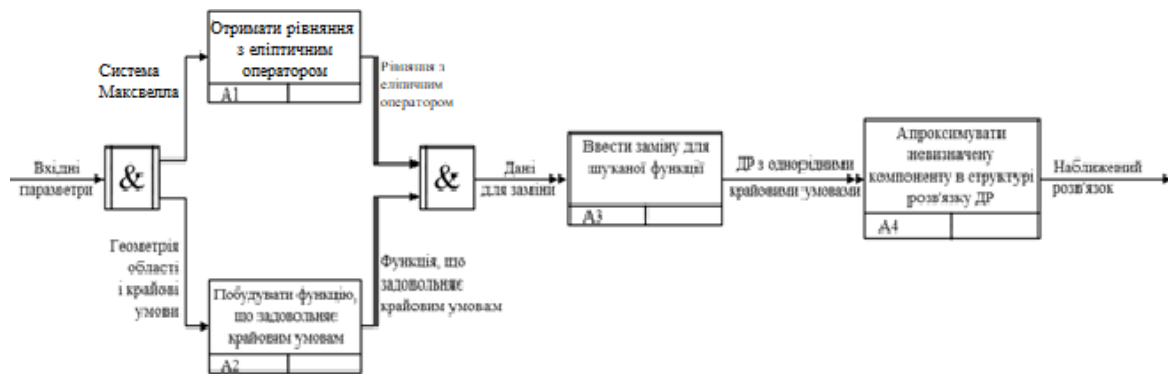


Рисунок 1.6 – Опис роботи «Дослідити параметри системи рівнянь Максвелла»: рівень A0 (в нотації IDEF3)

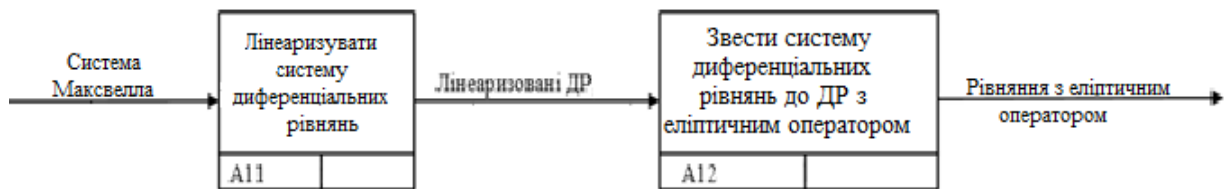


Рисунок 1.7 – Опис роботи «Отримати рівняння з еліптичним оператором»: рівень A1 (в нотації IDEF3)

1.1.4 Інформаційна модель

Інформаційна модель системи відображує відносини між елементами системи у вигляді структур даних, акцентуючи увагу дослідника на склад та взаємозв'язок потоків даних.

Діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD) використовуються для опису документообігу та обробки інформації. Подібно до IDEF0, DFD

представляє модельну систему як мережу пов'язаних між собою робіт. Їх можна використовувати як доповнення до моделі IDEF0 для більш наочного відображення поточних операцій [6, 7]. DFD-діаграма представлена на рис. 1.8. DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції представлена на рис. 1.9.

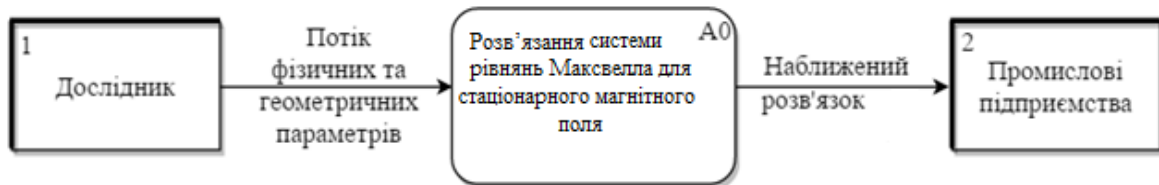


Рисунок 1.8 – DFD-діаграма



Рисунок 1.9 – DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми математичного моделювання процесів магнітостатики

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Досліджуємо задачу про вибір методу, яким буде розв'язуватися задача розв'язання системи рівнянь Максвелла для стаціонарного магнітного поля. Розв'язок будується за наступними критеріями:

- критерій 1 (K1): точно описує геометрію області;
- критерій 2 (K2): дозволяє будувати структуру розв'язку задачі;
- критерій 3 (K3): отримує наблизений аналітичний розв'язок;

– критерій 4 (K4): швидкість збіжності;

– критерій 5 (K5): час роботи програми.

Обирати будемо з множини альтернатив:

– альтернатива 1 (A1): сіткові методи;

– альтернатива 2 (A2): метод R -функцій;

– альтернатива 3 (A3): метод скінченних елементів.

Побудуємо ієрархічну структуру, використовуючи метод парних порівнянь. Ієрархічна структура наведена на рисунку 1.10.

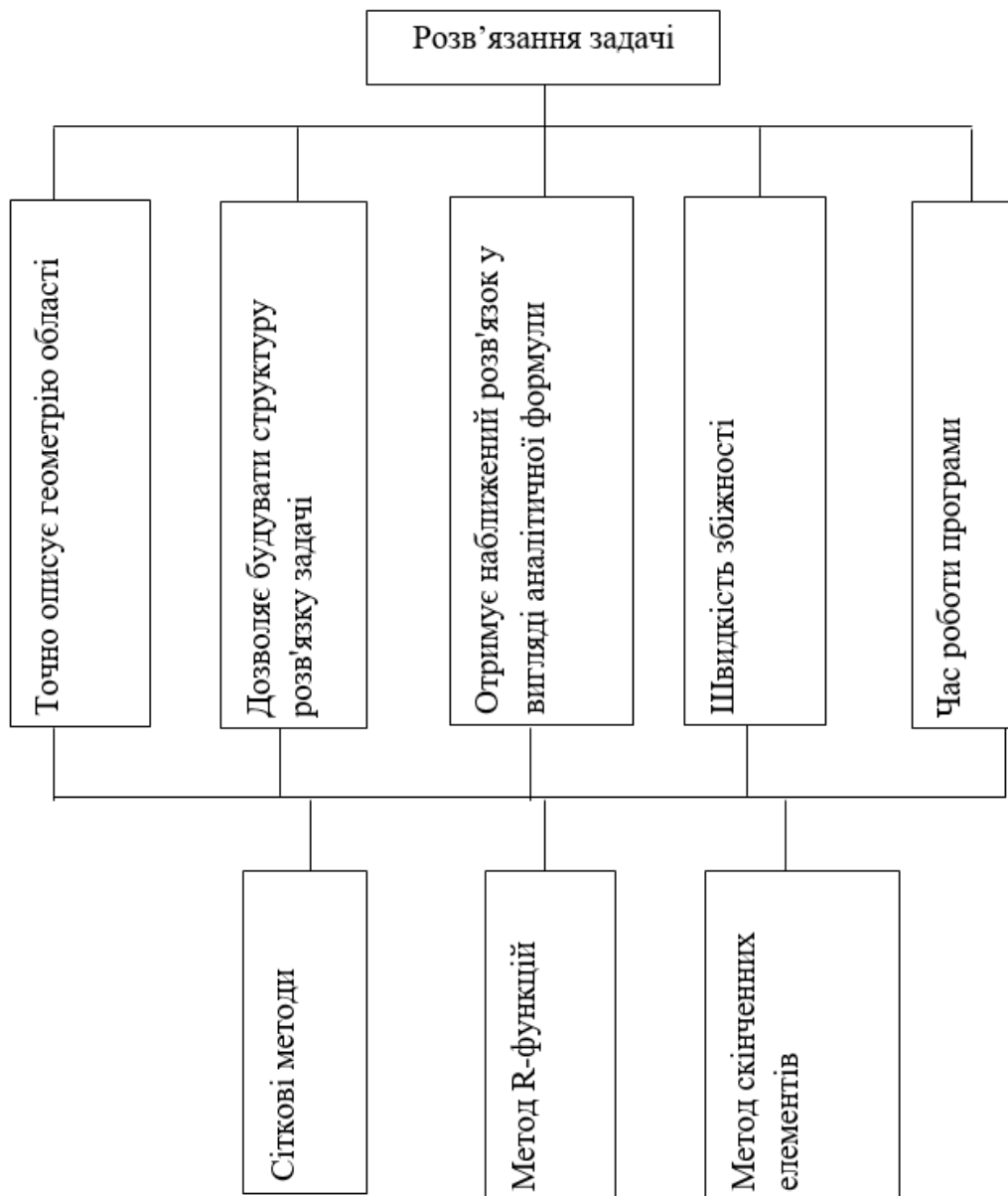


Рисунок 1.10 – Ієрархічна модель процесу аналізу розв'язання задачі

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Для продовження аналізу необхідно побудувати матриці парних порівнянь моделі, а також критеріїв системи. Матриця парних порівнянь критеріїв та розрахунки за нею наведено у табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Матриця парних порівнянь критеріїв

Критерії оцінювання	K1	K2	K3	K4	K5	Оцінки компонентів	Вектор пріоритетів	Величина значущості
K1	1	4	7	8	4	3,890	0,500	0,886
K2	$\frac{1}{4}$	1	9	8	5	2,450	0,310	1,721
K3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{1}{2}$	3	0,470	0,060	1,178
K4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	2	1	2	0,500	0,064	1,191
K5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	1	0,440	0,056	0,795
Усього						7,750		5,680

$$\text{Індекс узгодженості (ІУ)} = \frac{5,68 - 5}{5 - 1} = 0,17.$$

Випадкова узгодженість = 1,12.

$$\text{Відносна узгодженість (ВУ)} = \frac{0,17}{0,12} = 0,15 = 15\%.$$

Для прийняття рішення про використання методу необхідно провести по-

рівняльний аналіз альтернатив. Оцінивши їх щодо кожного з критеріїв, отримаємо дані, які представлені в таблицях 1.2 – 1.6. Випадкова узгодженість для матриць дорівнює 0,58.

Таблиця 1.2 – Порівняння за першим критерієм

Критерій 1	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	0,400	0,090	0,824
A2	5	1	7	3,270	0,730	0,991
A3	3	$\frac{1}{7}$	1	0,750	0,169	1,418
Усього				4,420		3,190

Для таблиці 1.2 маємо $IУ = 0,09$, $ВУ = 0,1 = 10\%$.

Таблиця 1.3 – Порівняння за другим критерієм

Критерій 2	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{3}$	2	0,870	0,270	1,073
A2	3	1	4	2,280	0,700	0,990
A3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0,066	0,020	0,955
Усього				3,216		3,010

Для таблиці 1.3 маємо $IУ = 0,005$, $ВУ = 0,008 = 0,8\%$.

Таблиця 1.4 – Порівняння за третім критерієм

Критерій 3	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	4	$\frac{1}{6}$	0,874	0,187	1,354
A2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{7}$	0,329	0,070	0,845
A3	6	7	1	3,476	0,743	0,973
Усього				4,679		3,171

Для таблиці 1.4 маємо $IУ = 0,0855$, $ВУ = 0,086 = 8,6\%$.

Таблиця 1.5 – Порівняння за четвертим критерієм

Критерій 4	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значимості
A1	1	$\frac{1}{3}$	4	1,010	0,280	1,189
A2	3	1	5	2,466	0,627	0,961
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	0,368	0,094	0,936
Усього				4,250		3,086

Для таблиці 1.5 маємо $IУ = 0,043$, $ВУ = 0,074 = 7,4\%$.

Таблиця 1.6 – Порівняння за п'ятим критерієм

Критерій 5	A1	A2	A3	Власний вектор	Вектор пріоритетів	Величина значущості
A1	1	$\frac{1}{3}$	4	1,101	0,280	1,189
A2	3	1	5	2,466	0,627	0,961
A3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	1	0,368	0,094	0,936
Усього				3,935		3,086

Для таблиці 1.6 маємо $I_U = 0,0429$, $V_U = 0,0739 = 7,39\%$.

1.2.3 Модель вирішення проблеми

З усіх отриманих результатів ми, як особа, що приймає рішення, можемо зробити кінцеві підрахунки та зробити висновок. У таблиці 1.7 наведені результати, які дозволяють нам сказати, що кращою для нас буде друга альтернатива, а саме – метод R -функцій.

Таблиця 1.7 – Кінцеві дані

Критерій Альтернатива	K1	K2	K3	K4	K5	Узагальнені пріоритети
A1	0,500	0,090	0,270	0,187	0,280	0,361
A2	0,310	0,730	0,700	0,070	0,627	0,406
A3	0,060	0,169	0,020	0,743	0,094	0,233

1.3 Змістовна та формальна постановки задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Розглянемо магнітну систему (рисунок 1.11), яка складається з феромагнетика Ω_f і вакууму Ω_v із замкнутими струмовими обмотками Ω_c . Постановка задачі магнітостатики полягає в тому, що треба знайти розподіл магнітного поля, яке створене стаціонарними струмами і намагніченістю ізотропних феромагнетиків.

У разі відсутності поверхневих струмів і струмів, що протікають по феромагнетиках, дана задача зводиться до знаходження вектор-функцій $\mathbf{B}(P)$ і $\mathbf{H}(P)$ з системи рівнянь Максвелла для стаціонарного магнітного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(P) = \mathbf{J}(P), \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(P) = 0, \quad \mathbf{B}(P) = \mu_0 \mu(P), \quad (1.1)$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} |\mathbf{H}(P)| = 0. \quad (1.2)$$

У (1.1), (1.2) використано такі позначення: P – точка тривимірного простору \mathbb{R}^3 , \mathbf{H} – вектор напруженості магнітного поля, \mathbf{B} – вектор індукції магнітного поля, \mathbf{J} – відомий вектор об'ємної щільності струму, відмінний від нуля і такий, що $\int_{\Omega} \mathbf{J} d\Omega = 0$, $\mu = \mu(|\mathbf{H}|)$ – відома в обмеженій однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ нелінійна функція магнітної проникності феромагнетика (для немагнітного середовища $\mu = 1$), μ_0 – магнітна проникність вакууму.

На межі розділу середовищ з різними магнітними характеристиками виконуються умови неперервності нормальної і тангенціальної складових векторів \mathbf{B} і \mathbf{H} відповідно:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0,$$

де \mathbf{n} – одиничний вектор нормалі до $\partial\Omega_{fv}$.

Вектор намагніченості феромагнетика \mathbf{M} , пов'язаний з векторами індукції \mathbf{H} і напруженості відповідно до формули

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}.$$

Через нелінійну залежність магнітної проникності від напруженості поля, складну геометрію областей, які займають феромагнетик (Ω_f) і струмові обмотки (Ω_c), знаходження розподілу магнітного поля з системи рівнянь (1.1), (1.2) можливо тільки чисельними методами.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Вважатимемо, що продовжний розріз магніту суттєво більше повздожнього. Тоді векторний потенціал вектору магнітної індукції матиме лише одну ненульову координату $u = u(x, y)$ і від системи рівнянь Максвелла для стаціонарного магнітного поля можна перейти до скалярного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\mu_0 J_z(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.3)$$

Тут μ – функція магнітної проникності феромагнетика, яка є відомою у Ω_f нелінійною функцією від вектору напруженості магнітного поля (для немагнітного середовища $\mu = 1$), μ_0 – магнітна проникність вакууму, $J_z(x, y)$ – z -а компонента вектору об'ємної щільності струму, що відрізняється від нуля лише у Ω_c і задовольняє умову $\iint_{\Omega_c} J_z(x, y) dx dy = 0$,

$$u(x, y) = \begin{cases} u_f(x, y), & (x, y) \in \Omega_f, \\ u_v(x, y), & (x, y) \in \Omega_v. \end{cases}$$

Рівняння (1.3) слід доповнити умовами спряження на межі $\partial\Omega_{fv}$ розділу феромагнетику та вакууму

$$u_f|_{\partial\Omega_{fv}} = u_v|_{\partial\Omega_{fv}}, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial u_f}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = \frac{\partial u_v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{fv}}, \quad (1.4)$$

де \mathbf{n} – одиничний вектор нормалі до $\partial\Omega_{fv}$, та умовою на нескінченності:

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} u = 0. \quad (1.5)$$

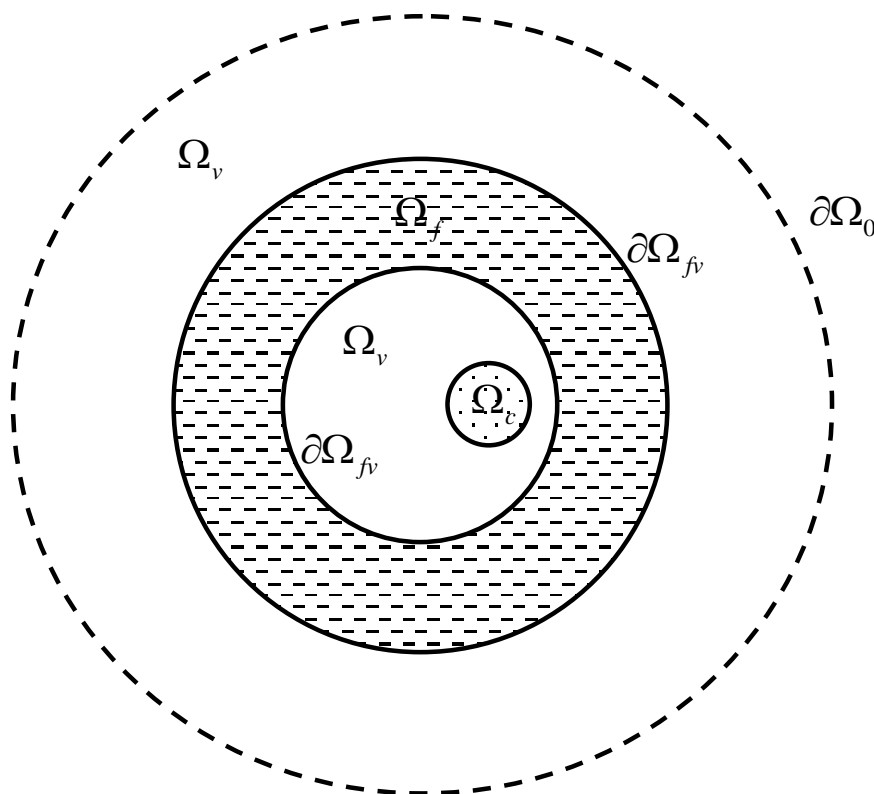


Рисунок 1.11 – Умовна схема магнітної системи

1.4 Постановка задач дослідження

Метою написання атестаційної роботи є вивчення можливості застосування структурного метода (метода R -функцій) для отримання наближеного розв'язку задачі математичного моделювання магнітної системи.

Для досягнення поставленої мети треба виконати наступні етапи:

- провести системний аналіз предметної області;
- ознайомитися із методами отримання наближеного розв'язку задач математичної фізики (зокрема, методом R -функцій та методом Гальоркіна);
- розглянути постановку крайової задачі для потенціалу магнітного поля;
- з використанням методів теорії R -функцій розробити метод розв'язання розглядуваної задачі;
- розробити алгоритм та виконати його програмну реалізацію в пакеті Mathematica 11.1;
- провести обчислювальні експерименти для тестових значень параметрів моделі і проаналізувати результати.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Рівняння Максвелла для електромагнітного поля

Введення Максвеллом терміну струму зміщення, призвело до завершення створення ним макроскопічної теорії електромагнітного поля, яка дозволяє з єдиної точки зору пояснити не тільки електричне та магнітні явища, але й передбачити нові, існування яких згодом було підтверджено.

В основі теорії Максвелла покладено чотири рівняння [11].

Електричне поле може бути як потенціальним, так і вихровим, тому напруженість результуючого поля дорівнює $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_B$, оскільки $\oint_L \mathbf{E}_q d\mathbf{l} = 0$, а циркуляція \mathbf{E}_B дорівнює

$$\oint_L \mathbf{E}_B d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Тоді

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

З цього рівняння випливає, що джерелами електричного поля можуть бути не тільки електричні заряди, але і магнітні поля, що змінюються в часі.

Узагальнена теорема про циркуляцію вектора \mathbf{H} має вигляд

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Це рівняння показує, що магнітні поля можуть збуджуватися або рухо-

ними зарядами(електричними струмами), або змінними електричними полями.

Теорема Гауса для поля D має вигляд

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q_{st}.$$

Якщо заряд розподілено неперервно у середині замкнутої поверхні з об'ємною щільністю розподілення заряду ρ , то $q_{st} = \int_V \rho dv$. Отримуємо

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dv.$$

Теорема Гауса для поля \mathbf{B} має вигляд

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Отже, повна система рівнянь Максвелла в інтегральній формі має вигляд:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S},$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dv, \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Величини, що входять до рівнянь Максвелла, не є незалежними і між ними існує зв'язок. Наведемо формули цього зв'язку для ізотропних, несегнетоелектричних та неферомагнітних середовищ:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \delta \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}.$$

Тут ε_0 - електрична стала, μ_0 - магнітна стала, ε - діелектрична проникність середи, μ - магнітна проникність середи, $\delta = \frac{1}{\rho}$ - питома електрична провідність.

З рівнянь Максвелла випливає, що джерелом електричного поля можуть бути електричні заряди, або магнітні поля, що змінюються у часі, які можуть збуджуватися або рухомими електричними зарядами (струмами), або змінними електричними полями. Рівняння Максвелла не симетричні щодо електричного і магнітного полів. Це пов'язано з тим, що в природі не існує магнітних зарядів.

Якщо $\mathbf{E} = \text{const}$ та $\mathbf{B} = \text{const}$ (стаціонарні поля), то рівняння Максвелла приймають наступний вигляд:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I, \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q, \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Джерелами електричного стаціонарного поля є тільки електричні заряди, джерелами стаціонарного магнітного поля – тільки струми провідності.

Електричне і магнітне поле в даному випадку незалежні один від одного, що дозволяє вивчати окремо сталі електричне та магнітне поля.

Диференціальна форма рівнянь Максвелла має вигляд:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Інтегральна форма запису рівнянь Максвелла є більш загальною, якщо є поверхні розриву. Диференціальна форма запису рівняння Максвелла передбачає, що всі величини в просторі і часі змінюються неперервно. Рівняння Максвелла – найбільш загальні рівняння для електричних і магнітних полів у рівномірних середовищах. З рівнянь Максвелла випливає, що змінне магнітне поле завжди пов'язане зі змінним електричним полем, що в свою чергу пов'язане з

породжуваним ним магнітним полем, тобто електричне і магнітне поле нерозривно пов'язані один з одним – вони утворюють єдине електромагнітне поле.

Рівняння Максвелла лінійні. Ця властивість пов'язана з принципом суперпозиції, якщо два будь-яких поля задовольняють рівнянням Максвелла, то це відноситься до суми цих полів. Рівняння Максвелла містять рівняння неперервності, що виражає закон збереження електричного заряду. Також рівняння виконуються у всіх інерційних системах відліку. Вони є релятивістські інваріантними. Це є наслідок принципу відносності, згідно з яким всі інерційні системи відліку фізично еквівалентні один одному. Вигляд рівнянь при переході від однієї системи до іншої не змінюється, однак величини, що входять до них, перетворюються за певними правилами.

З рівнянь Максвелла випливає важливий висновок про існування принципово нового явища: електромагнітне поле здатне існувати самотійно – без електричних зарядів та струмів. При цьому зміна його має обов'язково хвильовий характер. Поля такого роду називають електромагнітними хвилями. У вакуумі вони завжди поширюються зі швидкістю, що дорівнює швидкості світла. Теорія Максвелла передбачила існування електромагнітних хвиль і дозволила встановити всі їх основні властивості.

2.2 Метод R -функцій в задачах математичного моделювання фізико-механічних полів

2.2.1 Метод R -функцій та обернена задача аналітичної геометрії

Зазвичай математичною моделлю фізико-механічних полів є розглядуване в деякій області Ω операторне рівняння $Au = f$ з заданими крайовими умовами на межі $\partial\Omega$ області Ω . Наприклад, для задач магнітостатики u – ненульова координата векторного потенціалу вектору магнітної індукції. Функції і оператори, наведені в постановці крайової задачі, є її аналітичними компонентами,

а область Ω та її межа $\partial\Omega$ – геометричними компонентами. Через існування двох різнорідних видів інформації (аналітичної і геометричної) при знаходженні розв’язку крайової задачі виникають серйозні перешкоди, пов’язані з тим, що необхідно не тільки врахувати вигляд формул, що входять до постановки задачі, а й мати засоби зводити геометричну інформацію до аналітичного вигляду, щоб її можна було включити до розрахункового алгоритму. Провести цю процедуру і дозволяє метод R -функцій.

Метод R -функцій було запропоновано академіком НАН України В.Л. Рвачевим [15]. При знаходженні розв’язку крайових задач математичної фізики метод R -функцій пропонує будувати так звану структуру розв’язку крайової задачі, тобто жмуток функцій, який точно задовольняє всім крайовим умовам задачі і залежить від однієї або декількох невідомих компонент. Зазначені невідомі компоненти далі обирають так, щоб у деякому сенсі задовольнити рівняння задачі. Для цього можна використовувати проєкційні чи варіаційні методи (метод Рітца, метод Гальоркіна, метод найменших квадратів, колокацій тощо). Зазначимо, що при цьому геометрія області враховується точно.

Застосування методу R -функцій в задачах чисельного аналізу фізико-механічних полів складається з наступних етапів:

- точний аналітичний опис геометрії розрахункової області, тобто побудова такої функції, яка б дорівнювала нулеві на межі області, була б додатною всередині області і нормальна похідна (в напрямку зовнішньої нормалі) від якої на межі б дорівнювала -1 ;
- продовження крайових умов всередину області, тобто довизначення функцій і операторів, заданих на межі, у внутрішніх точках області;
- побудова загальної структури розв’язку, тобто такої формули, яка залежить від деяких невизначених функцій і при будь-якому їх виборі точно задовольняє всі крайові умови задачі;
- побудова наближеного розв’язку, тобто апроксимація невизначених функцій, що входять до структури розв’язку, одним із чисельних методів.

Розглянемо загальні положення теорії методу R -функцій [15, 17].

Означення. R -функцією (функцією В.Л. Рвачева), що відповідає розбиттю числової осі на проміжки $(-\infty, 0)$ та $[0, +\infty)$, називається така функція, знак якої цілком визначається знаками її аргументів, тобто функція $z = f(x, y)$ називається R -функцією, якщо існує така булева функція F , що

$$S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)],$$

де двозначний предикат $S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ В цьому випадку булева функція F

називається супроводжуючою.

Найбільше вживаною системою R -функцій є система \mathcal{R}_0 :

$$\begin{aligned} \bar{x} &\equiv -x, \\ x \wedge_0 y &\equiv x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y \equiv x + y + \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

супровідними булевими функціями для яких є відповідно \neg, \wedge, \vee .

Сформулюємо обернену задачу аналітичної геометрії [17]. Нехай в \mathbb{R}^2 заданий геометричний об'єкт Ω з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Треба побудувати функцію $\omega(x, y)$, яка є додатною всередині Ω , від'ємною поза межами Ω і дорівнює нулю на $\partial\Omega$. Отже, рівняння $\omega(x, y) = 0$ буде в неявній формі визначати геометричне місце точок, яке відповідає межі $\partial\Omega$ області Ω .

Вважатимемо, що область Ω можна побудувати з простіших областей $\Omega_1 = \{\omega_1(x, y) \geq 0\}$, ..., $\Omega_m = \{\omega_m(x, y) \geq 0\}$, де $\omega_i(x, y)$ – елементарні функції, $i = 1, 2, \dots, m$, за допомогою теоретико-множинних операцій об'єднання \cup , перетину \cap та доповнення \neg . Тоді області Ω можна поставити у відповідність предикат

$$\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m), \quad (2.1)$$

який приймає значення 1, якщо $(x, y) \in \Omega \cup \partial\Omega$, і 0, якщо $(x, y) \notin \Omega \cup \partial\Omega$.

Перехід від предикатної форми задання області (2.1) до звичайної, яка прийнята в аналітичній геометрії, відбувається за допомогою формальної заміни Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, m$, а символів $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символи R -операцій $\{\wedge_0, \vee_0, -\}$ відповідно. В результаті отримуємо єдиний аналітичний вираз $\omega(x, y)$, який визначає в елементарних функціях шукане рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$. При цьому для внутрішніх точок області буде виконуватися нерівність $\omega(x, y) > 0$, а для зовнішніх – $\omega(x, y) < 0$.

Означення. Рівняння $\omega(x, y) = 0$ межі $\partial\Omega$ області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ називається нормалізованим на межі $\partial\Omega$, якщо функція $\omega(x, y)$ задовольняє умовам $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, $\left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1$, де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

Нормалізоване рівняння $\omega(x, y) = 0$ може бути отримане із рівняння $\omega_1(x, y) = 0$ за допомогою наступної теореми [17].

Теорема. Якщо $\omega_1(x, y) \in C^m(\mathbb{R}^2)$ задовольняє умовам $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$ і $\left. \frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} > 0$, то функція $\omega \equiv \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + |\nabla\omega_1|^2}} \in C^{m-1}(\mathbb{R}^2)$, задовольняє умовам $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, $\left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1$ в усіх регулярних точках межі $\partial\Omega$.

Якщо $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega$, то для побудови нормалізованого рівняння $\partial\Omega$ можна скористатися більш простою формулою $\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}$. В деяких випадках, для нормалізації рівняння можна лише ввести сталі множники.

Наприклад, розглянемо область Ω , яка представляє собою прямокутник, обмежений прямими $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$. Вводячи області

$\Omega_1 = \left\{ (x, y) \left| \frac{1}{a} x(a - x) \geq 0 \right. \right\}$ – вертикальна смуга між прямими $x = 0$ і $x = a$;

$\Omega_2 = \left\{ (x, y) \left| \frac{1}{b} y(b - y) \geq 0 \right. \right\}$ – горизонтальна смуга між прямими $y = 0$ і $y = b$,

бачимо, що область Ω може бути подана у вигляді $\bar{\Omega} = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Розглядаючи Ω_1 і Ω_2 як двозначні предикати, запишемо предикатне рівняння області $\bar{\Omega}$

$$\bar{\Omega} \equiv \Omega_1 \wedge \Omega_2 = 1.$$

Замінюючи тепер Ω_1 і Ω_2 на ліві частини визначаючих їх нерівностей, а кон'юнкцію \wedge – \mathcal{R}_0 -кон'юнкцію \wedge_0 , отримуємо функцію

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= \left[\frac{1}{a} x(a - x) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{b} y(b - y) \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{a} x(a - x) + \frac{1}{b} y(b - y) - \sqrt{\frac{1}{a^2} x^2 (a - x)^2 + \frac{1}{b^2} y^2 (b - y)^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Функція (2.2) як раз і матиме властивості

$$\omega(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad \omega(x, y) > 0 \text{ у } \Omega, \quad \omega(x, y) < 0 \text{ зовні } \bar{\Omega}, \quad \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1,$$

де \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$, визначений в її регулярних точках.

2.2.2 Структурний метод R -функцій

Як було вказано вище, один з етапів застосування методу R -функцій в задачах чисельного аналізу фізико-механічних полів є продовження крайових умов всередину області. Для цього використовуються два основних підходи [17].

Нехай в точках $\partial\Omega$ функція φ_0 задана у вигляді

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_{0,1}(s), & s \in \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi_{0,n}(s), & s \in \partial\Omega_n, \end{cases}$$

де ділянки межі $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$ попарно різні, не мають спільних внутрішніх точок і $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n$.

Нехай далі $\varphi_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, такі, що $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_{0,i}$, а $\omega_i(x, y)$, $i = 1, \dots, n$, такі, що $\omega_i(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_i$ і $\omega_i(x, y) > 0$ в $\bar{\Omega} \setminus \partial\Omega_i$. Тоді функція

$$\varphi = \frac{\frac{\varphi_1}{\omega_1} + \dots + \frac{\varphi_n}{\omega_n}}{\frac{1}{\omega_1} + \dots + \frac{1}{\omega_n}} = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j} \quad (2.3)$$

має властивість $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$.

Формулу (2.3) називають формулою «склейки» і позначають $\varphi = \text{ЕС}\varphi_0$, де ЕС називають оператором склеювання межових значень.

Другий підхід пов'язаний з продовженням диференціальних операторів, які задані на $\partial\Omega$, в середину області Ω . Нехай $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega$ області Ω . Тоді оператор D_1 , який діє за правилом

$$D_1 u \equiv (\nabla\omega, \nabla u) = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

в регулярних точках $\partial\Omega$ задовольняє рівність

$$-D_1 u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

де \mathbf{n} – зовнішня до $\partial\Omega$ нормаль.

Зазначимо, що вираз $D_1 u$ має сенс всюди в $\bar{\Omega}$ і за допомогою оператора D_1 можна будувати жмутки функцій, нормальна похідна яких, або довільна лінійна комбінація нормальної похідної і самої функції на межі області приймає задані значення.

Означення. Загальною структурою розв'язку крайової задачі називається вираз

$$u = B(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_j\}_{j=1}^m),$$

який при довільному виборі компонент вектору Φ точно задовольняє усі крайові умови задачі. Тут B – оператор, що залежить від геометрії області Ω і ділянок $\partial\Omega_i$ її межі, а також операторів крайових умов, але не залежний від вигляду оператора A і функції f .

Відтак, структура розв'язку здійснює продовження крайових умов всередину області.

Майже усі наближені методи розв'язання крайових задач для рівнянь у частинних похідних базуються на зведенні нескінченновимірної задачі до скінченновимірної. В методі R -функцій це досягається шляхом подання невизначеної компоненти Φ структури розв'язку у вигляді суми

$$\Phi(x, y) \approx \Phi_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y),$$

де $\varphi_k(x, y)$ – відомі елементи повної функціональної послідовності;

$c_k, k = 1, 2, \dots, n$, – невідомі коефіцієнти.

Невідомі коефіцієнти $c_k, k = 1, 2, \dots, n$, обираються так, щоб найкраще (у певному сенсі) задовольнити рівняння крайової задачі.

2.3 Метод Бубнова-Гальоркіна

Нехай потрібно розв'язати рівняння

$$Au - f = 0, \quad (2.4)$$

де A – лінійний оператор, який діє у деякому гільбертовому просторі H .

Область визначення оператора A – множина $D(A)$.

Виберемо послідовність координатних елементів $\varphi_n \in D(A)$. Будемо шукати наближений розв'язок рівняння (2.4) у вигляді

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x).$$

Відповідно до методу Бубнова-Гальоркіна [14, 23, 26], коефіцієнти a_k , $k = \overline{1, n}$, обираються таким чином, аби ліва частина рівняння (2.4), після підстановки у неї u_n , була ортогональна до елементів φ_k , $k = \overline{1, n}$. Це призводить до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} (Au_n - f, \varphi_j) &= \left(A \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k - f, \varphi_j \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k A\varphi_k - f, \varphi_j \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k (A\varphi_k, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо

$$\sum_{k=1}^n a_k (A\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Система рівнянь (2.5) за формою співпадає з системою Рітца, тільки якщо

координатні функції обрані з області визначення оператора A . Звідси маємо, що для додатного оператора процес Бубнова-Гальоркіна не відрізняється від процесу Рітца.

Система елементів називається повною, якщо в H немає відмінного від нуля елемента, який ортогональний кожному елементу системи.

Вважатимемо, що при $n \rightarrow \infty$ u_n прямує до точного розв'язку $u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$, оскільки тоді функція $Au - f$ ортогональна до кожної функції φ_k , а оскільки система φ_k повна, то і $Au - f \equiv 0$, відповідно u – розв'язок рівняння (2.4).

Розглянемо достатню ознаку збіжності процесу Бубнова-Гальоркіна [14]. Нехай оператор A має вигляд $A = A_0 + K$, де A_0 – додатно визначений у даному гільбертовому просторі H оператор і $D(K) \supset D(A_0)$, тобто область визначення оператора K ширша, ніж область визначення оператора A_0 . Припустимо, що оператор A_0 є цілком неперервним в енергетичному просторі H_{A_0} . Координатну систему φ_k побудуємо виходячи з наступних умов:

- а) $\varphi_k \in D(A_0)$;
- б) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – лінійно незалежні при будь-якому n ;
- в) координатна система $\{\varphi_k\}$ повна в H_{A_0} .

Система Бубнова-Гальоркіна (2.5) у випадку $A = A_0 + K$ має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n a_k [(A_0 \varphi_k, \varphi_j) + (K \varphi_k, \varphi_j)] = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

Ортонормуємо φ_k у просторі H_{A_0} , тобто нехай

$$(A_0 \varphi_k, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j. \end{cases}$$

Система рівнянь (2.6) при цьому дещо спроститься:

$$a_j + \sum_{k=1}^n a_k (K\varphi_k, \varphi_j) = (f, \varphi_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Далі,

$$(K\varphi_k, \varphi_j) = (A_0 A_0^{-1} K\varphi_k, \varphi_j) = [T\varphi_k, \varphi_j]_{H_{A_0}},$$

де $T = A_0^{-1}K$.

Тоді $(f, \varphi_j) = (A_0 A_0^{-1} f, \varphi_j) = [f', \varphi_j]_{H_{A_0}}$, $f' = A_0^{-1}f$.

Вводимо для скороченості позначення

$$[T\varphi_k, \varphi_j]_{H_{A_0}} = \gamma_{jk}, \quad [f', \varphi_j]_{H_{A_0}} = b_j.$$

Тоді приведемо систему (2.6) до вигляду

$$a_j + \sum_{k=1}^n a_k \gamma_{jk} = b_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.7)$$

Припустимо, що оператор $T = A_0^{-1}K$ є цілком неперервним у просторі H_{A_0} . Будучи цілком неперервним, цей оператор обмежений у просторі H_{A_0} , та може бути поширений на увесь цей простір. Нехай таке поширення зроблено. Діємо на обидві частини рівняння

$$A_0 u + Ku = f \quad (2.8)$$

оператором A_0^{-1} , отримаємо нове рівняння

$$u + Tu = f'. \quad (2.9)$$

Очевидно, що будь-який розв'язок рівняння (2.8) задовольняє рівнянню (2.9). Обернене може бути невірним: може трапитись, що існує елемент простору H_{A_0} , що задовольняє рівнянню (2.9), але не належить $D(A_0)$, і тоді цей елемент неможна підставити у (2.8). Назвемо такі розв'язки рівняння (2.9) узагальненими для рівняння (2.8). Саме з таким зауваженням рівняння (2.8) і (2.9) еквівалентні.

Теорема. Наближені розв'язання рівняння (2.8), які побудовані за методом Бубнова-Гальоркіна, збігаються за енергією оператора A_0 , тобто у сенсі збіжності в H_{A_0} , до точного розв'язку цього рівняння, якщо виконуються наступні умови:

а) рівняння (2.8) має не більше одного розв'язку в H_{A_0} ;

б) оператор $T = A_0^{-1}K$ цілком неперервний у H_0 .

Теорема. Якщо K обмежений у H , а A_0^{-1} цілком неперервний у H , то оператор $T = A_0^{-1}K$ цілком неперервний у H_{A_0} .

Використовуючи вище зазначені теореми, можна сформулювати більш вузьку, але більш простішу ознаку збіжності процесу Бубнова-Гальоркіна.

Теорема. Процес Бубнова-Гальоркіна збігається, якщо виконані наступних умов:

а) рівняння $Au = f$ має не більше одного розв'язку;

б) оператор A_0^{-1} цілком неперервний, а оператор K обмежений у H .

Розглянемо однорідну задачу Діріхле для еліптичного рівняння другого порядку [20, 21, 25]:

$$-\sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik}(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^m B_i(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.10)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.11)$$

Вважатимемо, що рівняння (2.10) є невідроджуваним еліптичним, тобто існує така стала μ_0 , що для точки $\mathbf{x} \in \Omega$ і при будь яких дійсних числах t_1, \dots, t_m має місце нерівність

$$\sum_{i,k=1}^m A_{ik}(\mathbf{x})t_it_k \geq \mu_0 \sum_{i=1}^m t_i^2. \quad (2.12)$$

Вважатимемо, що $A_{ik} \in C^1(\Omega)$, $B_i, C \in C(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$. Окрім цього, нехай задача (2.10) – (2.11) має єдиний розв'язок.

Введемо до розгляду оператор

$$A_0 u \equiv - \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$$

з областю визначення

$$D(A_0) = \{u \mid u \in C^2(\Omega), u \in C(\bar{\Omega}), u \in L_2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Відомо [14], що такий оператор A_0 додатно визначений. Візьмемо

$$Ku \equiv \sum_{i=1}^m B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu.$$

Побудуємо простір H_{A_0} , поклавши

$$[u, v]_{H_{A_0}} = (A_0 u, v) = - \int_{\Omega} \sum_{i,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) v d\mathbf{x}.$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами для кратних інтегра-

лів отримуємо:

$$\begin{aligned}
 [u, v]_{H_{A_0}} &= - \sum_{i, k=1}^m \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) v d\mathbf{x} = \\
 &= \sum_{i, k=1}^m \left[\int_{\Omega} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} v \cos(u, x_i) ds \right] = \int_{\Omega} \sum_{i, k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 [u, v]_{H_{A_0}} &= \int_{\Omega} \sum_{i, k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} d\mathbf{x}, \\
 \|u\|_{H_{A_0}}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{i, k=1}^m A_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Можна показати, що оператори A_0^{-1} и $T = A_0^{-1}K$ цілком неперервні у просторі $L_2(\Omega)$ [18]. Відтак, процес Бубнова-Гальоркіна для задачі (2.10) – (2.11) збігається, тобто $\|u_n - u\|_{H_{A_0}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, де u_n – наближений розв’язок, отриманий процесом Бубнова-Гальоркіна.

Оцінимо $\|u_n - u\|_{H_{A_0}}$:

$$\|u_n - u\|_{H_{A_0}}^2 = \int_{\Omega} \sum_{i, k=1}^m A_{ik} \frac{\partial(u_n - u)}{\partial x_i} \frac{\partial(u_n - u)}{\partial x_k} d\mathbf{x}.$$

Скориставшись нерівністю (2.12), отримаємо:

$$\|u_n - u\|_{H_{A_0}}^2 = \mu_0 \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} = \mu_0 \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(u_n - u)}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} =$$

$$= \mu_0 \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial(u_n - u)}{\partial x_i} \right\|^2 = \mu_0 \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Отже, у нашому випадку зі збіжності за енергією $\|u_n - u\|_{H_{A_0}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ впливає збіжність у середньому перших похідних від u_n до відповідних похідних від u .

2.4 Застосування метода R -функцій та Бубнова-Гальоркіна в математичному моделюванні процесів магнітостатики

Побудуємо структуру розв'язку задачі (1.3) – (1.5).

Умову на нескінченності (1.5) замінимо умовою

$$u|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (2.13)$$

де контур $\partial\Omega_0$ знаходиться на достатній відстані від Ω_f (рис. 1.11).

Наприклад, за $\partial\Omega_0$ можна взяти коло $x^2 + y^2 = R_0^2$ досить великого радіусу R_0 .

Через Ω_0 позначимо розрахункову область задачі (1.3), (1.4), (2.13).

Нехай функція $\omega_0(x, y)$ така, що

- а) $\omega_0(x, y) > 0$ в Ω_0 ;
- б) $\omega_0(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_0$.

Функція $\omega_0(x, y)$ з зазначеними властивостями можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу за допомогою конструктивного апарату теорії R -функцій [8].

Тоді умові (1.3) при будь-якому вигляді невизначеної компоненти Φ буде задовольняти жмуток функцій [8, 10]

$$u = \omega_0 \Phi.$$

Для того, щоб задовольнити умовам спряження (1.4), використаємо наступний підхід [15]. Функцію $u(x, y)$ шукатимемо в вигляді

$$u(x, y) = \begin{cases} u_f(x, y) = \omega_0 \Phi - A\omega_{fv} D_1^{fv}(\omega_0 \Phi), & (x, y) \in \Omega_f, \\ u_v(x, y) = \omega_0 \Phi, & (x, y) \in \Omega_v, \end{cases} \quad (2.14)$$

де $\omega_{fv} = 0$ – нормалізоване рівняння межі $\partial\Omega_{fv}$, причому $\omega_{fv} > 0$ в Ω_f , а оператор D_1^{fv} визначається рівністю

$$D_1^{fv} = \frac{\partial\omega_{fv}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_{fv}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Оператор D_1^{fv} має властивість $D_1^{fv} u|_{\partial\Omega_{fv}} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{fv}}$, где \mathbf{n} – одинична нормаль до $\partial\Omega_{fv}$, що направлена всередину Ω_f . Тоді

$$D_1^{fv} \omega_{fv} \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = \frac{\partial\omega_{fv}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = 1.$$

Зауважимо, що функція виду (2.14) при будь-якому виборі сталої A задовольняє на $\partial\Omega_{fv}$ першій з умов спряження (1.4). Отже, функцію A виберемо так, щоб задовольнити другій з умов спряження (1.4). Отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial u_f}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{fv}} &= \frac{1}{\mu} D_1^{fv} u_f \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = \frac{1}{\mu} D_1^{fv} [\omega_0 \Phi - A\omega_{fv} D_1^{fv}(\omega_0 \Phi)] \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = \\ &= \frac{1}{\mu} \{ D_1^{fv}(\omega_0 \Phi) - A D_1^{fv} \omega_{fv} \cdot D_1^{fv}(\omega_0 \Phi) - \omega_{fv} D_1^{fv} [A D_1^{fv}(\omega_0 \Phi)] \} \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu} (1 - A) D_1^{fv}(\omega_0 \Phi) \Big|_{\partial\Omega_{fv}},$$

$$\frac{\partial u_v}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = D_1^{fv} u_v \Big|_{\partial\Omega_{fv}} = D_1^{fv}(\omega_0 \Phi) \Big|_{\partial\Omega_{fv}}.$$

Тоді друга з умов спряження (1.4) буде виконана, якщо $\frac{1}{\mu}(1 - A) = 1$,

тобто $A = 1 - \mu$.

Отже, структура розв'язку задачі (1.3), (1.4), (2.13) має вигляд

$$u(x, y) = \begin{cases} \omega_0 \Phi - (1 - \mu) \omega_{fv} D_1^{fv}(\omega_0 \Phi), & (x, y) \in \Omega_f, \\ \omega_0 \Phi, & (x, y) \in \Omega_v. \end{cases} \quad (2.15)$$

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Mathematica 11.1 як система символної математики

Mathematica – це модульна система програмного забезпечення, де ядро, яке, фактично, виконує розрахунки, відокремлено від інтерфейсу, який відповідає за взаємодію з користувачем [28].

Для математичних розрахунків така конструкція має багато переваг на відміну від монолітної системи. Наприклад, інтерфейс Mathematica може бути виконаний на декількох ядрах з одного інтерфейсу. Крім того, Mathematica – це інтерпретована мова функціонального програмування, що підтримує процедурне програмування з використанням програми і об'єктно-орієнтований підхід. Також даний пакет оснащений великою кількістю математичних функцій, алгоритмів та методами візуалізації даних.

На сьогодні Mathematica вдосконалюється і розширюється. Тепер стає можливо представляти неймовірно широкий спектр явищ сучасного світу.

У побудові Mathematica 11.1 розробники продовжили рухатися у напрямку невідомих обчислювальних математичних областей. Так, наприклад, завдяки цьому, ми змогли більш точно врахувати геометрію області для задачі магнітостатики та витратили менше потужності та часу на обчислення. Також даний математичний пакет добре оснащений інструментами та методами візуалізації даних, що допомагає науковцям та дослідникам проводити аналіз отриманих результатів у вигляді зрозумілих графічних зображень.

Отже, для виконання поставлених задач, після аналізу можливостей різних середовищ програмування і математичних пакетів був обраний пакет Mathematica, тому що даний пакет, з нашої точки зору, є найбільш оптимальним для проведення теоретичного і чисельного аналізу, і, зокрема, для розв'язання задач магнітостатики.

3.2 Опис програми

Програма моделювання задачі магнітостатики була виконана у математичному пакеті Mathematica 11.1. Структура програми була створена у Notebook середовищі Mathematica 11.1, де було проведено розрахунки на невеликій кількості базисних функцій. Невелика кількість базисних функцій обумовлена тим, що експоненціально збільшується час розрахунку, а отже, потрібна більша обчислювальна потужність.

Перший блок програми «Data preparation» відповідає за задавання розмірів магніту, магнітної проникливості для вакууму та немагнітної середи.

Другий блок «*R*-functions» задає систему базових операцій: *R*-кон'юнкцію, а також містить в собі набір побудованих функцій омега для розглядуваних областей магніту. Також задаємо функцію магнітної проникливості та компоненту вектору об'ємної щільності струму.

Третій блок «Coordinate functions» включає в себе задавання координатних функцій та розрахунок нормалізуючих коефіцієнтів.

Четвертий блок «Calculation Gauss nodes for integration» задає параметри для формули Гаусса наближеного обчислення інтегралів.

П'ятий блок «Calculation Galerkin system» відповідає за формування та розв'язання системи Бубнова-Гальоркіна.

Шостий блок «Output of result. Comparing with the exact solution» містить графічний аналіз отриманих результатів.

Код програми наведено в додатку А

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Для побудови наближеного розв'язку задачі (1.3) – (1.5) невизначену компоненту Φ в структурі (2.15) апроксимуємо виразом вигляду

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^n c_i \tau_i, \quad (4.1)$$

де $\{\tau_i\}$ – повна в $L_2(\Omega_0)$ система функцій (тригонометричні або степеневі поліноми, сплайни, тощо);

c_1, \dots, c_n – невизначені коефіцієнти.

Підставивши (4.1) в (2.15), отримаємо, що наближений розв'язок задачі (1.3) – (1.5) шукається у вигляді

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y), \quad (4.2)$$

$$\text{де } \varphi_i = \begin{cases} \omega_0 \tau_i - (1 - \mu) \omega_{fv} D_1^{fv}(\omega_0 \tau_i), & (x, y) \in \Omega_f, \\ \omega_0 \tau_i, & (x, y) \in \Omega_v. \end{cases}$$

Для знаходження коефіцієнтів c_1, \dots, c_n далі можна використати будь-який варіаційний або проєкційний метод. Так, наприклад, за методом Гальоркіна, коефіцієнти c_1, \dots, c_n знайдемо з умови ортогональності відхилу, який отримується підстановкою (4.2) в (1.3), функціям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ [14]. Це призводить до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} c_i = b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

де

$$a_{ij} = \iint_{\Omega_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) \right] \varphi_j dx dy, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$b_j = -\mu_0 \iint_{\Omega_c} J_z(x, y) \varphi_j dx dy, \quad j = 1, \dots, n.$$

У випадку тестової задачі, коли за Ω_0 обране коло радіусу R_0 та феромагнетик також обмежений колами радіусів r і R ($r > R$), функції ω_0 та ω_{fv} можна взяти у вигляді

$$\omega_0(x, y) = R_0^2 - x^2 - y^2,$$

$$\omega_{fv}(x, y) = \left[\frac{1}{2r} (x^2 + y^2 - r^2) \right] \wedge_0 \left[\frac{1}{2R} (R^2 - x^2 - y^2) \right],$$

де \wedge_0 – знак R_0 -кон'юнкції [17, 27]:

$$g_1 \wedge_0 g_2 \equiv g_1 + g_2 - \sqrt{g_1^2 + g_2^2}.$$

Обчислювальні експерименти були проведені для таких значень параметрів: $R_0 = 20$ м, $R = 10$ м, $r = 3$ м, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, Ω_c описується нерівністю $1 - (x - 1)^2 - y^2 > 0$, а $J_z(x, y) = 10^8 y(1 - (x - 1)^2 - y^2)$ А/м².

За систему функцій $\{\tau_i\}$ в процесі реалізації методу Гальоркіна була обрана система гармонічних поліномів.

Значеннями феромагнітної проникності були обрані наступні значення для різних матеріалів, зокрема, для феромагнетиків: сталі $\mu = 700$ Гн/м та нікелю $\mu = 100$ Гн/м, та для парамагнетика алюмінію $\mu = 2,22 \cdot 10^{-5}$ Гн/м.

На рис. 4.1 – рис. 4.18 наведено отримані поверхні компонент $B_x = \frac{\partial u}{\partial y}$,

$B_y = -\frac{\partial u}{\partial x}$ вектору магнітної індукції, лінії рівня та розподіли при фіксованих

значеннях координат для відповідних компонент кожного з матеріалів.

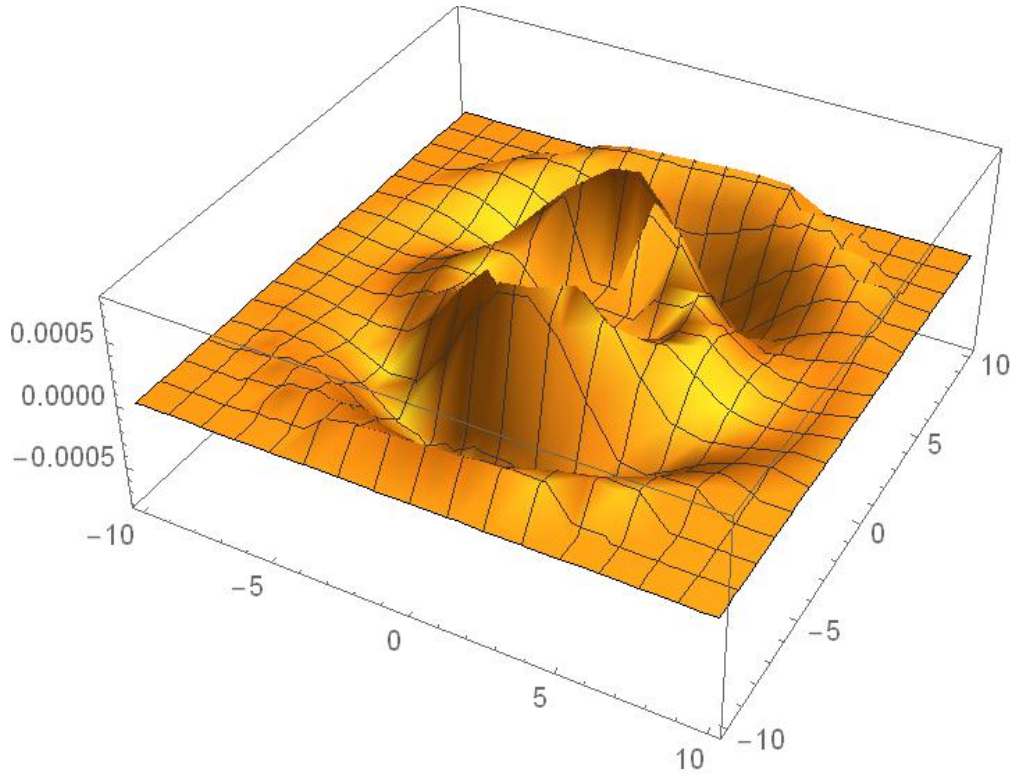


Рисунок 4.1 – Поверхня B_x для сталі

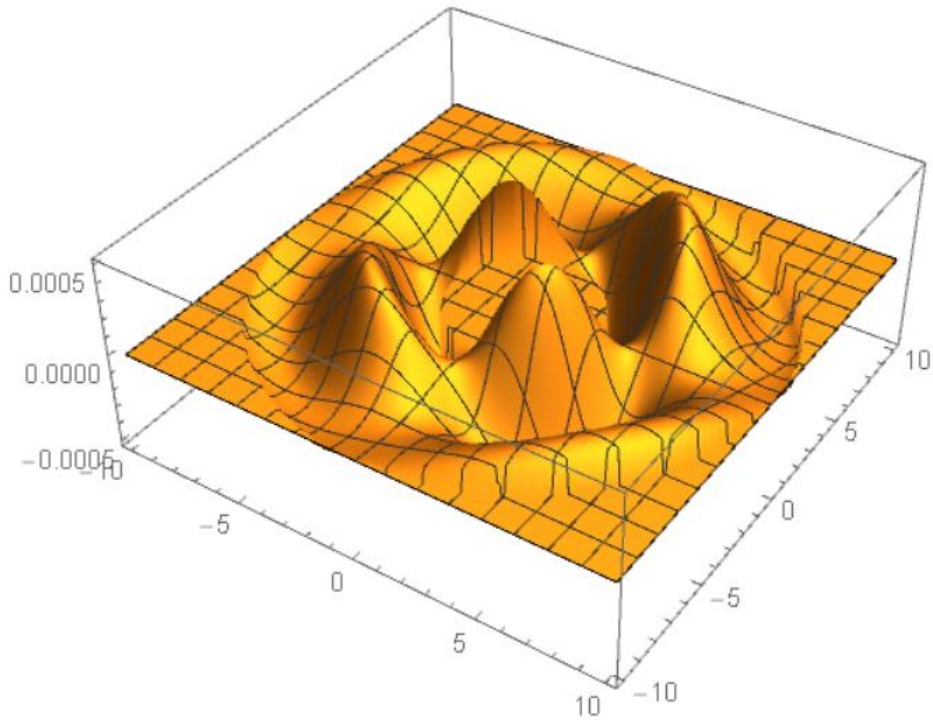


Рисунок 4.2 – Поверхня B_y для сталі

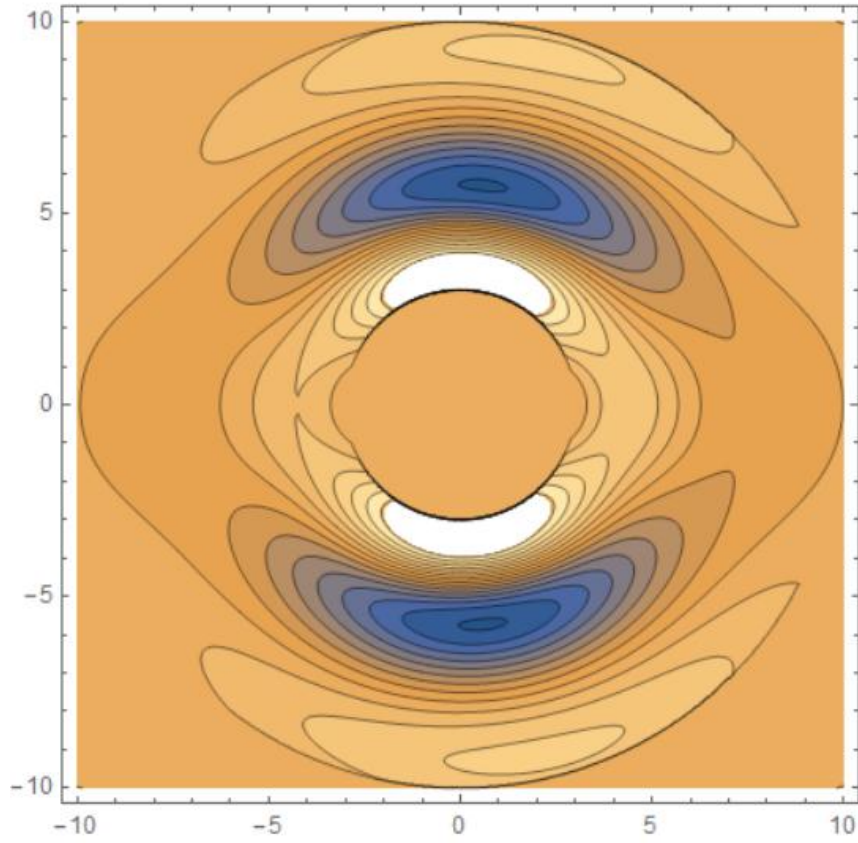


Рисунок 4.3 – Лінії рівня поверхні V_x для сталі

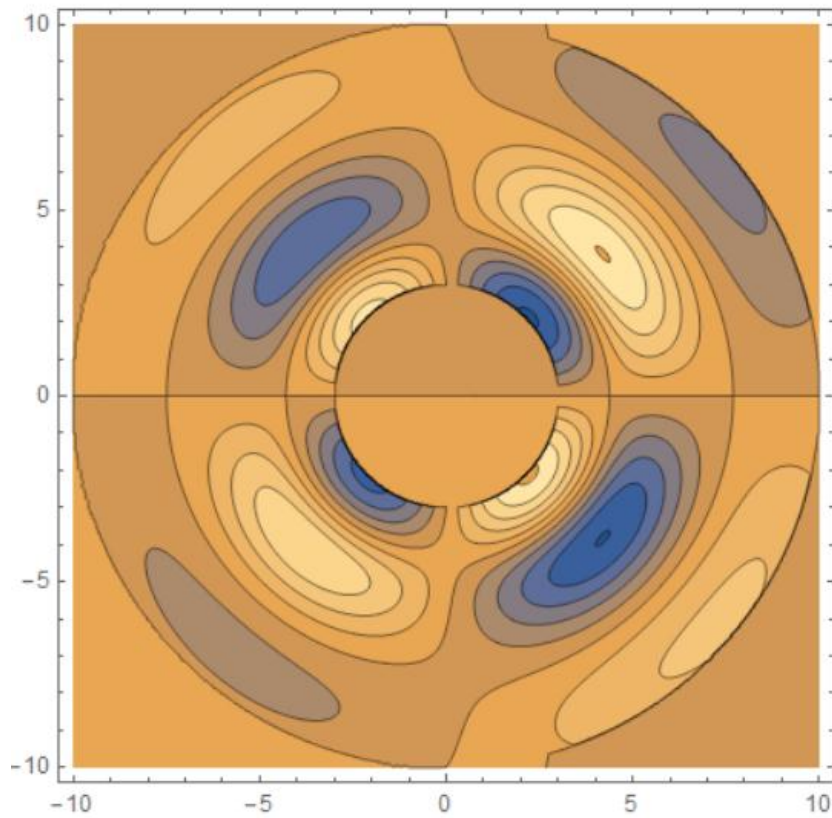


Рисунок 4.4 – Лінії рівня поверхні V_y для сталі

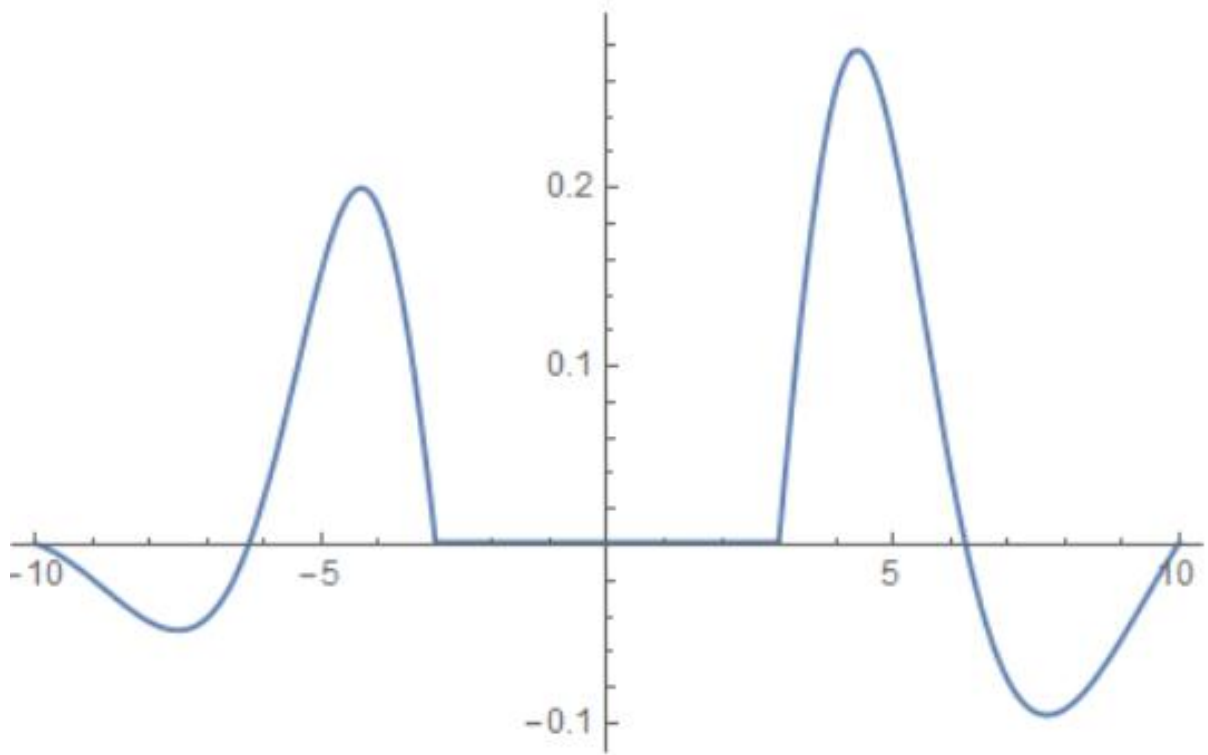


Рисунок 4.5 – Розподіл компоненти B_x при $y = 0$ для сталі

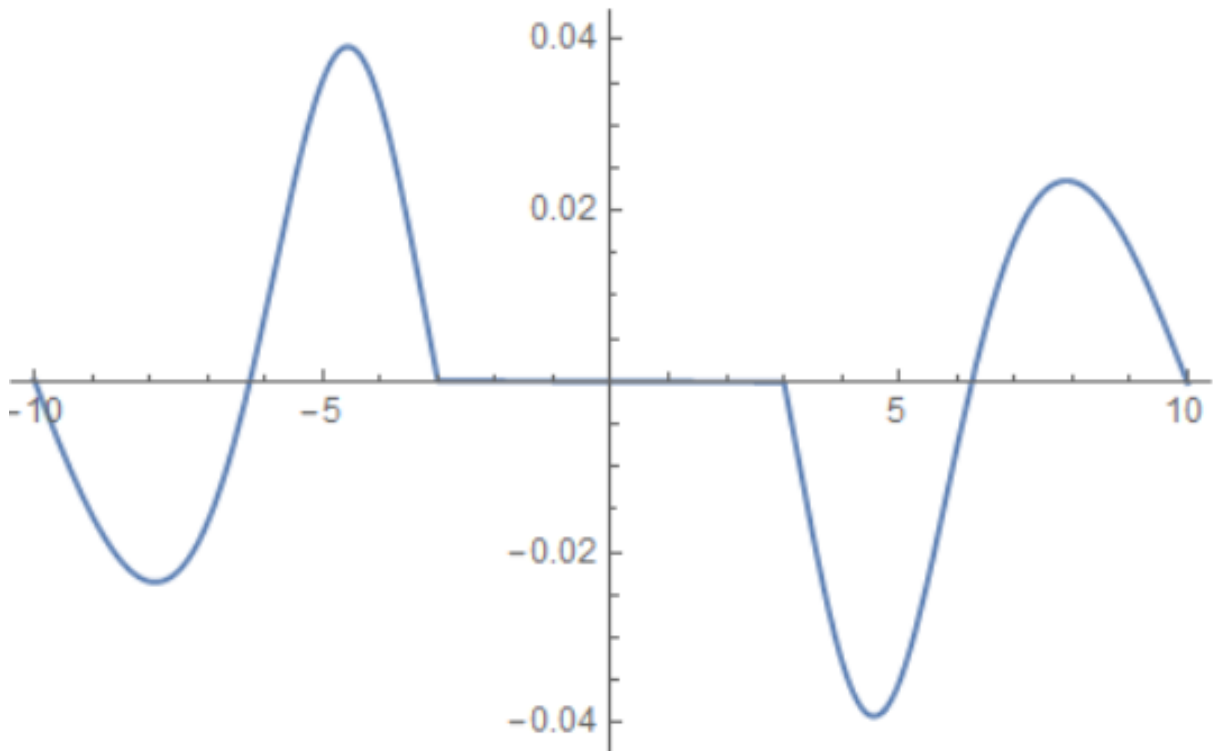


Рисунок 4.6 – Розподіл компоненти B_y при фіксованому $x = 0$ для сталі

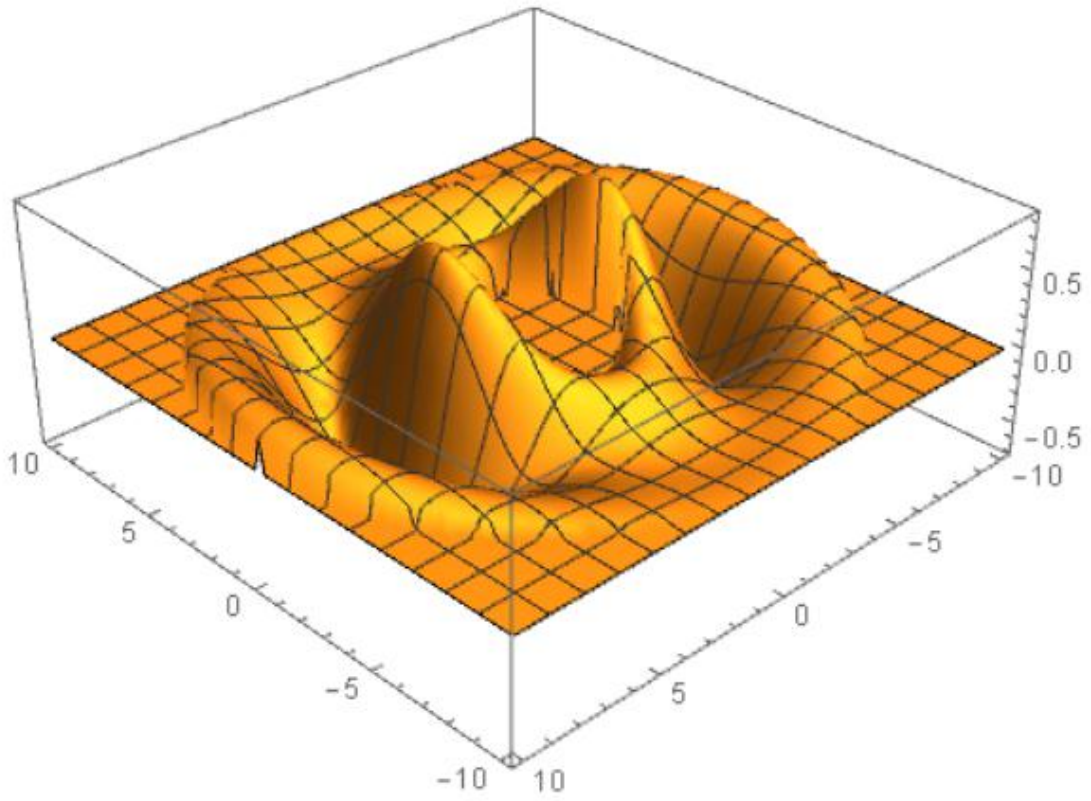


Рисунок 4.7 – Поверхня V_x для нікелю

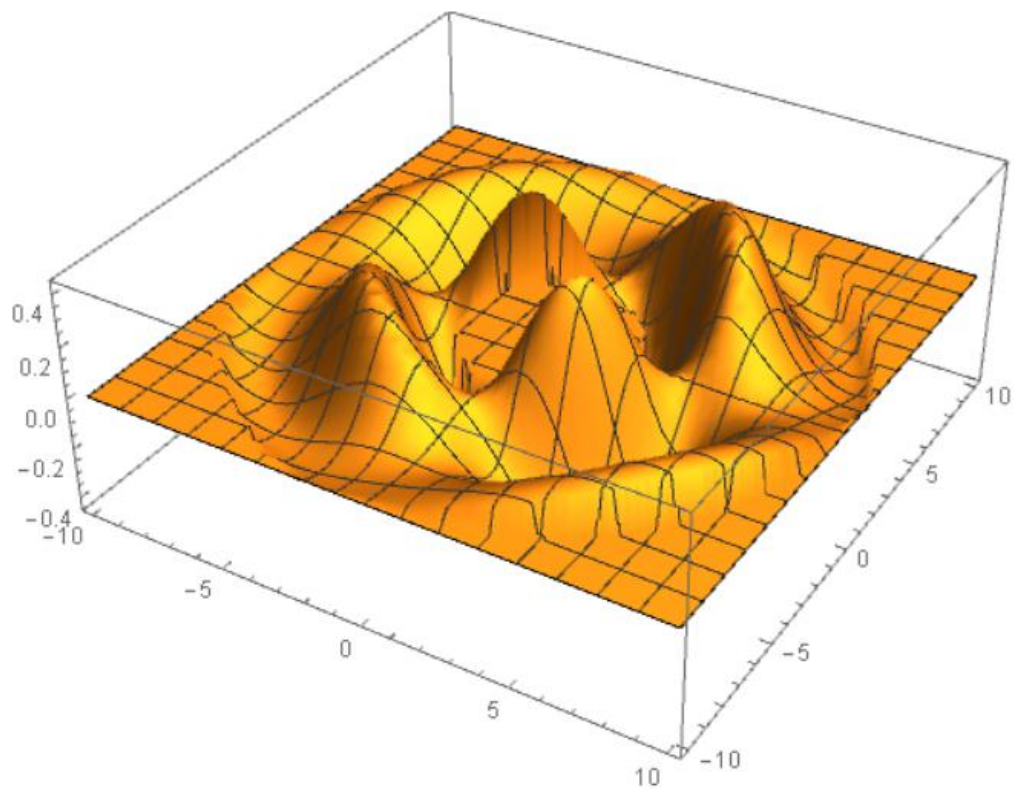


Рисунок 4.8 – Поверхня V_y для нікелю

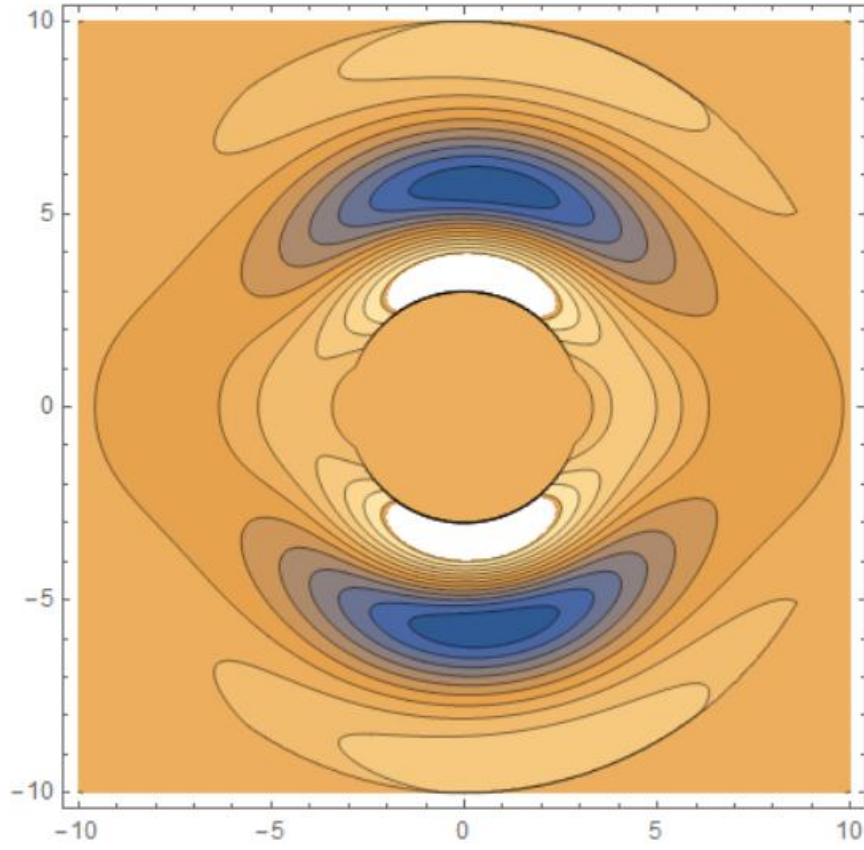


Рисунок 4.9 – Лінії рівня поверхні V_x для нікелю

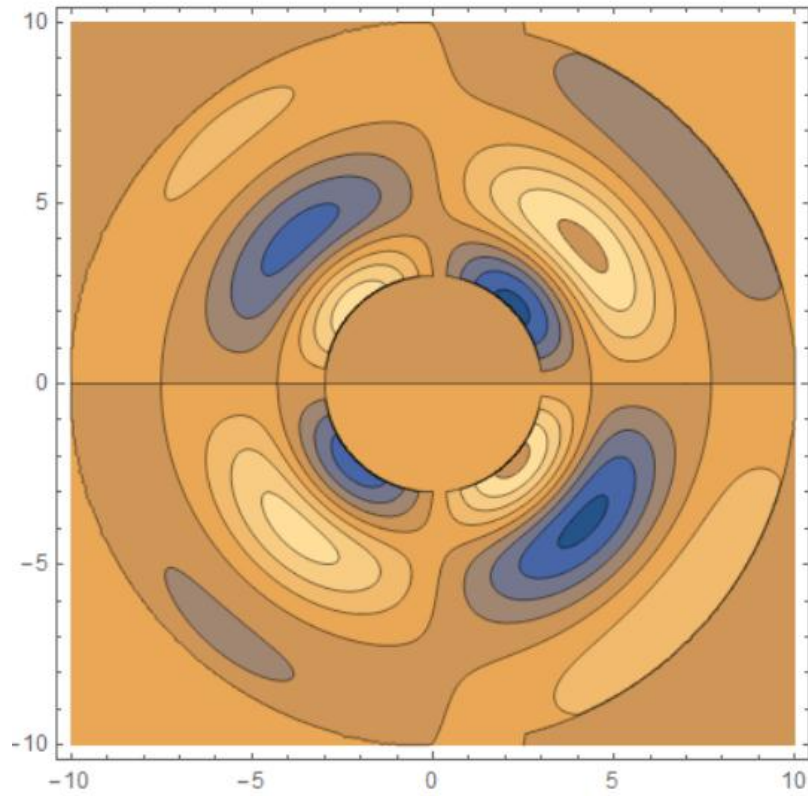


Рисунок 4.10 – Лінії рівня поверхні V_y для нікелю

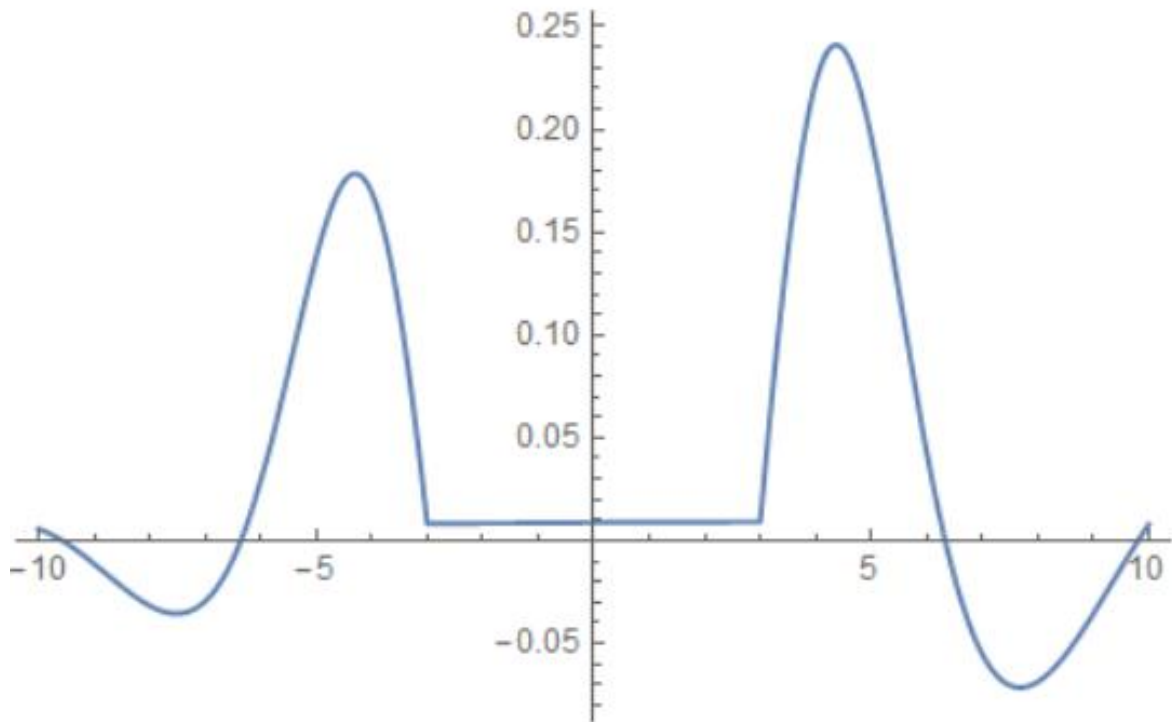


Рисунок 4.11 – Розподіл компоненти B_x при $y = 0$ для нікелю

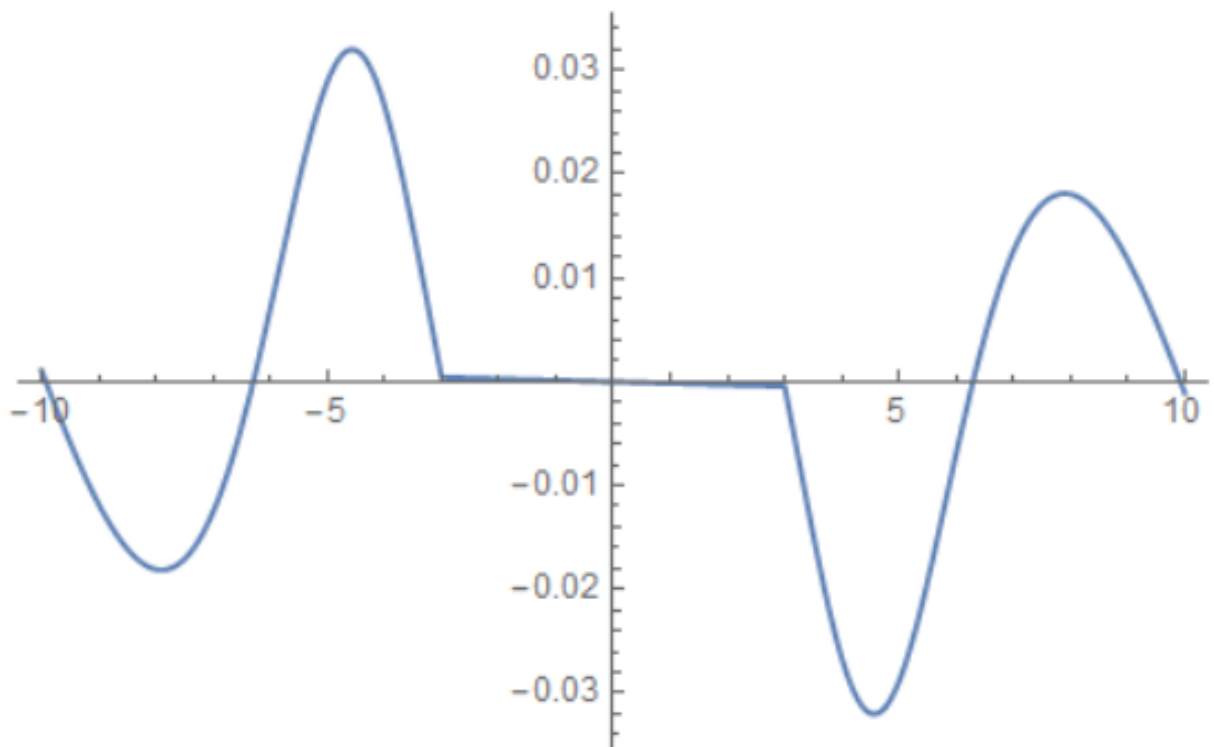


Рисунок 4.12 – Розподіл компоненти B_y при $x = 0$ для нікелю

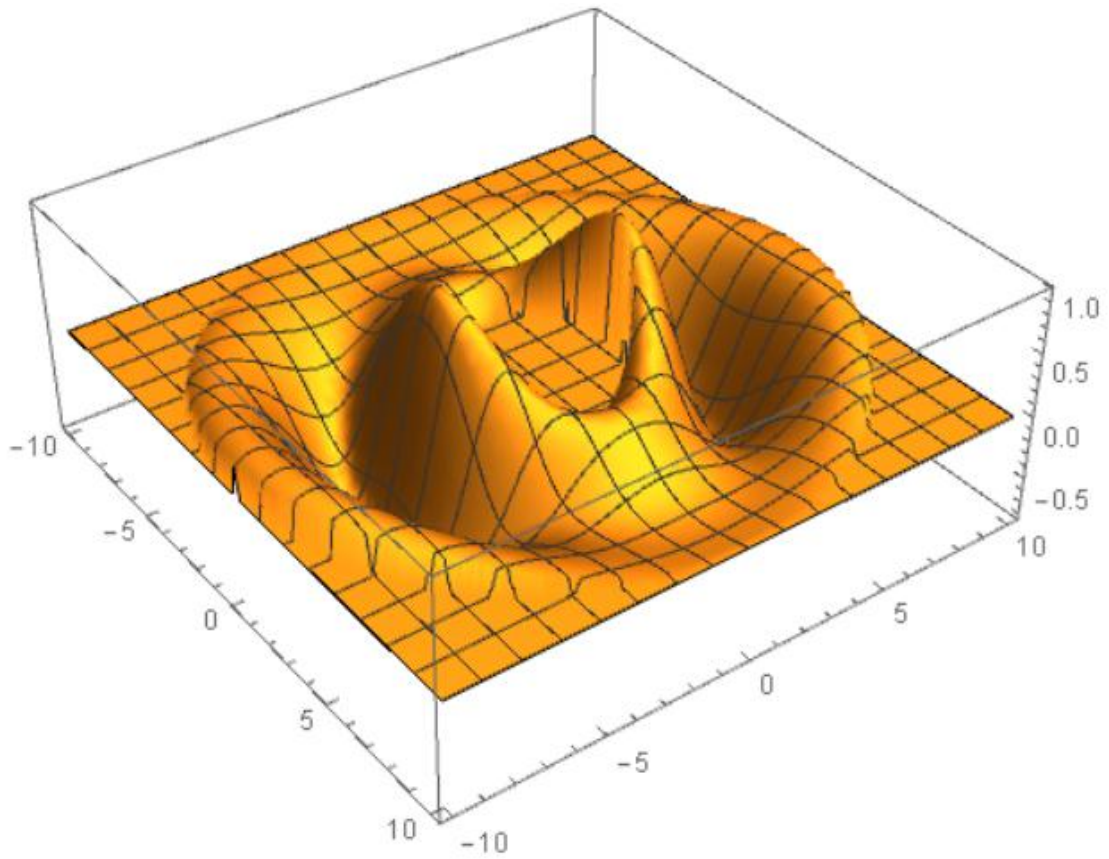


Рисунок 4.13 – Поверхня V_x для алюмінію

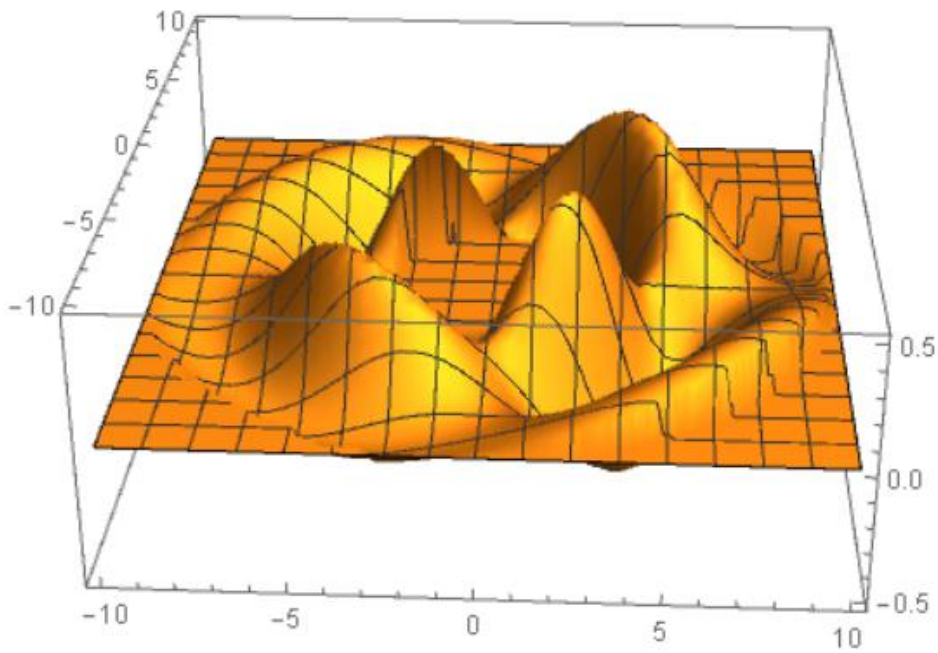


Рисунок 4.14 – Поверхня V_y для алюмінію

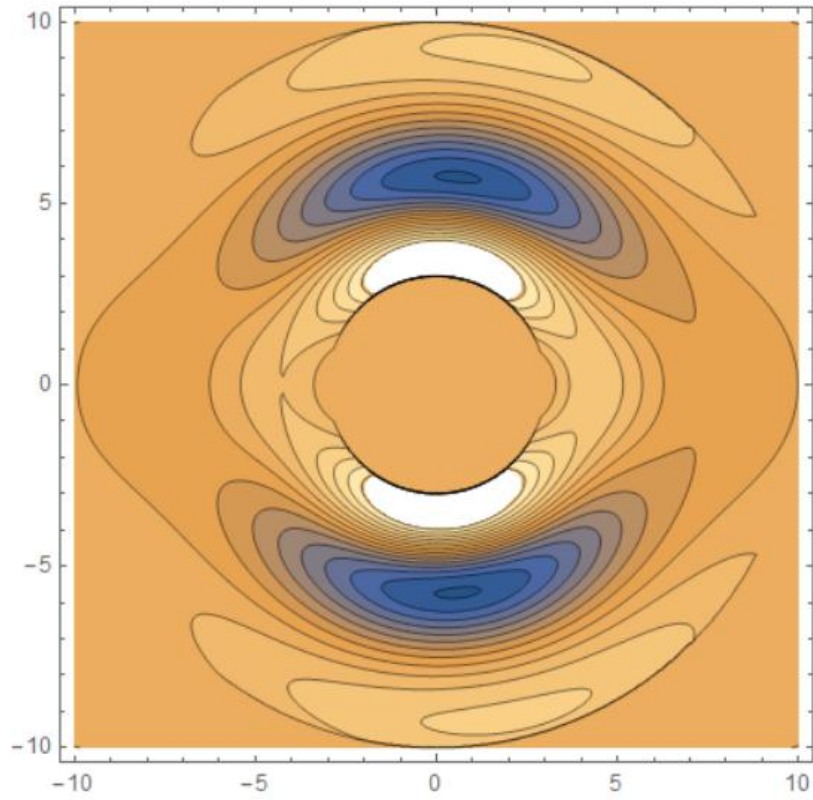


Рисунок 4.15 – Лінії рівня поверхні V_x для алюмінію

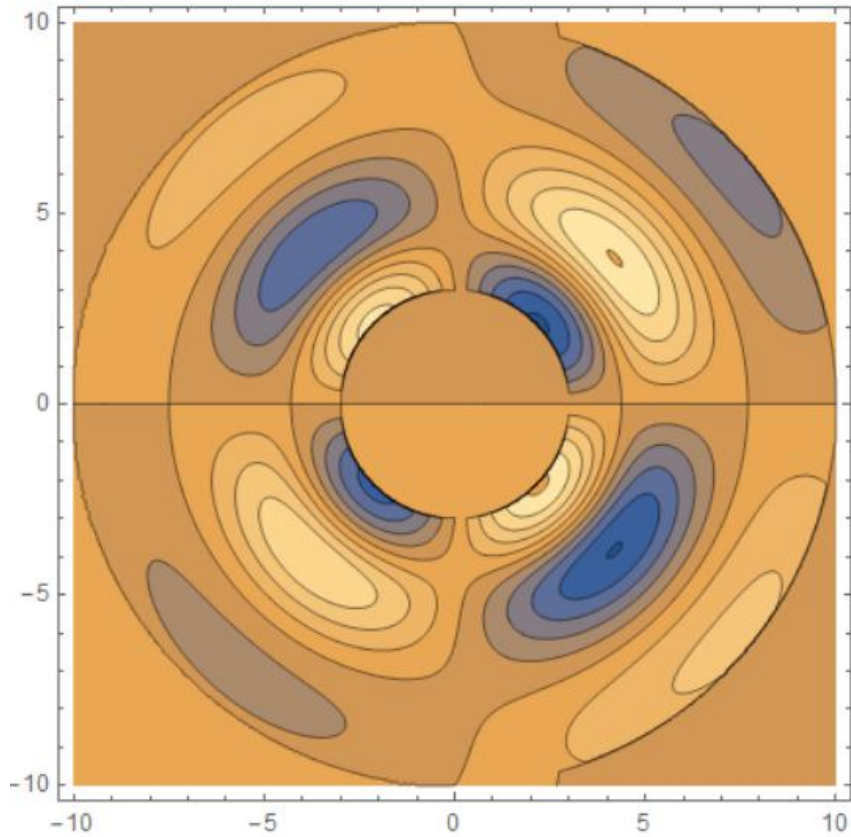


Рисунок 4.16 – Лінії рівня поверхні V_y для алюмінію

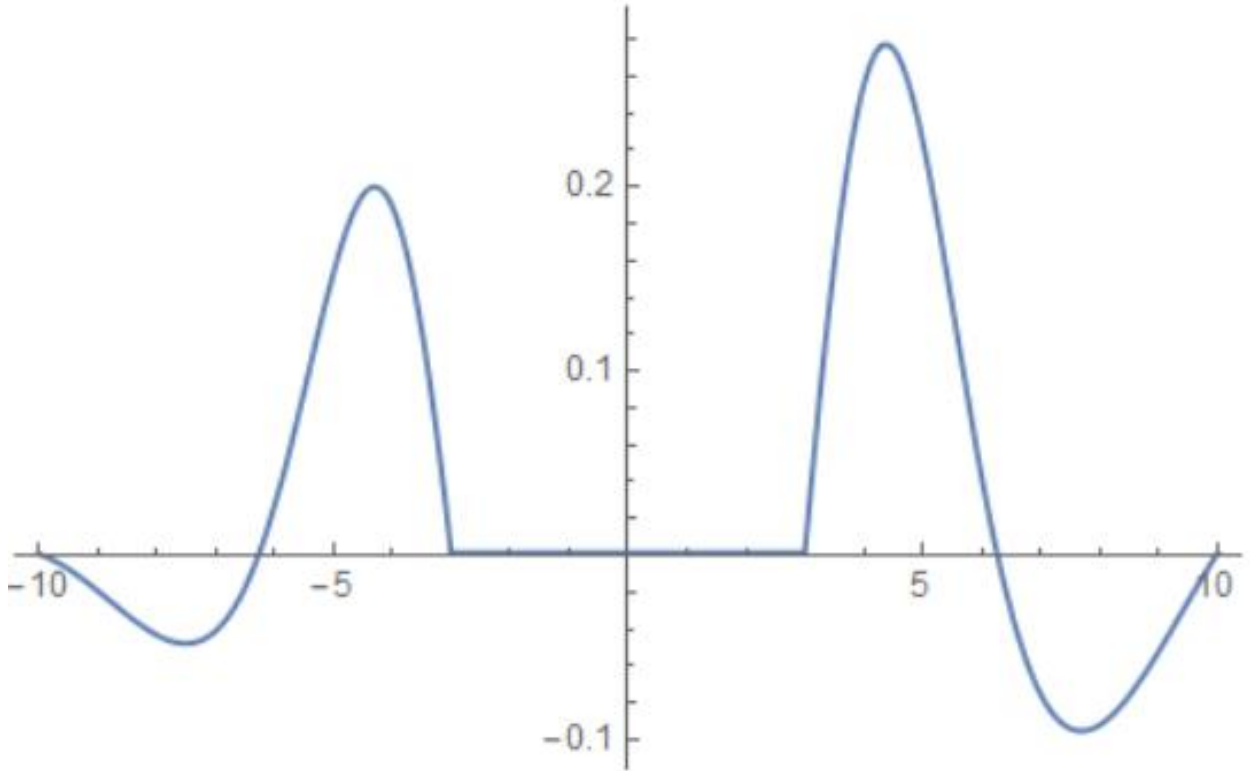


Рисунок 4.17 – Розподіл компоненти B_x при $y = 0$ для алюмінію

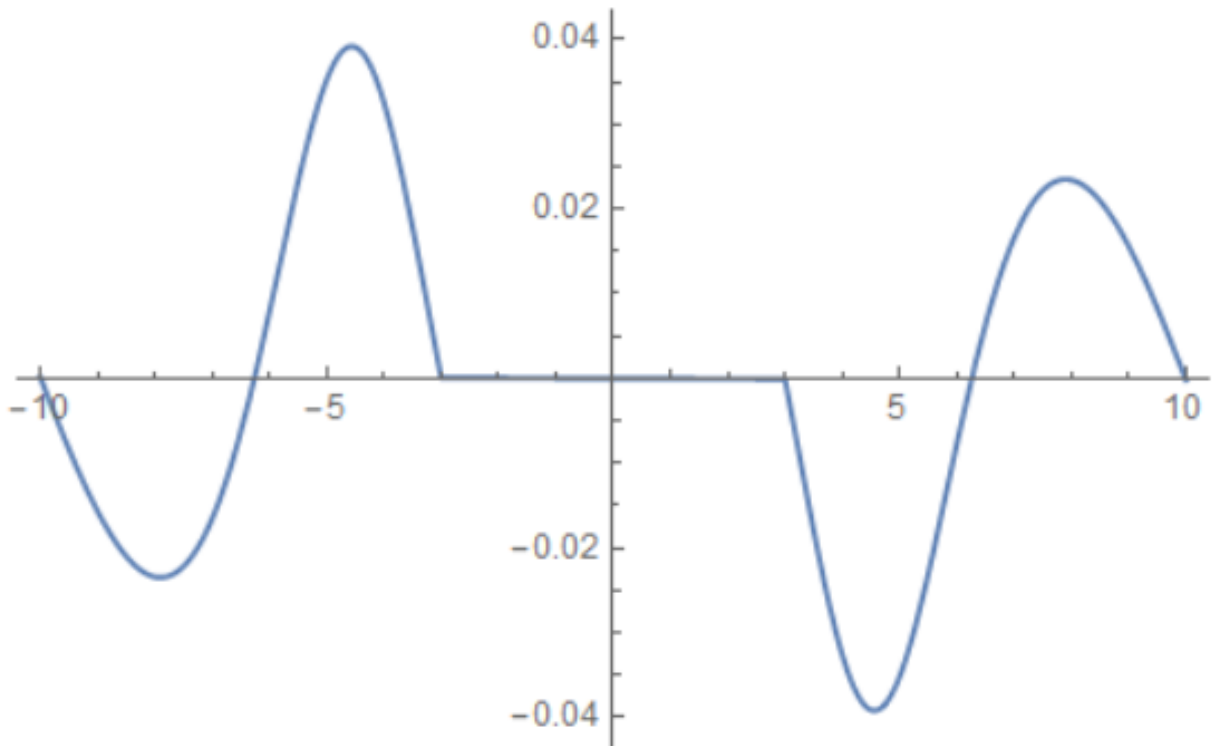


Рисунок 4.18 – Розподіл компоненти B_y при $x = 0$ для алюмінію

Отримані чисельні результати добре узгоджуються з результатами фізичних експериментів та результатами, відомими з літератури [9, 18, 19].

Результати атестаційної роботи було опубліковано у одній статті у науковому фаховому виданні України [5] та представлено на чотирьох наукових конференціях:

– Міжнародна XXV конференція RuPAC – 2016 по прискорювачах заряджених частинок [22];

– 20-й Ювілейний Міжнародний форум «Радіоелектроніка і молодь в XXI столітті» (Харків, ХНУРЕ, квітень 2017) [4];

– Студентська наукова конференція з прикладної математики та комп'ютерних наук СНКПМКН – 2017 (Львів, ЛНУ 2017) [3];

– 21-й Міжнародний форум «Радіоелектроніка і молодь в XXI столітті» (Харків, ХНУРЕ, квітень 2018) [2].

Метод показав свою ефективність при застосуванні його до тестової задачі і в подальшому може бути застосований при проведенні реальних розрахунків магнітостатичних систем.

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Результати атестаційної роботи можуть знайти застосування в багатьох галузях науки і техніки сучасного світу. Наприклад, у дослідженнях фізичних процесів магнітних систем. Зважаючи на швидкі темпи зростання обчислювальної потужності комп'ютерної техніки, створений програмний продукт може застосовуватися для розв'язання практичних задач дослідження процесів магнітостатики. З огляду на розвиток даної галузі та велику собівартість матеріалів, варто приділяти більше уваги моделюванню магнітних систем для кращого результату.

На відміну від сіткових методів, які дають розв'язок задачі у вигляді матриці значень функції, розв'язок поставленої крайової задачі отримано у наближеному аналітичному вигляді, що полегшує подальше застосування результатів на практиці для відновлення поверхонь компонент вектору магнітної індукції. Також необхідно зауважити, що методи реалізовані в даній роботі можуть бути застосовані для магнітів більш складної геометричної форми.

Наступним кроком у дослідженні задач магнітостатики, є доцільним зосередити увагу на розв'язанні подібних крайових задач для інших моделей магніту.

ВИСНОВКИ

У роботі біло розглянуто задачу математичного моделювання магнітної системи. Математичною моделлю розглядуваної системи є крайова задача для z -координати векторного потенціалу вектору магнітної індукції (задача магнітостатики). Для її чисельного аналізу було запропоновано використати структурний метод R -функцій. Також було побудовано структуру розв'язку заданої крайової задачі, яка враховує умови спряження на межі контакту «ферромагнетик-вакуум». Для апроксимації невизначеної компоненти структури розв'язку використано проєкційний метод Гальоркіна. Застосування вище вказаних методів дозволило зробити висновки про ефективність цих методів у застосуванні до розв'язання задач магнітостатики для конкретних областей та значень параметрів.

Проведено обчислювальні експерименти для різних матеріалів (сталь, нікель, алюміній). Числові результати представлено у вигляді графіків поверхонь компонент $B_x = \frac{\partial u}{\partial y}$, $B_y = -\frac{\partial u}{\partial x}$ вектору магнітної індукції, ліній рівня та розподілів при фіксованих значеннях координат. Отримані результати добре узгоджуються з результатами фізичних експериментів та числовими результатами, відомими з літератури.

Використання результатів цієї роботи, зокрема розробленого програмного продукту, дозволять досягти значного підвищення швидкодії та точності при математичному моделювання процесів магнітостатики.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Гибкіна Н. В., Сидоров М. В., Шпакович М. О. Застосування методу R -функцій до математичного моделювання плоских стаціонарних повільних течій в'язкої рідини // *Радиоэлектроника и информатика*. 2019. № 2 (85). С. 18–25.
2. Заверуха О. І. Математичне моделювання деяких задач магнітостатики методом R -функцій // 22-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 17-19 квітня 2018 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2018. С. 74–75.
3. Заверуха О. І. Математичне моделювання деяких магнітних систем методом R -функцій // Міжнародна студентська наукова конференція з прикладної математики та комп'ютерних наук „СНКПМКН-2017” : зб. тез доповідей (м. Львів, 27-28 квітня 2017 р.). Львів : ЛНУ ім. І.Франка, 2017. С. 73–75.
4. Заверуха О. І. Математическое моделирование некоторых магнитных систем методом R -функций // 21-й Міжнародний молодіжний форум «Радіоелектроніка та молодь у ХХІ столітті» : зб. матеріалів форуму (м. Харків, 25-27 квітня 2017 р.). Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2017. С. 70–71.
5. Заверуха О. І., Сидоров М. В., Яловега І. Г. Застосування методу R -функцій в математичному моделюванні магнітних систем // *Бионика интеллекта*. 2017. № 2 (89). С. 50–55.
6. Згуровський М. З., Панкратова Н. Д. Основи системного аналізу. Київ : Видавнича група ВНУ, 2007. 544 с.
7. Катренко А.В. Системний аналіз. Львів : “Новий світ – 2000”, 2011. 396 с.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, Невский Диалект, 2004. 816 с.
9. Компьютерное моделирование магнитных систем некоторых физических установок / Е. П. Жидков, И. Г. Волошина, Р. В. Полякова [и др.] // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2009. Т. 1, № 2. С. 189–198.
10. Кравченко В. Ф., Рвачев В. Л. Алгебра логики, атомарные функции и

вейвлеты в физических приложениях. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 416 с.

11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В. 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 656 с.

12. Лямец В.И., Тевяшев А.Д. Системный анализ. Вводный курс. Харьков : ХНУРЭ, 2004. 448 с.

13. Максименко-Шейко К. В. *R*-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харків : ІПМаш НАН України, 2009. 306 с.

14. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Москва : Наука, 1970. 512 с

15. Темников А. В., Слесаренко А. П. Современные приближенные аналитические методы решения задач теплообмена. Самара : Изд-во Самар. политехн. ин-та, 1991. 92 с.

16. Подгорный А. Р., Сидоров М. В. Метод численного анализа фильтрационных течений под каскадом гидросооружений // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2019. № 1 (101). С. 115–131.

17. Рвачев В. Л. Теория *R*-функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

18. Численное моделирование распределения поля магнита СП-40 установки "МАРУСЯ" и сравнение результатов с экспериментальными данными / А. А. Балдин, И. Г. Волошина, Е. Е. Перепелкин [и др.] // Журнал технической физики. 2007. Т. 77, № 11. С. 7–16.

19. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц / Э. А. Айрян, Е. П. Жидков, А. В. Федоров [и др.] // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1990. Т. 21, Вып. 1. С. 251–307.

20. Artiukh A. V., Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of slow steady and unsteady viscous flow by means of *R*-functions method // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2019. № 1 (48). С. 29–39.

21. Artyukh A., Sidorov M. Mathematical modeling and numerical analysis of nonstationary plane-parallel flows of viscous incompressible fluid by *R*-functions and

Galerkin method // ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes. 2014. V. 3, № 3. P. 3–11.

22. Zaverukha O. I., Sidorov M. V. Use of Structural-Variational Method of R -functions in Mathematical Modeling of Magnetic Systems // Proc. 25th Russian Particle Accelerator Conf. (RuPAC'16), St. Petersburg, Russia, Nov. 2016, paper THPSC002. P. 538–540.

23. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of mass transfer of a cylindrical body with the uniform translational flow // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2018. № 2 (45). С. 22–29.

24. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V., Sytnykova I. V. Method of numerical analysis of the problem of stationary flow past bodies of revolution by viscous fluid. // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2018. № 1 (44). С. 50–57.

25. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R -function method // Journal of Engineering Mathematics. 2015. V. 91. P. 59–79.

26. Lamtyugova S. N., Sidorov M. V. Numerical analysis of the problem of flow past a cylindrical body applying the R -functions method and the Galerkin method // ECONTECHMOD. An International Quarterly Journal on Economics in Technology, New Technologies and Modelling Processes. 2014. V. 3, № 3. P. 43–50.

27. Rvachev V. L., Sheiko T. I. R -functions in boundary value problems in mechanics // Applied Mechanics Reviews. 1995. V. 48, № 4. P. 151–188.

28. The Wolfram Mathematica. URL : <http://www.wolfram.com/index.ru.html> (дата звернення: 24.09.2019).