

## О ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ НАБЛЮДЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ВЫСОКОТОЧНОГО ГНСС-ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ

### Введение

В общем случае уравнения наблюдений глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) носят нелинейный характер ввиду того, что геометрическая составляющая кодовых и фазовых уравнений наблюдений является уравнением сферы. Традиционно в таких задачах используется линеаризация (разложение в ряд Тейлора) геометрической составляющей уравнений наблюдений и итерационное уточнение решения. Обычно достаточно несколько итераций для достижения оптимального МНК-решения по методу Ньютона-Гаусса [1]. Однако в задачах высокоточного позиционирования, когда основными измеряемыми параметрами являются неоднозначные фазовые измерения и их линейные комбинации (одинарные, двойные разности, приращения (разности) по времени [2]), в отличие от кодовых наблюдений, необходимо решить две проблемы: устранение фазовых циклических скачков и разрешение фазовой неоднозначности (РФН). Обе указанные задачи предполагают отыскание совместного оптимального решения для непрерывных параметров (координаты, уход часов, параметры моделей погрешностей) и для дискретных параметров (циклические фазовые скачки и/или фазовые неоднозначности). Выполнить поиск скачков фазы либо решить задачу РФН возможно в том случае, если непрерывная часть уравнений наблюдений будет линейной. Решение такой сложной задачи будет облегчено, если удастся выполнить линеаризацию геометрической составляющей уравнений наблюдений с необходимой точностью. Линеаризованные системы уравнений позволяют применить апробированные методы статистической обработки наблюдений.

Линеаризация проводится в окрестности априорных значений координат потребителя. Чем эти приближения точнее, тем меньше будет остаточный член линеаризации, вызванный конечным разложением в ряд Тейлора, и точнее будет результат линеаризации. Таким образом, возникает задача оценки необходимой точности начальных приближений для получения требуемого уровня остаточной погрешности в задачах определения и устранения фазовых циклических скачков и в задаче РФН. Так как эти вопросы для рассматриваемых задач не достаточно полно освещены в известных источниках, целью данной статьи является определение условий линеаризации, при которых остаточным членом можно пренебречь по сравнению с уровнем шумовых погрешностей фазовых наблюдений.

В данной работе приведена методика и результаты исследований возможностей линеаризации уравнений наблюдений при получении высокоточного фазового решения без применения итерационного процесса, для двух случаев:

- 1) в задаче поиска циклических фазовых скачков с использованием приращений фазовых наблюдений;
- 2) задаче РФН с использованием одинарных разностей (между ГНСС приёмниками) для различных баз.

### Линеаризуемые функции и методика решения задачи

Уравнения кодовых и фазовых наблюдений представлены в ряде известных в данной области работ (см., например, [2]). Нас интересует только геометрическая часть этих уравнений:

- 1) для первой задачи:

$$\Delta R^{(j)}(t) = R^{(j)}(t_2) - R^{(j)}(t_1), \quad (1)$$

где  $R^{(j)}(t)$  – приращения геометрических расстояний между  $j$ -м спутником и приёмником;

2) для второй задачи:

$$\Delta R_{21}^{(j)}(t) = R_2^{(j)}(t) - R_1^{(j)}(t). \quad (2)$$

где  $\Delta R_{21}^{(j)}(t)$  – одинарные разности между приёмниками;  $R_i^{(j)}(t)$  – геометрическое расстояние между  $i$ -м приёмником и  $j$ -м спутником.

Рассмотрим первую задачу для кинематического режима измерений, при этом будем использовать приращения фазовых наблюдений. Положим, что известны начальные приближения координат  $(x, y, z)$  движущегося объекта с заданными погрешностями. Тогда истинные координаты можно записать в виде

$$\begin{aligned} x &= \overset{\circ}{x} + \Delta x, \\ y &= \overset{\circ}{y} + \Delta y, \\ z &= \overset{\circ}{z} + \Delta z. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, чтобы найти координаты с высокой точностью, необходимо оценить поправки координат  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  и добавить их к начальным приближениям  $\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z}$ .

Чтобы ввести в уравнение наблюдений поправки к координатам, воспользуемся линеаризацией уравнений наблюдений, используя формулу Тейлора в окрестности точки  $\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{z}$ , которая может быть получена из кодового однозначного (абсолютного либо дифференциального) решения. При этом будем пользоваться лишь первыми двумя членами разложения – линейным приближением.

Представим приращения геометрических расстояний  $\Delta R^{(j)}(t)$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta R^{(j)}(t) &= \sqrt{(x(t_2) - X^{(j)}(t_2))^2 + (y(t_2) - Y^{(j)}(t_2))^2 + (z(t_2) - Z^{(j)}(t_2))^2} - \\ &- \sqrt{(x(t_1) - X^{(j)}(t_1))^2 + (y(t_1) - Y^{(j)}(t_1))^2 + (z(t_1) - Z^{(j)}(t_1))^2} = \\ &= \sqrt{[\Delta x + (x(t_1) - X^{(j)}(t_2))]^2 + [\Delta y + (y(t_1) - Y^{(j)}(t_2))]^2 + [\Delta z + (z(t_1) - Z^{(j)}(t_2))]^2} - \\ &- \sqrt{(x(t_1) - X^{(j)}(t_1))^2 + (y(t_1) - Y^{(j)}(t_1))^2 + (z(t_1) - Z^{(j)}(t_1))^2} = \Delta R^{(j)}(t_2, t_1). \end{aligned} \quad (4)$$

где  $X^{(j)}, Y^{(j)}, Z^{(j)}$  – координаты спутников.

Применив линейное разложение к (4), получим

$$\begin{aligned} \Delta R^{(j)}(t) &= \Delta \overset{\circ}{R}^{(j)}(t_2, t_1) + \left[ \frac{\overset{\circ}{x}(t_2) - \overset{\circ}{X}^{(j)}(t_2)}{\overset{\circ}{R}^{(j)}(t_2)} \cdot \Delta x + \frac{\overset{\circ}{y}(t_2) - \overset{\circ}{Y}^{(j)}(t_2)}{\overset{\circ}{R}^{(j)}(t_2)} \cdot \Delta y + \frac{\overset{\circ}{z}(t_2) - \overset{\circ}{Z}^{(j)}(t_2)}{\overset{\circ}{R}^{(j)}(t_2)} \cdot \Delta z \right] = \\ &= \Delta \overset{\circ}{R}^{(j)}(t_2, t_1) + \left\| \overset{\circ}{A}^j(t_2) \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{matrix} \right\| + \varepsilon^j = \Delta \overset{\circ}{R}^{(j)}(t_2, t_1) + \left\| \overset{\circ}{A}^j(t_2) \right\| \cdot \Delta \Delta \bar{x} + \varepsilon^j \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Delta \overset{\circ}{R}^{(j)}(t_2, t_1)$  – приращение псевдодальностей, рассчитанное по начальным приближениям координат приёмника и  $\overset{\circ}{X}^{(j)}, \overset{\circ}{Y}^{(j)}, \overset{\circ}{Z}^{(j)}$  - оценкам координат (эфемерид)  $j$ -го спутника;

$\left\| \overset{\circ}{A}^j(t_2) \right\|$  – вектор направляющих косинусов  $j$ -го спутника относительно приёмника (матрица частных производных);  $\Delta\Delta\bar{x}$  – вектор поправок к приращениям координат;  $\varepsilon^j$  – остаточный член разложения.

Теперь выберем в качестве критериев оценки решения поставленной задачи следующие: 1) величину остаточного члена  $\varepsilon$  и, при полученном  $\varepsilon$ , 2) величину среднеквадратической погрешности определения координат (норма вектора  $\Delta\Delta\bar{x}$ ). Предлагаемое решение состоит в следующем. Вычисляем МНК-оценку вектора  $\Delta\Delta\bar{x}$  из (5):

$$\Delta\Delta\bar{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot [\Delta\bar{S}^{(j)}(t) - \Delta\bar{R}^{(j)}(t_2, t_1)], \quad (6)$$

где  $A = \left\| \overset{\circ}{A}^j(t_2) \right\|$ ,  $\Delta\bar{S}^{(j)}(t)$  – истинное значение  $\Delta\bar{R}^{(j)}(t)$ .

Теперь вычисляем остаточный член  $\varepsilon$  и норму вектора  $\Delta\Delta\bar{x}$  ( $\gamma$ )

$$\begin{cases} \varepsilon = \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}^T \cdot \bar{\varepsilon}}{m}} \\ \gamma = \sqrt{\frac{\Delta\Delta\bar{x}^T \cdot \Delta\Delta\bar{x}}{m}} \end{cases}, \quad (7)$$

где  $\bar{\varepsilon} = \Delta\bar{S}^{(j)}(t) - [\Delta\bar{R}^{(j)}(t_2, t_1) + A \cdot \Delta\Delta\bar{x}]$ ,  $m$  – количество спутников.

Далее проводим анализ влияния величины начального приближения на величину  $\varepsilon$  и  $\gamma$ . Варьируя интервал между двумя соседними отсчетами времени (эквивалентно увеличению базового расстояния) и уровень погрешностей приближений начальных координат, исследуем влияние этих факторов на значения  $\varepsilon$  и  $\gamma$ .

Для второго случая методика линеаризации и решения аналогична методике, описанной выше, где вместо приращений по времени для движущегося приёмника, используются одинарные разности между неподвижными приёмниками: один из приёмников выбирается в качестве «проверного», а второй – в качестве базовой станции. В этом случае

$$\Delta R^{(j)}(t) = \sqrt{(x_2(t) - \overset{\circ}{X}_2^{(j)}(t))^2 + (y_2(t) - \overset{\circ}{Y}_2^{(j)}(t))^2 + (z_2(t) - \overset{\circ}{Z}_2^{(j)}(t))^2} - \sqrt{(x_1(t) - \overset{\circ}{X}_1^{(j)}(t))^2 + (y_1(t) - \overset{\circ}{Y}_1^{(j)}(t))^2 + (z_1(t) - \overset{\circ}{Z}_1^{(j)}(t))^2}, \quad (8)$$

где  $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$  – приближенные координаты приёмников.

Тогда матрица частных производных будет иметь следующий вид:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} \overset{\circ}{x}_2(t) - \overset{\circ}{X}_2^{(j)}(t) & \overset{\circ}{y}_2(t) - \overset{\circ}{Y}_2^{(j)}(t) & \overset{\circ}{z}_2(t) - \overset{\circ}{Z}_2^{(j)}(t) \\ \overset{\circ}{R}_2^{(j)}(t) & \overset{\circ}{R}_2^{(j)}(t) & \overset{\circ}{R}_2^{(j)}(t) \end{array} \right\|. \quad (9)$$

Далее следует анализ, начиная с уравнения (6).

### Результаты исследований

В качестве исходных данных для моделирования в первой поставленной задаче, были использованы оценки текущих координат приёмника  $x(t), y(t), z(t)$  и координаты спутников

$X^{(i)}(t), Y^{(i)}(t), Z^{(i)}(t)$  для наблюдений GPS приёмника (179 GPS-сутки 2005 г.), размещенного на борту вертолета, выполняющего аэрофотосъёмку. При решении второй поставленной задачи (РФН) использовались данные наблюдений трёх станций AMER, OXFR и DROT (Великобритания). Координаты станций и спутников  $(X_i^{(i)}(t), Y_i^{(i)}(t), Z_i^{(i)}(t))$ , получены на 182 GPS-сутки 2007 г. Базовые расстояния между станциями составили: AMER–OXFR – 53 км, AMER–DROT – 130 км. Все данные наблюдений прошли предварительную обработку с использованием программного комплекса OCTAVA\_PPA [3] и полную обработку – GrafNav/GrafNet (Канада) [4].

По известным координатам приёмников и спутников рассчитывались геометрические расстояния, которые принимались за истинные расстояния. Затем в исходные координаты приёмников вводились погрешности заданной величины и рассчитывались новые геометрические расстояния, которые затем необходимо было линеаризовать.

### 1) Задача устранения циклических фазовых скачков с использованием приращений фазовых наблюдений

Средние значения невязок по приращениям геометрических расстояний представлено на рис. 1. На рис. 2 представлены средние значения невязок по приращениям координат.

Цифры в легендах на приведенных графиках (см. рис. 1, 2) означают временной интервал между первой и второй точками наблюдений в секундах. Увеличение интервала между точками, эквивалентно увеличению базового расстояния. Зависимость базового интервала от интервала приращений дальностей между точками приведена на рис. 3.

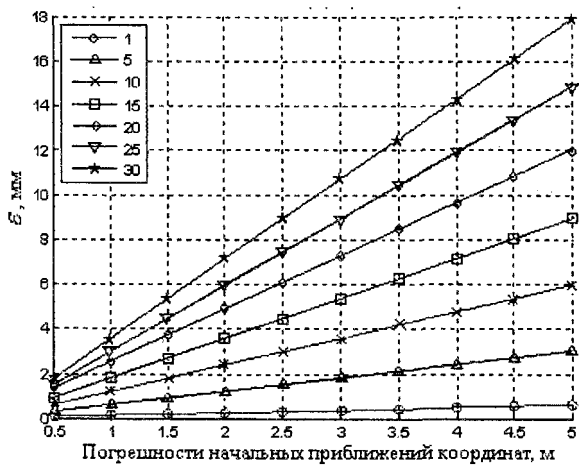


Рис. 1

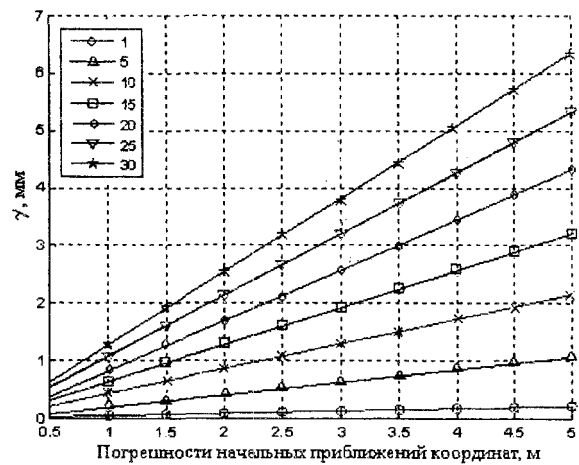


Рис. 2

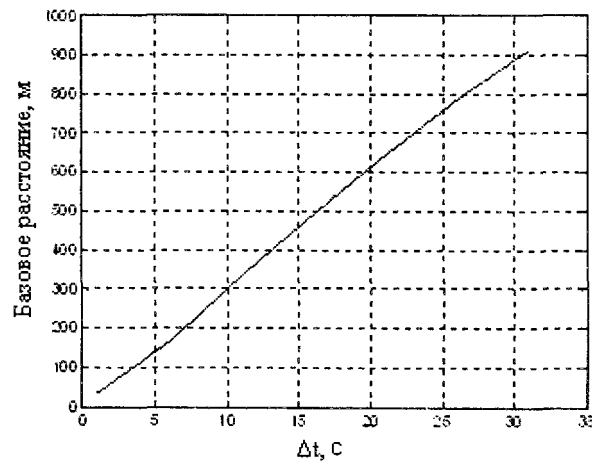


Рис. 3

2) Задача РФН с использованием одинарных разностей (между ГНСС приёмниками) для различных базовых расстояний

Средние значения невязок по приращениям геометрических расстояний и координат представлены на рис. 4: а – для базового расстояния 53 км, б – для базового расстояния 130 км.

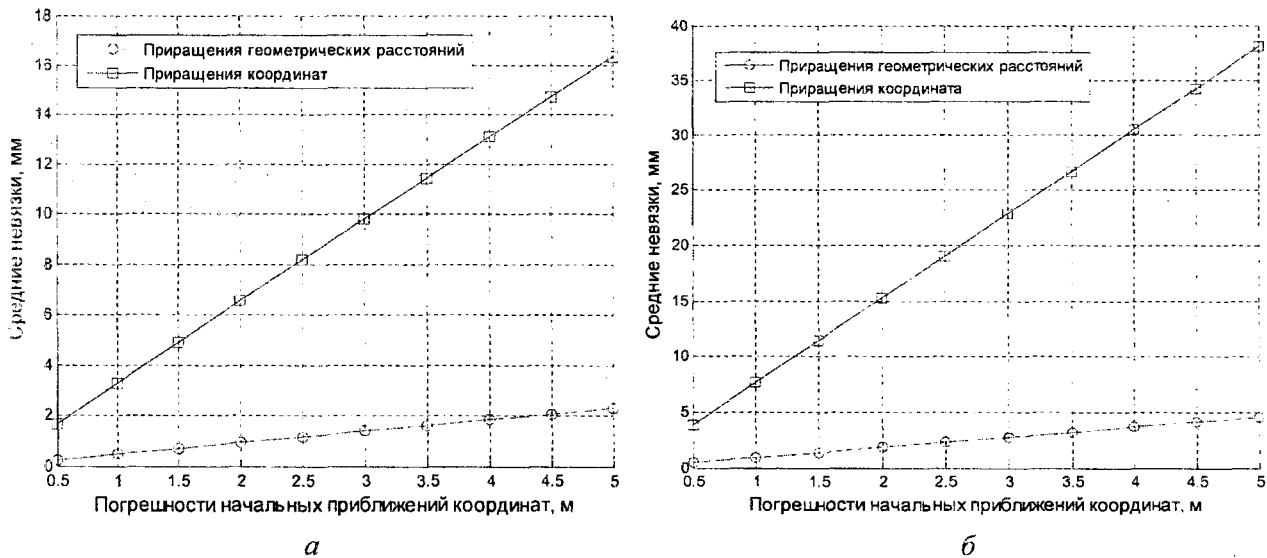


Рис. 4

Сводные результаты анализа представлены ниже: в табл. 1 приводится точность линеаризации при решении по приращениям, в табл. 2 – точность линеаризации при решении по одинарным разностям (между станциями).

Таблица 1

$\Delta t, c$ $\delta x, m$	1 (33 м)		5 (165.8 м)		10 (331.4 м)		20 (643 м)		30 (909.7 м)	
	$\Delta R, мм$	$\Delta x, мм$	$\Delta R, мм$	$\Delta x, мм$	$\Delta R, мм$	$\Delta x, мм$	$\Delta R, мм$	$\Delta x, мм$	$\Delta R, мм$	$\Delta x, мм$
0.5	0.06	0.02	0.3	0.1	0.6	0.22	1.2	0.43	1.8	0.64
1	0.12	0.043	0.6	0.2	1.2	0.43	2.4	0.65	3.6	1.27
2	0.24	0.086	1.2	0.43	2.4	0.86	4.8	1.71	7.2	2.54
5	0.6	0.2	3	1.1	6	2.2	12	4.3	18	6.4

Таблица 2

$\delta x, m$	База, км 53		130	
	$\Delta R, мм$	$\Delta x, мм$	$\Delta R, мм$	$\Delta x, мм$
0.5	0.23	1.64	0.46	3.81
1	0.46	3.27	0.92	7.62
2	0.91	6.54	1.84	15.24
5	2.3	16	4.59	38.1

В табл. 1, 2  $\delta x$  – точность начальных приближений координат для выполнения линеаризации,  $\Delta R$  – ошибка приращений геометрических расстояний при линеаризации,  $\Delta x$  – ошибка поправок к приращениям координат при линеаризации.

### Выводы

1. В данной работе определены условия точной линеаризации уравнений ГНСС наблюдений для решения двух задач: получение высокоточного фазового решения, используя решение по приращениям (кинематический режим); получение высокоточного фазового решения, используя первые разности для различных баз (статический режим).

2. Для получения остаточной ошибки линеаризации на миллиметровом уровне необходимо, чтобы погрешности начальных приближений координат не превышали 2 м (в задаче устранения циклических фазовых скачков), и 1 м в задаче РФН. При этом нет необходимости использовать несколько итераций. Таким образом, в задаче РФН требования к точности начальных приближений более жесткие, чем в задаче поиска и устранения циклических фазовых скачков.

3. Установлено, что основной вклад в точность позиционирования вносят координаты первого опорного пункта (базовой станции), либо координаты первой опорной точки в случае использования приращений.

**Список литературы:** 1. *Жданюк Б. Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с. 2. *Гофманн-Веллингоф Б.* Глобальна система визначення місцеположення (GPS). Теорія та практика : пер. з англ. / Б. Гофманн-Веллінгоф, Г. Ліхтенеггер, Д. Коллінз; пер. з англ за ред. Я. С. Яцківа. – Київ : Наук. думка, 1996. – 380 с. 3. *Zhalilo A., Shelkovenkov D.* Features and service performance of multifunctional software toolkit “OCTAVA” for processing and analysis of GPS/GNSS observations, GEOS 2007 Conference Proceedings, Prague, Czech Republic, 1st – 2nd March 2007, pp. 102-110. 4. *GrafNav/GrafNet* // Режим доступу: <http://www.novatel.com/products/waypoint-software/waypoint-post-processing-software/grafnav-grafnet/>

*Харьковский национальный  
университет радиотехники*

*Поступила в редколлегию 11.02.2011*