

## ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ОЦЕНКИ ОШИБОК ПАССИВНОГО СЛЕДЯЩЕГО ФИЛЬТРА

С 50-х годов фазовые следящие системы, использующие системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), играют заметную роль в связи, управлении и измерениях при синхронизации (синтезе) несущего сигнала [1] и шкал времени в цифровых сетях связи [2]. При использовании ФАПЧ для угловой демодуляции [3] эффект аналогичен применению расширенного фильтра Калмана [4]. Альтернативный подход основан на автоматической подстройке частоты (АПЧ) пассивного следящего фильтра (СФ). Поскольку ФАПЧ действует как активный СФ с полосой много меньшей, чем у наилучшего высокочастотного LC-контура, то в течение нескольких десятилетий АПЧ не имела широкого применения.

Новые возможности для АПЧ открылись с применением резонаторов и фильтров на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Отметим два применения. В работе [5] М. Дрисколл показал, что для генерирования малошумящих СВЧ-сигналов в полосе частот отстройки до нескольких килогерц использование каскадно включенных ПАВ-резонаторов на 10 дБ более эффективно, чем применение ФАПЧ. В работе [6] показано применение ангармонического контура кварца как СФ-датчика нестабильности частоты, работающего при соотношении сигнал/шум (ССШ), близком к единице.

На рис. 1 показана структура АПЧ с пассивным СФ. Слежение за входом достигается следующим образом. Если частота СФ изменилась, то фазовым детектором (ФД) измеряется соответствующий сдвиг между фазами  $\phi_s$  и  $\phi_f$  и СФ подстраивается через фильтр нижних частот (ФНЧ). При этом регулярная и случайная ошибки слежения в первую очередь зависят от чувствительности (крутизны) фазово-частотной характеристики (ФЧХ) СФ.

Поскольку крутизна ФЧХ определяется как отношение фазового сдвига к соответствующему изменению частоты, задача статистической оценки ошибок слежения сводится к вероятностному анализу взвешенного фазового сдвига двух шумящих гармонических колебаний с частотами левее и правее резонанса.

### Модель СФ

Будем полагать, что СФ линеен, а источник его флуктуаций приведен ко входу в виде гауссовского шума  $n(t)$  (рис.1). На рис.2 показан пример ФЧХ СФ, где фазы  $\phi_1(t)$  и  $\phi_2(t)$  соответствуют частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  левее и правее резонансной частоты  $\omega_0$ .

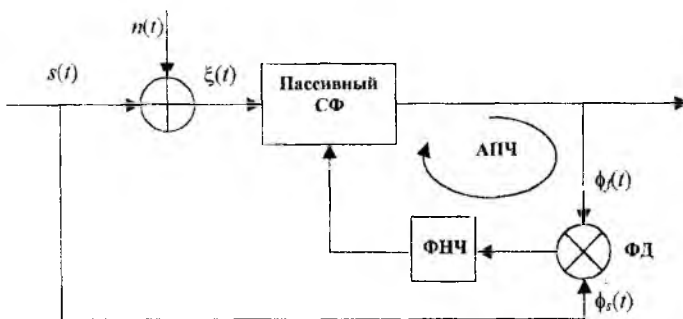


Рис. 1

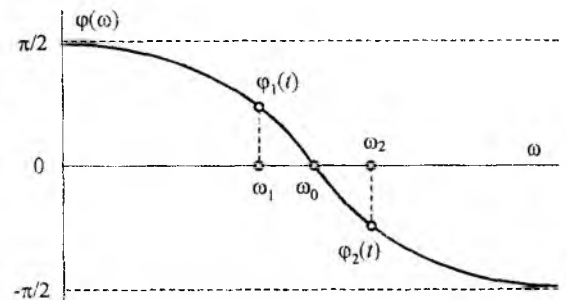


Рис. 2

Для гармонического входного сигнала  $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\omega t + \vartheta)$ , где  $A_0$  и  $\vartheta$  – константы;  $\Delta\omega$  – сдвиг частоты по отношению к  $\omega_0$ , гауссовский шум опишем узкополосной моделью  $n(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$ , где  $0 \leq A(t)$  – случайная амплитуда, распределенная по закону Релея и  $-\pi \leq \theta(t) \leq \pi$  – равномерно распределенная приведенная случайная фаза [7]. Тогда сумма сигнала и шума находится как  $\xi(t) = s(t) + n(t) = V(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]$ , где  $0 \leq V(t)$  и  $|\psi(t)| \leq \pi$  – случайная огибающая и приведенная фаза.

В работе [8] Беннет показал, что для упомянутой выше модели сигнала  $\xi(t)$  его фаза  $|\psi(t) \leq \pi$  имеет условное распределение

$$p(\psi|\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \left[ 1 + a\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{a^2}{2} \cos^2 \theta\right) \Phi(a \cos \theta) \cos \theta \right], \quad (1)$$

где  $\theta = \Delta\omega t + \vartheta - \psi$ ;  $a = A_0 / \sigma_n$  – ССШ;  $\sigma_n^2$  – дисперсия шума  $n(t)$ ;  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  – интеграл вероятности. При прохождении через линейный СФ фаза входного сигнала получает приращение на величину фазы ФЧХ СФ  $\beta(\omega)$  и, как следует из [6], распределение фазы по модулю  $2\pi$ , т.е.  $|\varphi(t) \leq \pi$ , для  $\vartheta = 0$  находится как

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \left\{ 1 + a\sqrt{2\pi} \exp\left[\frac{a^2}{2} \cos^2(\varphi - \beta)\right] \Phi[a \cos(\varphi - \beta)] \cos(\varphi - \beta) \right\}. \quad (2)$$

Отметим, что более общее распределение фазы для нестационарного входного сигнала  $s(t)$  можно найти в работе [9].

Вероятностное распределение крутизны ФЧХ

Определим крутизну ФЧХ СФ для  $0 \leftarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  как

$$\varphi'_\omega(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{\omega_2 - \omega_1} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta\omega}, \quad (3)$$

где фазы  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  оцениваются в различные моменты времени и являются статистически независимыми процессами, распределенными по закону (2). При этом совместную плотность распределения вероятностей независимых процессов  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  запишем как

$$p(\varphi_1, \varphi_2) = p(\varphi_1)p(\varphi_2). \quad (4)$$

Для нахождения распределения крутизны  $\varphi'_\omega(t)$  перейдем от системы функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  к системе функций  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi'_\omega(t)$ . Опуская знак предела в (3), запишем  $\varphi_2(t) = \Delta\omega\varphi'_\omega(t) + \varphi_1(t)$ , после

чего найдем якобиан  $J_2(\varphi_1, \varphi'_\omega) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\varphi_1, \varphi'_\omega)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \Delta\omega \end{vmatrix} = \Delta\omega$  и перейдем от (4) к распределению

$$p(\varphi_1, \varphi'_\omega) = p(\varphi_1)p(\varphi_2)J_2(\varphi_1, \varphi'_\omega). \quad (5)$$

Для упрощения преобразований обозначим  $\varphi \equiv \varphi_1$  и  $\varphi_2 = \varphi + \Delta\omega\varphi'_\omega$  и, путем интегрирования (5) по  $\varphi$  от  $-\pi$  до  $+\pi$ , выделим требуемое одномерное распределение крутизны

$$p(\varphi'_\omega) = \Delta\omega \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi)p(\varphi + \Delta\omega\varphi'_\omega) d\varphi, \quad (6)$$

где обе подынтегральные функции с учетом (2) запишем в виде

$$p(\varphi) = A_1 [1 + f_1(\varphi)], \quad (7)$$

$$p(\varphi + z) = A_2 [1 + f_2(\varphi + z)], \quad (8)$$

где  $A_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{a_{1,2}^2}{2}\right)$ ;  $a_1 = \frac{y(\omega_1)}{\sigma_n}$ ;  $a_2 = \frac{y(\omega_2)}{\sigma_n}$ ;  $z = \Delta\omega\varphi'_\omega$  — приведенная крутизна,

$$f_1(\varphi) = a_1 \sqrt{2\pi} \exp\left[\frac{a_1^2}{2} \cos^2(\varphi - \beta_1)\right] \Phi\left[\frac{a_1}{2} \cos(\varphi - \beta_1)\right] \cos(\varphi - \beta_1); \quad (9)$$

$$f_2(\varphi + z) = a_2 \sqrt{2\pi} \exp\left[\frac{a_2^2}{2} \cos^2(\varphi + z - \beta_2)\right] \Phi\left[\frac{a_2}{2} \cos(\varphi + z - \beta_2)\right] \cos(\varphi + z - \beta_2). \quad (10)$$

Подстановкой (7) и (8) в (6) находим

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \left\{ e^{-\frac{a^2}{2}} + e^{-\frac{(a+\Delta a)^2}{2}} - e^{-\frac{a^2+(a+\Delta a)^2}{2}} \left[ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) f_2(\varphi + z) d\varphi \right] \right\}, \quad (11)$$

где  $a \equiv a_1$  и  $\Delta a = a_2 - a_1$ . Далее, поскольку  $0 \leftarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , положим  $\Delta a \rightarrow 0$  и перейдем от (11) к окончательной форме

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2}{2}} \left( 2 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right) + \frac{e^{-a^2}}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\varphi) f_2(\varphi + z) d\varphi. \quad (12)$$

Дальнейшие преобразования (12) затруднены видом функций (9) и (10). Поэтому исследуем предельные случаи.

Для предельно малых ССШ  $0 \leftarrow a \ll 1$  интеграл в (12) стремится к нулю и распределение переходит к виду

$$p(z) \Big|_{a \ll 1} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{a^2}{2}} \left( 2 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right). \quad (13)$$

Кроме того, поскольку  $a \ll 1$ , в (13) можно допустить разложение  $e^x \Big|_{x \ll 1} \approx 1 + x$  и записать

$$p(z) \Big|_{a \ll 1} = \frac{1}{2\pi}. \quad (14)$$

Таким образом, для предельно малых ССШ распределение (12) равномерно и, как следствие, дальнейшее статистическое оценивание фазы будет требовать много времени.

Для второго предельного случая  $1 \ll$  ССШ вначале функцию (12) приведем к виду

$$p(z) \Big|_{a \gg 1} = \frac{a(a+\Delta a)}{2\pi} e^{-\frac{a^2+(a+\Delta a)^2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{a^2}{2} \cos^2(\varphi-\beta) + \frac{(a+\Delta a)^2}{2} \cos^2(\varphi+z-\beta-\Delta\beta)} \times \Phi[a \cos(\varphi-\beta)] \Phi[(a+\Delta a) \cos(\varphi+z-\beta-\Delta\beta)] \cos(\varphi-\beta) \cos(\varphi+z-\beta-\Delta\beta) d\varphi. \quad (15)$$

Затем, поскольку при  $1 \ll$  ССШ шум проявляется весьма слабо, примем  $\varphi - \beta \ll 1$ ;  $\cos^2(\varphi + z - \beta - \Delta\beta) \cong 1 - (\varphi + z - \beta - \Delta\beta)^2 \cong 1$ ;  $\varphi + z - \beta - \Delta\beta \ll 1$ ;  $\cos^2(\varphi - \beta) \cong 1 - (\varphi - \beta)^2 \cong 1$ ;  $\Phi(a, \varphi, \beta) \cong 1$ ;  $\Phi(a + \Delta a, z, \varphi, \beta + \Delta\beta) \cong 1$ ;  $\cos(\varphi + z - \beta - \Delta\beta) \cong 1$  и  $\cos(\varphi - \beta) \cong 1$ .

Используя интеграл  $\int e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \operatorname{erf}\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$ , приведем (15) к виду

$$p(z) \Big|_{a \gg 1} \cong \frac{a(a+\Delta a)}{4\sqrt{\pi a(a+\Delta a)}} e^{\frac{(a+\Delta a)^2(z-\Delta\beta)^2-4ac}{4a(a+\Delta a)}} \left\{ \operatorname{erf}\left[a(\pi-\beta) + \frac{a(z-\Delta\beta)}{2}\right] - \operatorname{erf}\left[-a(\pi+\beta) + \frac{a(z-\Delta\beta)}{2}\right] \right\}, \quad (16)$$

где  $c = 0.5(a + \Delta a)^2(z - \Delta\beta)^2$  и  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$  – вероятностная функция. Поскольку при  $a \rightarrow \infty$  переменные  $x_1$  и  $x_2$  первой и второй erf-функций в (16) стремятся к  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно, то  $\operatorname{erf}(x_1) - \operatorname{erf}(x_2) \rightarrow 2$  и (16) сводится к виду

$$p(z)|_{a \gg 1} \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{a^2(z - \Delta\beta)^2}{4}\right]. \quad (17)$$

Легко можно показать, что (17) есть нормальное распределение  $p_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(z - \Delta\beta)^2}{2\sigma^2}\right]$  с математическим ожиданием  $\Delta\beta$  и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{2}{a^2}. \quad (18)$$

Таким образом, следует, что с ростом ССШ распределение (12) нормализуется, а его дисперсия уменьшается. Более того, оба предельные распределения (14) и (17) весьма близки к точному закону (12) при ССШ  $a < 0,3$  и  $3 < a$  соответственно.

Аппроксимация распределением Тихонова

Выше мы показали, что интересный для практики случай  $0,3 < a < 3$  не может быть строго описан простым распределением. Для приближенного описания можно воспользоваться законом Тихонова [10]

$$p^r(\varphi) = \frac{1}{2\pi I_0(D)} \exp[D \cos(\varphi - \beta)], \quad (19)$$

где  $\varphi \leq \pi$ ;  $I_0(D)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка и  $D$  — параметр, зависящий от ССШ. Аппроксимация функции (12) законом (19) дает

$$p^a(z) = \frac{1}{4\pi^2 I_0(D) I_0(D_1)} \int_{-\pi-\beta}^{\pi-\beta} e^{D \cos x + D_1 \cos(x+z-\Delta\beta)} dx, \quad (20)$$

где  $D = b_0 + b_1 a + b_2 a^2$ ;  $D_1 = b_0 + b_1(a + \Delta a) + b_2(a + \Delta a)^2$ ;  $b_0 \approx 0,1715$ ,  $b_1 \approx 0,07955$  и  $b_2 \approx 0,9956$  — коэффициенты полинома аппроксимации [10]. Вводя для (20) обозначения  $d_1 = D + D_1 \cos(z - \Delta\beta)$  и  $d_2 = D_1 \sin(z - \Delta\beta)$ , перейдем к функции

$$p^a(z) = \frac{1}{4\pi^2 I_0(D) I_0(D_1)} \int_{-\pi-\beta}^{\pi-\beta} e^{d_1 \cos x - d_2 \sin x} dx. \quad (21)$$

Далее положим  $d_1 \cos x - d_2 \sin x = r \cos(x - \vartheta)$ , где  $r = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$  и  $\vartheta = -\operatorname{arctg}(d_2 / d_1)$ , приведем интеграл в (21) к модифицированной функции Бесселя первого порядка  $I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi$  и получим

$$p^a(z) = \frac{1}{2\pi I_0(D) I_0(D_1)} I_0\left(\sqrt{D^2 + 2DD_1 \cos(z - \Delta\beta) + D_1^2}\right). \quad (22)$$

Наконец, для  $0 \leftarrow \Delta a \ll a$  примем  $D \cong D_1$  и преобразуем (22) к окончательному виду

$$p^a(z) = \frac{1}{2\pi I_0^2(D)} I_0\left(D \sqrt{2[1 + \cos(z - \Delta\beta)]}\right). \quad (23)$$

В противоположность (12) формула (23) анализируется просто и остается последний вопрос, связанный с ошибками аппроксимации. Проведем необходимые оценки, начиная с тех же предельных случаев, что и для точной формулы (12).

При  $a \ll 1$  полагаем  $D \cong D_1 \ll 1$ ,  $I_0(D) \cong I_0(D_1) \cong 1$  и  $I_0(r) \cong 1$ , где  $r = D\sqrt{2[1 + \cos(z - \Delta\beta)]}$ , и заключаем, что (23) приводится к равномерному распределению (14).

Для  $a \gg 1$  с использованием аппроксимации  $I_0(x)_{x \ll x} \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$  приведем функции Бесселя к виду

$$I_0(D) \cong I_0(D_1) \cong \frac{e^{a^2}}{a\sqrt{2\pi}} \text{ и } I_0(r) \cong \frac{e^{2a^2[1-(z-\Delta\beta)^2/8]}}{2a\sqrt{\pi[1-(z-\Delta\beta)^2/8]}}. \text{ Здесь также видно, что (23) трансформируется в нормальный закон (17) с той же дисперсией (18). Таким образом, оба закона (12) и (23) имеют одинаковые асимптотики и, следовательно, дают близкие значения в областях ССШ } a < 0,3 \text{ и } 3 < a.$$

Для получения представления об ошибках аппроксимации в наиболее "неудобной" области  $0,3 < a < 3$  рассмотрим рис. 3, на котором представлено семейство точных (12) и приближенных (23) распределений для нескольких ССШ и фазового сдвига  $\Delta\beta = -\pi/2$ . Из их анализа следует, что ошибка аппроксимации составляет около 8% в области  $0,5 < \text{ССШ} < 0,9$ ,  $\approx 6\%$  при  $\text{ССШ} = 1$ ,  $\approx 3\%$  при  $\text{ССШ} = 3$  и  $< 2\%$  при  $3 \leq \text{ССШ}$ . Очевидно, что для практических инженерных оценок такой точности вполне достаточно.

Среднее и дисперсия  
Найдем статистические оценки крутизны ФЧХ, базирываясь на приближенной формуле (23). Среднее  $\bar{z} = \int_{-\pi}^{\pi} zp_1^a(z) dz$  легко приводится к виду

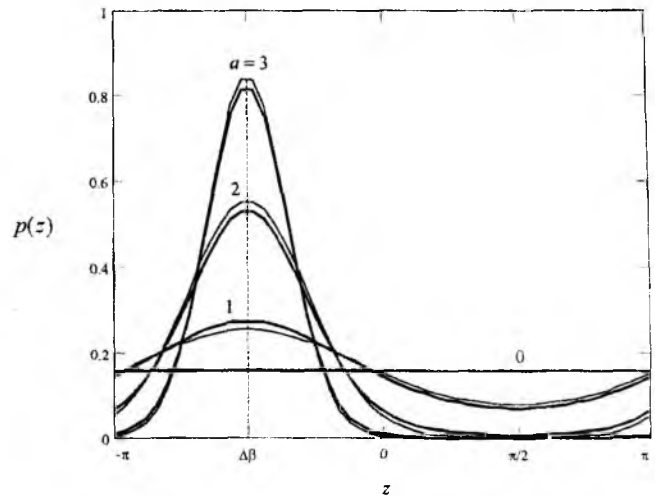


Рис. 3

$$\bar{z}(a) = \frac{2}{I_0^2(D)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} I_i^2(D) \sin(i\Delta\beta). \quad (24)$$

Дисперсия, однако, не выражается в простой форме, и мы исследуем ее численно.

На рис. 4 показаны зависимости среднего (24) и среднеквадратического отклонения (СКО)  $\sigma_z(a)$  для приведенной крутизны  $z$  в области малых ССШ  $\leq 6$ . Как можно заметить (рис. 4а), среднее изменяется слабо при большом шуме (ССШ  $< 1$ ) и практически достигает  $\Delta\beta$  при  $3 < \text{ССШ}$ . Для инженерных расчетов полезной может быть простая формула  $\bar{z}(a) \cong \Delta\beta \frac{0,6a^4}{1 + 0,6a^4}$ . В противоположность СКО собственно фазы  $\sigma_\varphi(a)$ , найденной для (2) в работе [8], СКО крутизны  $\sigma_z(a)$  практически не изменяется при большом шуме (ССШ  $< 1$ ), быстро уменьшается в области  $1 < \text{ССШ} < 3$  и при  $3 < \text{ССШ}$  асимптотически и очень медленно приближается к нулю (рис. 4б). В целом же, по сравнению с собственно ФЧХ, ее крутизна демонстрирует большую дисперсию при любых ССШ, исключая тривиальный случай ССШ = 0, при котором обе дисперсии максимальны и равны. Здесь также можно показать полезные аппроксимации для инженерных расчетов, именно:  $\sigma_z(a) \cong \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 + 0,136a^{4,43}}}$

Дисперсия, однако, не выражается в простой форме, и мы исследуем ее численно. На рис. 4 показаны зависимости среднего (24) и среднеквадратического отклонения (СКО)  $\sigma_z(a)$  для приведенной крутизны  $z$  в области малых ССШ  $\leq 6$ . Как можно заметить (рис. 4а), среднее изменяется слабо при большом шуме (ССШ  $< 1$ ) и практически достигает  $\Delta\beta$  при  $3 < \text{ССШ}$ . Для инженерных расчетов полезной может быть простая формула  $\bar{z}(a) \cong \Delta\beta \frac{0,6a^4}{1 + 0,6a^4}$ . В противоположность СКО собственно фазы  $\sigma_\varphi(a)$ , найденной для (2) в работе [8], СКО крутизны  $\sigma_z(a)$  практически не изменяется при большом шуме (ССШ  $< 1$ ), быстро уменьшается в области  $1 < \text{ССШ} < 3$  и при  $3 < \text{ССШ}$  асимптотически и очень медленно приближается к нулю (рис. 4б). В целом же, по сравнению с собственно ФЧХ, ее крутизна демонстрирует большую дисперсию при любых ССШ, исключая тривиальный случай ССШ = 0, при котором обе дисперсии максимальны и равны. Здесь также можно показать полезные аппроксимации для инженерных расчетов, именно:  $\sigma_z(a) \cong \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 + 0,136a^{4,43}}}$

для  $0 \leq \text{ССШ} \leq 2,5$  и  $\sigma_z(a) \cong \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+1,158a^{2,2}}}$  для  $2,5 < \text{ССШ}$ .

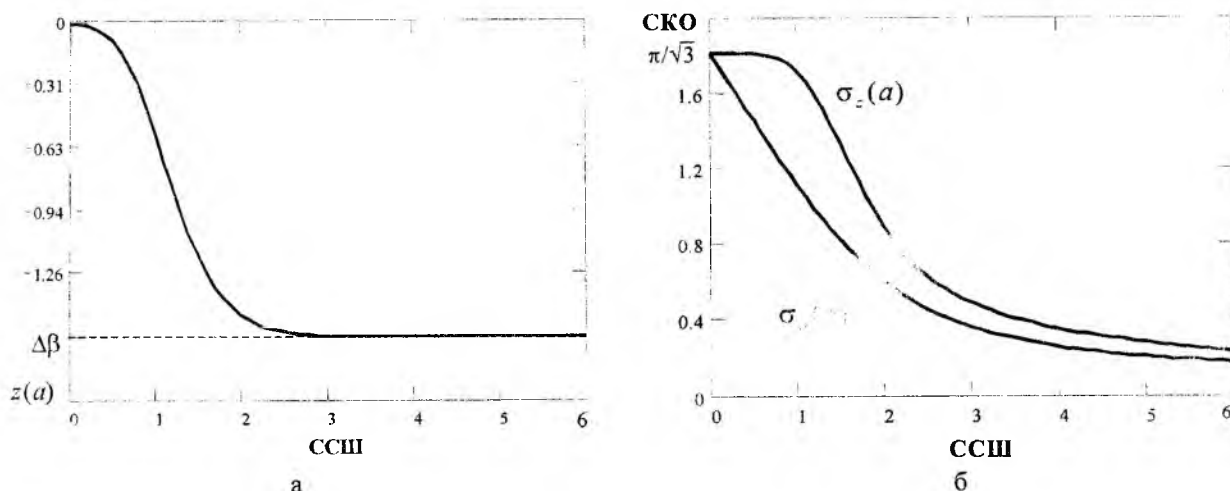


Рис. 4

Рис. 3 и 4 позволяют сделать основные выводы касательно ошибок слежения.

При  $\text{ССШ} \ll 1$  среднее весьма близко к нулю (рис. 4а). Несомненно, это свидетельствует о весьма слабой чувствительности СФ к изменению входной частоты, что приводит к значительной регулярной ошибке слежения, сопровождающейся к тому же максимально возможной случайной ошибкой с дисперсией  $\pi^2/3$  (рис. 4б). Можно говорить, что при  $\text{ССШ} \ll 1$  фильтр практически не следит за фазой входного сигнала. И даже с приближением  $\text{ССШ}$  к единице случайная ошибка практически не меняется (рис. 4б), а регулярная остается достаточно большой (рис. 4а).

Картина существенно изменяется при  $3 < \text{ССШ}$ . Распределение концентрируется вокруг  $\Delta\beta$  (рис. 3), среднее становится практически равным  $\Delta\beta$ , а дисперсия случайной ошибки существенно уменьшается (рис. 4б), и мы заключаем, что уже при  $3 < \text{ССШ}$  следящий фильтр функционирует достаточно эффективно.

**Список литературы:** 1. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Советское радио, 1978. 600 с. 2. Saito T. Application of phase-locked oscillator for PCM network synchronization / IEEE Trans. Comm. 1982. V. COM-30, P. 2344—2354. 3. Пестряков В. Б. Фазовые радиотехнические системы. М.: Советское радио, 1968. 468 с. 4. Tam P. K. S., Moore J. B. A Gaussian sum approach to phase and frequency estimation / IEEE Trans. Comm. 1977. V. 25, P. 935—442. 5. Driscoll M. M. Surface acoustic wave resonator tracking filter for UHF signal stability improvement / Proc. of IEEE Ultrasonics Symp. 1983. P. 271—275. 6. Shmaliy Yu. S. The modulational method of quartz crystal oscillator frequency stabilization / IEEE Trans. Ultrason. Ferroel. Freq. Control. 1998. V. 45. P.1476—1484. 7. Pawula R. F., Rice S. O., Roberts J. H. Distribution of the phase angle between two vectors perturbed by Gaussian noise / IEEE Trans. Comm. 1982. V. COM-30. P. 1828—1841. 8. Bennett W. R. Methods of solving noise problems / Proc. IRE, 1956. V. 44. P. 609—638. 9. Shmaliy Yu. S. Probability distributions of the envelope and phase, and their derivatives in time of the sum of a non-stationary sine signal and narrow-band Gaussian noise / Journal of the Franklin Institute. 1999. V. 336, № 6. P.1013—1022. 10. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь. 1986. 325 с.

Харьковский национальный университет радиозлектроники,  
Университет Гуанахуато, Мексика

Поступила в редколлегию 18.10.2001