УДК 510.62

М. Ф. БОНДАРЕНКО, д-р техн. наук,
Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук

ОБ АБСТРАКТНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Как известно, полурешеткой $< M, +, \cdot >$ называют любое множество M, на котором заданы произвольно выбираемые двуместные операции $+$ и $\cdot$, называемые *сложением* и *умножением* и удовлетворяющие законам идемпотентности $x+x\equiv x$, $xx\equiv x$ и коммутативности $x+y\equiv y+x$, $xy\equiv yx$.

Записанные четыре закона называют *аксиомами полурешетки.*

Решеткой называют полурешетку, для которой выполняются законы ассоциативности $(x+y)+z\equiv x+(y+z)$, $(xy)z\equiv x(yz)$ и элиминации $x+xy\equiv x$, $x(x+y)\equiv x$.

Записанные восемь законов называют *аксиомами решетки.*

Дистрибутивной решеткой называют решетку, для которой выполняются законы дистрибутивности $x(y+z)\equiv xy+xz$, $x+yz\equiv(x+y)(x+z)$.

Записанные десять законов называют *аксиомами дистрибутивной решетки.* Аксиомы дистрибутивной решетки не являются независимыми. Второй закон дистрибутивности выводится из остальных аксиом: $x+yz\equiv(x+xz)+yz\equiv(x+zx)+zy\equiv x+(zx+zy)\equiv x+z(x+y)\equiv x(x+y)+(x+y)z\equiv(x+y)x+(x+y)z\equiv(x+y)(x+z)$.

Дистрибутивной решеткой с нулем и единицей называют такую дистрибутивную решетку, в множестве M которой содержатся элементы, называемые *нулем* и *единицей* и удовлетворяющие законам для констант $0+x\equiv x$, $1x\equiv x$, $0x\equiv 0$, $1+x\equiv 1$.

Записанные 14 законов называют *аксиомами дистрибутивной решетки с нулем и единицей.*

Аксиома $1+x\equiv 1$ выводится из остальных аксиом: $1+x\equiv 1+1x\equiv 1$.

Алгебра конечных предикатов является разновидностью дистрибутивной решетки с нулем и единицей. В ней роль множества M выполняет система всех n-местных k-ичных предикатов, роль операции сложения выполняет дизъюнкция, роль операции умножения — конъюнкции, роль нуля — выполняет тождественно ложный предикат, роль единицы — тождественно истинный предикат. Все аксиомы дистрибутивной решетки с нулем и единицей в алгебре конечных предикатов выполняются.

Абстрактной алгеброй конечных предикатов (n, k)-типа назовем множество M, в котором содержится, по крайней мере, два элемента 0 и 1 и $k \cdot n$ элементов a_{ij} $(i=1, 2, ..., k;\ j=1, 2, ..., n)$ и на котором определены двуместные операции сложения и умножения, удовлетворяющие всем аксиомам дистрибутивной решетки с нулем и единицей и тождествам

$$a_{1j} + \ldots + a_{kj} = 1, \quad (j = 1, 2, \ldots, n);$$

$$a_{i_1 j} a_{i_2 j} = 0,$$

$$i_1 \neq i_2;\ i_1 = 1, 2, \ldots, k;\ i_2 = 1, 2, \ldots, k;$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Все эти тождества назовем *аксиомами* абстрактной алгебры конечных предикатов.

Чтобы перейти от абстрактного определения алгебры конечных предикатов к первоначальному ее определению, надо множество M проинтерпретировать как множество всевозможных n-местных k-ичных предикатов, элементы 0 и 1 — как тождественно ложный и тождественно истинный предикаты, элементы a_{ij} — как предикаты $x_j^{a_i}$ операции сложения и умножения — как дизъюнкцию и конъюнкцию предикатов.

Абстрактная алгебра конечных предикатов допускает еще одну, двойственную первой, интерпретацию. Во второй интерпретации множество M, как и прежде, понимаем как множество всех n-местных k-ичных предикатов. Элементы 0 и 1 понимаем соответственно как тождественно истинный и тождественно ложный предикаты, элементы a_{ij} — как предикаты

$$a_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j = a_i, \\ 1, & \text{если } x_j \neq a_i, \end{cases}$$

операции сложения и умножения — соответственно как конъюнкцию и дизъюнкцию предикатов.

Булевой алгеброй $<M, ', +, \cdot>$ называют любое множество, содержащее, по крайней мере, два элемента 0 и 1, на котором определены одноместная операция дополнения и двуместные операции сложения $+$ и умножения $\cdot$. Эти операции могут выбираться произвольно, однако для них должны выполняться все 14 аксиом дистрибутивной решетки, а также законы де Моргана:

$(x + y)' \equiv x'y',\ (xy)' \equiv x' + y'$,

закон двойного отрицания $(x')' \equiv x$,

закон исключения третьего $x + x' \equiv 1$,

закон противоречия $xx' \equiv 1$.

Перечисленные 19 тождеств называют *аксиомами булевой алгебры.*

Алгебра конечных предикатов с отрицанием является разновидностью булевой алгебры. В ней роль множества M выполняет система всех n-местных k-ичных предикатов, роль операции дополнения выполняет отрицание, роль операции сложения — дизъюнкция, умножения — конъюнкция, роль нуля выполняет тождественно ложный предикат, роль единицы — тождественно истинный предикат. Все аксиомы булевой алгебры в алгебре конечных предикатов с отрицанием выполняются.

С помощью аксиом булевой алгебры, законов истинности, ложности и отрицания всегда можно установить, тождественны или нет две любые формулы алгебры конечных предикатов с отрицанием. Для этого нужно сначала исключить из формул знаки отрицания, а затем привести их к СДНФ. Таким образом, абстрактную алгебру конечных предикатов можно определить еще одним способом как булеву алгебру, в которой дополнительно выполняются закон истинности

$$a_{1j} + \ldots + a_{kj} = 1,$$

закон ложности

$$a_{i_1j} \cdot a_{i_2j} = 0, \ (i_1 = 1, 2, \ldots, k; \ i_2 = 1, 2, \ldots, k; \ i_1 \neq i_2)$$

и закон отрицания

$$\overline{a_{ij}} = a_{1j} + \ldots + a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + \ldots + a_{kj}, \ (i = 1, 2, \ldots, k; \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Итак, видим, что в алгебре конечных предикатов, наряду с операциями дизъюнкции и конъюнкции, существует операция отрицания со всеми свойствами, которыми ее наделяет булева алгебра. Введение отрицания в алгебре конечных предикатов не расширяет ее выразительных возможностей, поскольку она полна и без операции отрицания. Введение операций в алгебре, которые не расширяют ее выразительных возможностей, называют *консервативным расширением* алгебры. Введением операции отрицания в алгебре конечных предикатов достигается лишь консервативное ее расширение.

Теорема. *Множество M, в котором содержатся элементы a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, k; \ j = 1, 2, \ldots, n)$ и на котором определены одноместная $'$ и двуместные операции $+$ и $\cdot$, удовлетворяющие следующим пяти аксиомам:*

1) $a'_{ij} = a_{1j} + \ldots + a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + \ldots + a_{kj}$;
2) $x(y+z) \equiv xz + xy$; 3) $x + yz \equiv (x+z)(x+y)$;
4) $xx' + y \equiv y$; 5) $(x + x')y \equiv y$,

есть абстрактная алгебра конечных предикатов (n, k)-типа.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить существование в множестве M элементов 0 и 1 и вывести из аксиом $1 \div 5$ все аксиомы какой-нибудь полной системы аксиом абстрактной алгебры конечных предикатов (n, k)-типа.

Выводим законы коммутативности:

$$x + y \underset{5}{\equiv} (x + x')(x + y) \underset{2}{\equiv} (x + x')\, y + (x + x')\, x \underset{5}{\equiv} y + x,$$

$$xy \equiv xx' + xy \underset{3}{\equiv} (xx' + y)(xx' + x) \underset{4}{\equiv} yx.$$

6) $x + y \equiv y + x$; 7) $xy \equiv yx$.

Устанавливаем существование 0 и 1.

Докажем, что формула xx' задает один и тот же элемент множеств M при любом выборе элемента x. Пусть x_1 и x_2 — произвольно выбранные элементы множества M. Тогда

$$x_1x_1' \underset{4}{\equiv} x_2x_2' + x_1x_1' \equiv x_1x_1' + x_2x_2' \equiv x_2x_2'.$$

Обозначим элемент xx' множества M символом 0.

8) $xx' \equiv 0$.

Докажем, что формула $x + x'$ задает один и тот же элемент множества M при любом выборе элемента x. Имеем

$$x_1 + x_1' \underset{5}{\equiv} (x_2 + x_2')(x_1 + x_1') \equiv (x_1 + x_1')(x_2 + x_2') \underset{5}{\equiv} x_2 + x_2'.$$

Обозначаем элемент $x + x'$ множества M символом 1.

9) $x + x' \equiv 1$.

Выводим законы дистрибутивности:

$$x(y + z) \underset{2}{\equiv} xz + xy \equiv xy + xz,\ \ x + yz \underset{3}{\equiv} (x + z)(x + y) \underset{7}{\equiv}$$

$$\underset{7}{\equiv} (x + y)(x + z).$$

10) $x(y + z) \equiv xy + xz$; 11) $x + yz \equiv (x + y)(x + z)$.

Выводим законы для констант

$$0 + x \underset{8}{\equiv} xx' + x \underset{4}{\equiv} x,\ \ 1x \underset{9}{\equiv} (x + x')\, x \underset{5}{\equiv} x.$$

12) $0 + x \equiv x$; 13) $1x \equiv x$.

$$1 + x \underset{13}{\equiv} 1(1 + x) \underset{9}{\equiv} (x + x')(1 + x) \underset{6}{\equiv} (x + x')(x + 1) \underset{3}{\equiv}$$

$$\underset{3}{\equiv} x + 1x' \underset{13}{\equiv} x + x' \underset{9}{\equiv} 1,\ \ 0x \underset{12}{\equiv} 0 + 0x \underset{8}{\equiv} xx' +$$

$$+ 0x \underset{7}{\equiv} xx' + x0 \underset{2}{\equiv} x(0 + x') \underset{12}{\equiv} xx' \equiv 0.$$

14) $1 + x \equiv 1$; 15) $0x \equiv 0$.

Выводим законы элиминации:

$$x + xy \underset{13}{\equiv} 1x + xy \equiv x1 + xy \underset{10}{\equiv} x(1 + y) \underset{14}{\equiv} x1 \underset{7}{\equiv} 1x \underset{13}{\equiv} x,$$

$$x(x+y) \underset{12}{\equiv} (0+x)(x+y) \underset{6}{\equiv} (x+0)(x+y) \underset{11}{\equiv} x+0y \underset{15}{\equiv} x+0 \underset{7}{\equiv}$$
$$\underset{7}{\equiv} 0+x \equiv x.$$

16) $x+xy\equiv x$; 17) $x(x+y)\equiv x$.

Выводим законы идемпотентности:

$$x+x \underset{13}{\equiv} 1(x+x) \underset{9}{\equiv} (x+x')(x+x) \underset{7}{\equiv} (x+x)(x+x') \underset{11}{\equiv}$$
$$\underset{11}{\equiv} x+xx' \equiv x+0 \underset{6}{\equiv} 0+x \underset{12}{\equiv} x, \quad xx \underset{12}{\equiv} 0+xx \underset{8}{\equiv} xx'+xx \underset{8}{\equiv}$$
$$\underset{6}{\equiv} xx+xx' \underset{10}{\equiv} x(x+x') \underset{9}{\equiv} x1 \underset{7}{\equiv} 1x \underset{13}{\equiv} x.$$

18) $x+x\equiv x$; 19) $xx\equiv x$.

Выводим первый закон ассоциативности:

$$(x+y)+z \underset{13}{\equiv} 1((x+y)+z) \underset{9,7}{\equiv} ((x+y)+z)(x+x') \underset{10,7}{\equiv}$$
$$\underset{10,7}{\equiv} x((x+y)+z)+x'((x+y)+z) \underset{10}{\equiv} (x(x+y)+xz)+$$
$$+(x'(x+y)+x'z) \underset{17,10}{\equiv} (x+xz)+((x'x+x'y)+x'z) \underset{16,7}{\equiv} x+((xx'+$$
$$+x'y)+x'z) \underset{8,12}{\equiv} x+(x'y+x'z) \underset{10}{\equiv} x+x'(y+z).$$

$$x+(y+z) \underset{13}{\equiv} 1\cdot(x+(y+z)) \underset{9,7}{\equiv} (x+(y+z))(x+x') \underset{10,7}{\equiv}$$
$$\underset{10,7}{\equiv} x(x+(y+z))+x'(x+(y+z)) \underset{10}{\equiv} (xx+x(y+z))+$$
$$+(x'x+x'(y+z)) \underset{17,7}{\equiv} (x+x(y+z))+(xx'+x'(y+z)) \underset{17,7}{\equiv}$$
$$\underset{17,7}{\equiv} (x+x(y+z))+(xx'+x'(y+z)) \underset{16,8}{\equiv}$$
$$\underset{16,8}{\equiv} x+(0+x'(y+z)) \underset{12}{\equiv} x+x'(y+z).$$

20) $(x+y)+z\equiv x+(y+z)$.

Выводим второй закон ассоциативности:

$$(xy)z \underset{12}{\equiv} 0+(xy)z \underset{8,6}{\equiv} (x,\ y)z+xx' \underset{11,6}{\equiv} (x+(xy)z)(x'+(xy)z) \underset{11}{\equiv}$$
$$\underset{11}{\equiv} ((x+xy)(x+z))((x'+xy)(x'+z)) \underset{16,11}{\equiv}$$
$$\underset{16,11}{\equiv} (x(x+z))(((x'+x)(x'+y))(x'+z)) \underset{17,6}{\equiv} x(((x+x')(x'+y))(x'+$$
$$+z)) \underset{9,13}{\equiv} x((x'+y)(x'+z)) \underset{11}{\equiv} x(x'+yz), \quad x(yz) \underset{12}{\equiv} 0+x(yz) \underset{8,6}{\equiv}$$
$$\underset{8,6}{\equiv} x(yz)+xx' \underset{11,6}{\equiv} x(x+yz))((x+x')(x'+yz)) \underset{11}{\equiv} ((x+x)(x+$$
$$+yz))((x'+x)(x'+yz) \underset{16,6}{\equiv} (x(x+yz))((x+x')(x'+yz)) \underset{17,9}{\equiv}$$

$$\underset{17,9}{\equiv} x(1(x' + yz)) \underset{13}{\equiv} x(x' + yz).$$

21) $(xy)z \equiv x(yz)$.

Выводим законы для констант с отрицаниями: $0' \underset{12}{=} 0 + 0' \underset{9}{=} 1$, $1' \underset{13}{=} 1 \cdot 1' \underset{8}{=} 0$

22) $0' = 1$, 23) $1' = 0$.

Выводим закон истинности:

$$a_{1j} + \ldots + a_{kj} \underset{6,20}{=} a_{ij} + (a_{1j} + \ldots + a_{i-1,j} +$$

$$+ a_{i+1,j} + \ldots + a_{kj}) \underset{1}{=} a_{ij} + a'_{ij} \underset{9}{=} 1.$$

24) $a_{1j} + \ldots + a_{kj} = 1$.

Выводим первый закон де Моргана:

$$(x + y)' \underset{13}{\equiv} 1(x + y)' \underset{13}{\equiv} (1 \cdot 1)(x + y)' \underset{14}{\equiv} ((1 + y)(1 + x))(x + y)' \underset{9}{\equiv}$$

$$\underset{9}{\equiv} (((x + x') + y)((y + y') + x))(x + y)' \underset{6,20}{\equiv} (((x + y) + x')((x + y) +$$

$$+ y'))(x + y)' \underset{11}{\equiv} ((x + y) + x'y')(x + y)' \underset{6}{\equiv} (x'y' + (x + y))(x +$$

$$+ y)' \underset{7,10}{\equiv} (x'y')(x + y)' + (x + y)(x + y)' \underset{8}{\equiv} (x'y')(x + y)' + 0 \underset{12}{\equiv}$$

$$\underset{12}{\equiv} (x'y')(x + y)' + (0 + 0) \underset{15}{\equiv} (x'y')(x + y)' + (0y' + 0x') \underset{8}{\equiv}$$

$$\underset{8}{\equiv} (x'y')(x + y)' + ((xx')y' + (yy')x') \underset{7,21}{\equiv} (x'y')(x + y)' + ((x'y')x +$$

$$+ (x'y')y) \underset{10}{\equiv} (x'y')(x + y)' + (x'y')(x + y) \underset{2}{\equiv} (x'y')((x + y) + (x +$$

$$+ y)') \underset{9}{\equiv} (x'y')1 \underset{7,13}{\equiv} x'y'.$$

25) $(x + y)' \equiv x'y'$.

Выводим второй закон де Моргана:

$$(xy)' \underset{12}{\equiv} 0 + (xy)' \underset{12}{\equiv} (0 + 0) + (xy)' \underset{15}{\equiv} (0y + 0x) + (xy)' \underset{8}{\equiv}$$

$$\underset{8}{\equiv} ((xx')y + (yy')x) + (xy)' \underset{7,21}{\equiv} ((xy)x' + (xy)y') + (xy)' \underset{10}{\equiv}$$

$$\underset{10}{\equiv} (xy)(x' + y') + (xy)' \underset{7}{\equiv} (x' + y')(xy) + (xy)' \underset{6,11}{\equiv} ((x' + y') +$$

$$+ (xy)')((xy) + (xy)') \underset{9}{\equiv} ((x' + y') + (xy)')1 \underset{13}{\equiv} ((x' + y') +$$

$$+ (xy)')(1 \cdot 1) \underset{14}{\equiv} ((x' + y') + (xy)')((1 + y')(1 + x')) \underset{9}{\equiv}$$

$$\underset{9}{\equiv} ((x' + y') + (xy)')(((x + x') + y') + ((y + y') + x'))) \underset{6,20}{\equiv}$$

$$\underset{6,20}{\equiv} ((x' + y') + (xy)')(((x' + y') + x)((x' + y') + y))) \underset{11}{\equiv}$$

$$\underset{11}{\equiv} ((x'+y')+(xy)')((x'+y')+xy) \underset{3}{\equiv} (x'+y')+((xy)(xy)') \underset{8}{\equiv}$$

$$\underset{8}{\equiv} (x'+y')+0 \underset{6,12}{\equiv} x'+y'.$$

26) $(xy)' \equiv x'+y'$.

Выводим закон двойного отрицания:

$$(x')' \underset{13}{\equiv} 1(x')' \underset{9}{\equiv} (x+x')(x')' \underset{7,10,6}{\equiv} x(x')' + x'(x')' \underset{8,6,12}{\equiv}$$

$$\underset{8,6,12}{\equiv} x(x') \underset{12,8}{\equiv} xx' + x(x')' \underset{10}{\equiv} x(x'+(x')') \underset{9,7,13}{\equiv} x.$$

27) $(x')' \equiv x$.

Выводим закон ложности: если $i_1 \neq i_2$, то

$$a_{i_1 j} \cdot a_{i_2 j} \underset{27}{=} (a'_{i_1 j})'(a'_{i_2 j})' \underset{24}{=} (a'_{i_1 j} + a_{i_2 j})' \underset{7}{=} ((a_{1j} + \ldots + a_{i_1-1,j} +$$

$$+ a_{i_1+1,j} + \ldots + a_{kj}) + (a_{1j} + \ldots + a_{i_2-1,j} + a_{i_2+1,j} + \ldots +$$

$$+ a_{kj}))' \underset{18,6,20}{=} (a_{1j} + \ldots + a_{kj})' \underset{24}{=} 1' \underset{23}{=} 0.$$

28) если $i_1 \neq i_2$, то $a_{i_1 j} a_{i_2 j} = 0$.

Из аксиом 1—5 вывели все аксиомы абстрактной алгебры конечных предикатов (n, k)-типа. Теорема доказана.

Система аксиом, каждая из которых независима от остальных, называется *несократимой*. Аксиома называется *независимой*, если ее невозможно вывести из совокупности остальных.

Теорема. *Система аксиом 1 ÷ 5 несократима.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить независимость каждой из аксиом от совокупности остальных. Независимость аксиом доказываем *методом интерпретаций*. Если существует такая интерпретация элементов множества M, а также операций $+$, $\cdot$ и $'$, при которой все аксиомы, кроме одной, выполняются, то такая система независима от остальных аксиом.

Полагаем $k=2$, $n=1$. В этом случае аксиома 1 запишется в виде пары равенств: $a'_{11}=a_{21}$, $a'_{21}=a_{11}$.

Доказываем независимость первой аксиомы.

Множество M интерпретируем как систему всех подмножеств множества $\{\alpha, \beta, \gamma\}$; элементы a_{11} и a_{21} — как множества $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$; операции $+$ и $\cdot$ — как объединение и пересечение множеств, а операцию $'$ — как дополнение множества к множеству $\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Первая аксиома в этой интерпретации не выполняется:

$$\widetilde{\{\alpha\}} = \{\beta, \gamma\} \neq \{\beta\}, \quad \widetilde{\{\beta\}} = \{\alpha, \gamma\} \neq \{\alpha\}.$$

Остальные аксиомы выполняются:

2) $x \cap (y \cup z) \equiv (x \cap z) \cup (x \cap y)$; 3) $x \cup (y \cap z) \equiv (x \cup z) \cap (x \cup y)$;

4) $(x \cap \tilde{x}) \cup y \equiv \varnothing \cup y \equiv y$; 5) $(x \cup \tilde{x}) \cap y \equiv \{\alpha, \beta, \gamma\} \cap y \equiv y$.

Доказываем независимость второй аксиомы.

Множество M интерпретируем как множество $\{0, 1\}$, полагаем $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$. Операцию $+$ истолковываем как дизъюнкцию, операцию $\cdot$ — как равнозначность, операцию $'$ — как отрицание.

Вторая аксиома в этой интерпретации не выполняется, поскольку тождество $x \sim (y \vee z) \equiv (x \sim z) \vee (x \sim y)$ при $x = y = 0$ и $z = 1$ обращается в противоречие: $0 \sim (0 \vee 1) = 0 \sim 1 = 0$, $(0 \sim 1) \vee (0 \sim 0) = 0 \vee 1 = 1$.

Первая аксиома выполняется: $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

Третья аксиома выполняется: $x \vee (y \sim z) \equiv x \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz, (x \vee z) \sim$
$\sim (x \vee y) \equiv \overline{x \vee z} \cdot \overline{x \vee y} \vee (x \vee z)(x \vee y) \equiv \bar{x}\bar{z}\bar{x}\bar{y} \vee x \vee zy \equiv x \vee$

$$\vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee yz \equiv (x \vee \bar{x})(x \vee \bar{y}\bar{z}) \vee yz \equiv x \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz.$$

Четвертая аксиома выполняется: $(x \sim \bar{x}) \vee y \equiv \bar{x}\bar{\bar{x}} \vee x\bar{x} \vee y \equiv y$.

Пятая аксиома выполняется: $(x \vee \bar{x}) \sim y \equiv 1 \sim y = \bar{1} \cdot \bar{y} \vee 1 \cdot y \equiv y$.

Доказываем независимость **третьей** аксиомы.

Множество M интерпретируем как множество $\{0, 1\}$, полагаем $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$. Операцию $+$ объясняем как неравнозначность, операцию $\cdot$ — как конъюнкцию, операцию $'$ — как отрицание. Третья аксиома в этой интерпретации не выполняется, поскольку тождество $x \oplus yz \equiv (x \oplus z)(x \oplus y)$ при $x = y = 1$ и $z = 0$ обращается в противоречие: $1 \oplus 1 \cdot 0 = 1 \oplus 0 = 1$, $(1 \oplus 0)(1 \oplus 1) = 1 \cdot 0 = 0$.

Первая аксиома выполняется: $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$.

Вторая аксиома выполняется: $x(y \oplus z) \equiv xz \oplus xy$.

Четвертая аксиома выполняется: $x\bar{x} \oplus y \equiv 0 \oplus y \equiv y$.

Пятая аксиома выполняется: $(x \oplus \bar{x}) y \equiv (\bar{x}\bar{x} \vee x\bar{\bar{x}}) y \equiv (x \vee \bar{x}) y \equiv 1 \cdot y \equiv y$.

Доказываем независимость **четвертой** аксиомы.

Полагаем $M = \{0, 1, 2\}$, $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$. Операции $+$, $\cdot$, $'$ задаем таблицами:

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	2	2
1	2	2	2
2	2	2	2

$x + y$

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	2	2
2	0	1	2

xy

x	0	1	2
x'	1	0	0

Четвертая аксиома в этой интерпретации не выполняется. При $x = 0$, $y = 1$ тождество $xx' + y \equiv y$ нарушается:

$$00' + 1 = 01 + 1 = 0 + 1 = 2 \neq 1.$$

Первая аксиома $a'_{11} = a_{21}$, $a'_{21} = a_{11}$ выполняется: $0' = 1$, $1' = 0$.

Вторая аксиома $x(y+z) \equiv xz + xy$ выполняется.

Пусть $x = 0$. Тогда $0(y+z) = 0$, $0z + 0y = 0 + 0 = a$. Пусть $x = 1$. Если $y = z = 0$, то $1(0+0) = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$. Если же $y \neq 0$ или $z \neq 0$, то слева от знака равенства получаем: $1 \cdot 2 = 2$, справа тоже получаем 2, так как хотя бы одно из слагаемых не равно нулю. Пусть $x = 2$. Тогда третья аксиома принимает вид $0 + yz \equiv (0+z)(0+y)$. Если $y = 0$ или $z = 0$, то $0 + yz \equiv 0$, $(0+z)(0+y) \equiv 0$. Если же $y \neq 0$ и $z \neq 0$, то слева и справа от знака равенства получаем 2.

Пятая аксиома $(x + x')y \equiv y$ выполняется. При любом $xx + x' \leqslant 2$, $2y \equiv y$. Доказываем независимость пятой аксиомы. Полагаем $M = \{0, 1, 2\}$, $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$. Операции $+$, $\cdot$, $'$ задаем таблицами:

x^y	0	1	2
0	0	1	2
1	0	0	2
2	2	2	2

$x + y$

xy	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

xy

x	0	1	2
x'	1	0	1

Пятая аксиома в этой интерпретации не выполняется. При $x = 0$, $y = 1$ тождество $(x + x')y = y$ нарушается: $(0 + 0') \cdot 1 = (0 + 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 0 \neq 1$.

Первая аксиома выполняется: $0' = 1$, $1' = 0$. Вторая аксиома $x(y+z) \equiv xz + xy$ выполняется.

Пусть $x \neq 2$. Тогда все произведения равны 0, слева и справа от знака равенства получаем 0. Пусть $x = 2$. Если $y + z = 2$, то $y = 2$ или $z = 2$, поэтому слева получаем $2 \cdot 2 = 2$, справа $2 \cdot z + 2 \cdot y = 2$. Если же $y + z \neq 2$, то слева получаем 0. Поскольку из $y + z \neq 2$ следует $y \neq 2$ и $z \neq 2$, то справа тоже получаем 0.

Третья аксиома $x + yz \equiv (x+z)(x+y)$ выполняется. Пусть $x = 0$. Тогда $0 + yz \equiv yz$, $(0+z)(0+y) \equiv zy = yz$. Пусть $x = 1$. Если $yz = 2$, то $y = 2$ и $z = 2$, поэтому слева получаем $1 + 2 \cdot 2 = 1 + 2 = 2$, справа $(1+2)(1+2) = 2 \cdot 2 = 2$.

Если же $yz \neq 2$, то $yz = 0$, поэтому слева получаем $1 + 0 = 0$. Поскольку из $yz \neq 2$ следует $y \neq 2$ или $z \neq 2$, $1 + z$ или $1 + y$ обращается в 0, поэтому $(1+z)(1+y) \equiv 0$.

Четвертая аксиома $xx' + y \equiv y$ выполняется. При любом x $xx' = 0$, $0 + y \equiv y$.

Теорема доказана.

Список литературы 1. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.— 392 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Теория интеллекта: Матема-