УДК 519.7

ТЕОРИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ. I.

ПОХОДЕНКО В.А., ТАРАСОВА Т.Г., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО С.Ю.

Работа посвящена теории цветового зрения человека. В первой ее части сформулированы задачи исследования и развита общая теория компараторной идентификации линейных систем.

1.1. Введение

Одно из главных препятствий, с которым сталкивается исследователь, стремящийся математически описать работу органов чувств, заключается в неразработанности необходимого математического аппарата. Оказывается, что математики не позаботились о конструировании таких форм, в которые можно было бы облечь наблюдаемые психофизические явления. Поначалу этот факт изумляет. Не верится, что среди огромного множества формальных структур, накопленных математикой за многие века ее существования, нет таких, которые подошли бы для решения интересующих нас задач. Однако, если разобраться, то именно этого и следовало бы ожидать. Ведь математический аппарат, в конечном счете, всегда развивается в ответ на запросы практики, удовлетворяя потребности тех областей знания, которые в нем нуждаются. Так, желание решать задачи небесной механики вынудило Ньютона разработать дифференциальное и интегральное исчисления. Стремление постичь законы мышления привело Буля к необходимости создания аппарата алгебры логики. Подобные примеры можно было бы умножить.

Психофизика – весьма своеобразная область знания. Она изучает связи, существующие между объективными процессами, происходящими в физическом мире, и явлениями субъективной сферы – ощущениями, представляющими собой факты нашего сознания. С проблемой математического описания подобных связей науке прошлого почти не приходилось сталкиваться. Лишь после возникновения кибернетики и информатики задачи моделирования психофизических процессов стали актуальными, и к их решению всерьез обратилась научная мысль. Нет никаких оснований надеяться на то, что такая специфическая и не похожая на другие область знания, как психофизика, не потребует для своей математизации никаких дополнительных формальных средств и сможет обойтись уже имеющимися математическими разработками. Напротив, следует ожидать, что потребности в математических средствах, возникающие в процессе моделирования психофизических процессов, приведут в будущем к развитию новых обширных и глубоких областей математического знания. В этой статье предпринята попытка положить начало математическим разработкам такого рода. Источником, из которого черпались математические задачи, для нас служили запросы практики моделирования функции человеческого зрения.

Одна из классических задач психофизики зрения заключается в изучении связи между ***световым излучением***, падающим на сетчатку глаза, и ***цветом*** ощущения, возникающим в сознании наблюдателя в ответ на этот зрительный стимул. Еще Ньютон [1] установил, что качество цвета всецело определяется спектром соответствующего светового излучения. Он, кроме того, предложил изображать цвета в виде точек некоторой области в трехмерном пространстве. Ньютон также обнаружил определенные закономерности восприятия при сложении излучений, которые наводили на мысль, что ***координаты цвета*** (т. е. координаты точек, изображающих цвета) линейно зависят от спектров соответствующих световых излучений. Отправляясь от этих результатов, Максвелл [2] записал координаты u_1, u_2, u_3 цвета, соответствующего световому излучению со спектром $b(\lambda)$, в виде интегралов

$$u_1=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)K_1(\lambda)d\lambda,\; u_2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)K_2(\lambda)d\lambda,$$
$$u_3=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)K_3(\lambda)d\lambda. \qquad (1.1)$$

Здесь $b(\lambda)$ – зависимость плотности энергии b светового излучения от длины волны λ электромагнитных колебаний; $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$, $K_3(\lambda)$ – некоторые весовые функции, характеризующие чувствительность глаза к лучам с различной длиной волны; λ_1 и λ_2 – минимальная и максимальная длины волн световых излучений, видимых глазом. Максвелл первым предпринял попытку опытным путем определить конкретный вид функций $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$, $K_3(\lambda)$, получивших название *функций спектральной чувствительности зрения*. Впоследствии эти функции определялись многими авторами на базе более совершенной аппаратуры и улучшенной методики. В настоящее время значения функций спектральной чувствительности зрения определяют с весьма высокой точностью, указывая для них три, а иногда и более значащих цифр. Наконец, Шредингер [3] поставил задачу построения аксиоматической теории цветового зрения. Отправляясь от законов цветового зрения, сформулированных Грассманом [4], он попытался чисто формальным путем вывести из них преобразования (1.1). Однако недостаточный уровень развития необходимого математического аппарата, а также недостаточно совершенная формулировка законов зрения не позволили ему сделать это достаточно корректно.

Основным инструментом *колориметрии* – науки об измерении цвета является *метод сравнения цветов.* Согласно этому методу наблюдателю предъявляют на двух небольших полях, имеющих общую границу, световые излучения, характеризующиеся соответственно спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. Наблюдатель воспринимает эти излучения в виде соприкасающихся цветных пятен. От него требуется дать ответ на вопрос, совпадают или не совпадают друг с другом цвета полей сравнения. Формирование ответа существенно облегчается тем, что в случае совпадения цветов граница между цветными пятнами исчезает. Таким образом, наблюдатель фактически принимает решение о совпадении или различии цветов с помощью очень тонкого индикатора – отсутствия или наличия видимой границы между полями сравнения. О высокой чувствительности метода сравнения свидетельствует такой факт. Если подать на поля сравнения пару идентичных излучений $(b(\lambda), b(\lambda))$, наблюдатель зарегистрирует равенство цветов. Однако если предъявить пару излучений $(b(\lambda), 1{,}01b(\lambda))$, т.е. на правом поле энергетический уровень излучения повысить всего лишь на 1% без изменения спектрального состава света, наблюдатель с нормальным зрением отчетливо зафиксирует различие цветов. Установлено, что методом сравнения можно различить по цвету много миллионов световых излучений.

С первого взгляда может показаться, что цвета взаимно-однозначно связаны с порождающими их световыми излучениями, и поэтому наблюдатель, регистрирующий равенство или неравенство цветов, тем самым обнаруживает совпадение или различие соответствующих световых излучений. Факты, однако, говорят, что это не так. Оказывается, существует множество совершенно различных по спектру и по мощности световых излучений (их называют *метамерными*), которые для глаза неотличимы по цвету. Отсюда следует, что различаемых цветов гораздо меньше, чем имеющихся световых излучений. Орган зрения реагирует одним и тем же цветом на огромное число различных световых излучений. Таким образом, глаз, формируя цвет, тем самым группирует световые излучения в некоторые классы. Установлено, кроме того, что различные наблюдатели классифицируют световые излучения не совсем одинаково. Поэтому световые излучения, видимые одним наблюдателем как одноцветные, для другого наблюдателя будут, как правило, выглядеть не одинаковыми по цвету.

Из этих фактов следует, что каждый человек представляет собой особый объект для колориметрического обследования. Более того, оказывается, что один и тот же наблюдатель в различные периоды своей жизни в колориметрических опытах может реагировать по-разному. Это означает, что параметры зрительной системы человека с течением времени меняются, эволюционируют. Несмотря на эти обстоятельства и на то, что в колориметрических опытах приходится иметь дело с субъективными ощущениями наблюдателя и с его субъективно формируемым решением о равенстве или неравенстве цветов, эти опыты строго объективны и вполне могут быть отнесены к разряду чисто физических экспериментов. Исход колориметрических опытов совершенно не зависит от желания наблюдателя. Хотя наблюдатель может произвольно выдумать свой ответ или же ошибиться в выработке правильного ответа (например, при отвлечении внимания в процессе сравнения цветов), однако исследователь имеет возможность обнаружить такие ответы и отвергнуть их, подобно тому, как в процессе обработки результатов физического эксперимента удается выявить и исключить промахи экспериментатора.

Наблюдатель в колориметрическом опыте действует вполне машинообразно: повторное предъявление той же самой пары световых излучений приводит к тому же самому ответу (если, конечно, не растягивать проведение эксперимента на многие годы, когда сам наблюдатель станет иным). Правда, в особых случаях, а именно – когда цвета находятся на границе между равенством и неравенством, наблюдается элемент случайности в ответе. Но такой же элемент случайности появляется в любом физическом эксперименте в тех случаях, когда приходится работать на пределе возможностей измерительных приборов. В этих случаях точность исхода физических опытов обычно повышают путем многократного повторения одних и тех же испытаний с последующей статистической обработкой результатов экспериментов. Такая же статистическая обработка ответов испытуемого возможна и в колориметрических опытах. Точность, достигаемая в колориметрических опытах, составляет 2÷3 знака, а при глубокой статистической обработке может доходить до четырех. Далеко не каждый физический эксперимент можно выполнить с такой высокой точностью.

Из всего сказанного вывод таков: в колориметрических опытах мы имеем тот, по существу поразительный, случай, когда субъективные ощущения человека и его субъективные действия, производимые им при сравнении цветов, успешно исследуются вполне объективными, чисто физическими методами. Иными словами, колориметрические опыты демонстрируют нам принципиальную возможность объективного изучения субъективных состояний человека, дают конкретный прецедент такого изучения. Это заключение очень ответственно, поскольку из него можно извлечь ряд далеко идущих выводов. В самом деле, если это так, тогда нет непроходимой пропасти между объективным физическим миром и субъективным миром человека. Значит, понятия, выражаемые словами "объективный" и "субъективный", логически не исключают друг друга, и второе поглощается первым. Это значит также, что субъективные состояния поддаются вполне объективному изучению чисто физическими методами.

В связи со столь кардинальными выводами, тезис о возможности успешного объективного изучения некоторых субъективных состояний человека с помощью колориметрических опытов, на котором эти выводы основываются, должен быть подвергнут тщательнейшей проверке и придирчивому критическому рассмотрению. К выполнению этой задачи мы сейчас и приступим. Главное возражение состоит в следующем. В колориметрических опытах, действительно, изучается объективно регистрируемое поведение человека. В них наблюдатель выступает в роли некоего "черного ящика" с двумя входами и одним выходом. На входы "черного ящика" поступают световые излучения, характеризуемые своими спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. С математической точки зрения эти спектры представляют собой некоторые функции вещественного аргумента λ, заданного на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, с вещественными значениями $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. На выходе "черного ящика" формируется двоичный сигнал $y \in \{0, 1\}$. Его значение 1 будем интерпретировать как ответ наблюдателя "да", означающий равенство цветов на полях сравнения, а значение 0 как ответ "нет", означающий неравенство цветов. Таким образом, наблюдатель своим поведением реализует некоторый предикат

$$y=\Phi(b'(\lambda), b''(\lambda)), \qquad (1.2)$$

и именно свойства этого предиката изучаются в колориметрических экспериментах. Как входные сигналы $b'(\lambda)$, $b''(\lambda)$, так и выходной сигнал y могут быть зарегистрированы физическими приборами и поэтому дают вполне объективную информацию для установления вида предиката Φ.

Однако во всем этом еще нет места для субъективных состояний наблюдателя; пока ни слова не сказано о цветах зрительных ощущений и об операции сравнения цветов, осуществляемой сознанием наблюдателя. Правда, основываясь на собственном субъективном опыте, мы можем утверждать, что: 1) когда наблюдатель формирует сигнал y=1, при этом цвета его ощущений, в самом деле, равны; 2) при этом наблюдатель, действительно, каким-то усилием своего сознания сравнивает между собой цвета и приходит к заключению об их равенстве. Тем не менее, в справедливости этих двух утверждений мы не можем удостовериться посредством объективных наблюдений.

Как можно бороться с этим возражением? Оно утратило бы силу, если бы нам удалось, исходя только из объективно наблюдаемых свойств предиката Φ, каким-то образом доказать, что преобразование сигналов Φ можно представить в виде

$$y=D(f(b'(\lambda)), f(b''(\lambda))). \qquad (1.3)$$

Здесь сигналы

$$f(b'(\lambda))=u', f(b''(\lambda))=u'', \qquad (1.4)$$

$$u'=(u'_1, u'_2, u'_3), u''=(u''_1, u''_2, u''_3) - \qquad (1.5)$$

трехмерные векторы с вещественными компонентами u'_1, u'_2, u'_3 и u''_1, u''_2, u''_3, вычисляемыми по формулам

$$u'_1=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)K_1(\lambda)d\lambda,\ u'_2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)K_2(\lambda)d\lambda,$$
$$u'_3=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)K_3(\lambda)d\lambda;\ u''_1=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)K_1(\lambda)d\lambda, \qquad (1.6)$$
$$u''_2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)K_2(\lambda)d\lambda,\ u''_3=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)K_3(\lambda)d\lambda.$$

Формулы (1.5) математически описывают вид функций $u'=f(b'(\lambda))$ и $u''=f(b''(\lambda))$. Буквой D обозначен предикат равенства, определяемый следующим образом:

$$D(u',\ u'')=\begin{cases}1, \text{если} & u'=u'',\\ 0, \text{если} & u'\neq u''.\end{cases} \qquad (1.7)$$

Только что описанное представление предиката Φ легко интерпретируется в психологических терминах. Сигналы u' и u'' можно понимать как ***цвета*** полей сравнения, субъективно переживаемые наблюдателем. Функцию f интерпретируем как ***преобразование светового излучения в цвет*** зрительного ощущения, производимое зрительной системой человека. Предикат D будем интерпретировать как ***операцию сравнения цветов*** полей сравнения, осуществляемую сознанием наблюдателя. Если бы удалось доказать, что предикат (1.2) может быть представлен в виде соотношений (1.3)÷(1.7), это дало бы нам право утверждать, что: 1) сигналы u' и u'' могут быть приняты в качестве математического описания цветов на полях сравнения; 2) функция f может быть принята в качестве математического описания преобразования светового излучения, действующего на сетчатку глаза, в цвет зрительного ощущения, возникающего в сознании наблюдателя. В результате была бы полностью решена задача логического обоснования объективными методами математической модели цветового зрения (1.1), предложенной Максвеллом.

Описанный подход, однако, тоже может быть подвергнут критике. Возражение состоит в том, что при этом подходе имеется в виду лишь доказательство ***возможности*** представления преобразования сигналов в зрительной системе в виде (1.3). Надо же доказывать ***необходимость*** такого представления. Согласно этой точке зрения следует доказывать, что зрительный анализатор ***действительно*** обладает анатомо-физиологическими структурами, вычисляющими в процессе зрения значения интегралов (1.1), и что цвет зрительных ощущений на ***самом деле*** есть тройка числовых кодов, материально представленных в виде некоторого физико-химического процесса. На это возражение можно ответить следующим образом. Спору нет, было бы очень заманчиво получить не только функциональное, но и структурное описание зрительного анализатора. Однако получение математических зависимостей, описывающих лишь способ функционирования зрительной системы, - это тоже немало. Даже в физике в большинстве случаев ограничиваются функциональным (феноменологическим) описанием процессов. Небесная механика, ядерная физика и многие другие важные разделы физики идут почти исключительно по этому пути. Если же мы хотим ограничиться функциональной стороной дела, тогда с неизбежностью придется довольствоваться лишь возможными математическими моделями изучаемых процессов. Все возможные различающиеся между собой по структуре тождественные формулы, описывающие одну и ту же функцию, придется при этом считать равноценными. Ни одной из этих формул нельзя отдать предпочтения при функциональном подходе, сколь бы сильно они ни отличались друг от друга по своей структуре.

1.2. Исследования Шредингера

Итак, для того, чтобы продемонстрировать возможность успешного объективного изучения субъективных состояний человека, осталось сделать "совсем немного: доказать, что предикат (1.2) может быть записан в виде системы соотношений (1.3)÷(1.7). Первую попытку такого доказательства (и пока единственную) предпринял в 1920 году Шредингер [3]. Насколько нам известно, его статья вообще является первым исследованием такого рода во всей психофизике. Поэтому она заслуживает самого пристального изучения. Здесь кратко излагается ход идей Шредингера по обоснованию зависимостей (1.3)÷(1.7).

В начале статьи автор пишет, что в ней разработан ***проект*** теоретического обоснования колориметрии.

Отсюда явствует, что он не претендует на исчерпывающее решение поставленной задачи и отдает себе отчет в ее сложности. Далее Шредингер пишет, что искусство измерения цвета он рассматривает преимущественно как составную часть экспериментальной физики, а не как составную часть физиологии ощущений. Вместе с тем, он подчеркивает принципиальное отличие измерений, осуществляемых органами чувств, от любых измерений, производимых при помощи физических приборов. Колориметрические измерения основаны на том, что мы в состоянии вынести суждение о том, одинаковы или нет два граничащих между собою цветных поля. В то время как результаты измерения одного и того же физического параметра не зависят от типа использованного прибора, результаты цветовосприятия существенно зависят от глаза наблюдателя. В последнем случае никак нельзя заменить глаз каким-либо инструментом, так как глаз другого наблюдателя по-иному воспринимает тот же самый световой стимул, и абсолютно излишними будут споры о том, чье восприятие лучше или правильнее. Два различных источника света, видимые одинаковыми, взятые сами по себе, не имеют ничего общего, кроме того, что они кажутся этому глазу одинаковыми; оценка света глазом является неоспоримой и никаким другим измерительным прибором не проверяется и не воспроизводится.

После всего этого можно было бы сказать, что область зрения принадлежит совсем не физике. Здесь исследуются не объективные свойства физического мира, а свойства субъективных ощущений. Шредингер, однако, возражает против такой постановки вопроса. Он говорит, что при исследовании цвета речь идет не об изучении свойств и закономерностей окружающего нас физического мира, а об изучении способа действия органа ощущения. Это сразу приводит к выводу, что цвет является не менее объективным предметом исследований, чем атомы, электромагнитные поля, источники света и т. д. Если все же кто-нибудь будет против этого возражать и настаивать на принципиальном отличии физических явлений от субъективных ощущений, ему можно ответить следующим образом. Единственной связью человека с внешним миром являются его органы чувств. Вся объективная информация о физических процессах, прежде чем станет достоянием нашего разума, так или иначе проходит через ощущения и в этом смысле является субъективной. Следовательно, это возражение ведет к солипсистскому выводу, что все наши знания об окружающем мире субъективны. Таким образом, не следует думать, что в то время как тела, которые нас окружают, обладают сами по себе определенными свойствами, тем не менее цвета имеют значение только для нас. Трехмерное многообразие цвета, цветовое пространство обладает совершенно такой же реальностью, как и наше физическое трехмерное пространство. Конечно, способ, каким мы задаем в нем координаты, классифицируем и измеряем его элементы, является искусственно созданной математической конструкцией, но то же самое относится и к обычному физическому пространству.

После этого введения Шредингер приступает к характеристике света и цвета. Цвет появляется тогда, когда в глаз попадает свет. Световое излучение описывается при помощи спектра – функции $f(\lambda)$ длины волны λ, изменяющейся в пределах от 0,4 до 0,8 мкм. Множество спектров образует функциональное пространство, его мощность больше, чем мощность любого конечномерного пространства. В принципе, возможно, чтобы это же относилось и к множеству цветов, однако это не так: это множество всего лишь трехмерно. Световые спектры группируются по принципу неразличимости соответствующих цветов на полях сравнения в большие классы. Каждый класс равен по мощности функциональному пространству, а многообразие этих классов трехмерно. Шредингер предлагает понимать под выражением "цвет излучения" класс всевозможных излучений, выглядящих одинаковыми по цвету с излучением $f(\lambda)$.

Далее вводится операция сложения $f(\lambda)+g(\lambda)$ световых излучений $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$. Суммарное излучение получается при совмещении лучей в одном и том же месте. Утверждается, что с равным правом можно говорить и о сложении цветов, и что это следует из третьего закона Грассмана: "Одинаково выглядящие излучения дают при сложении одинаково выглядящие излучения". Затем Шредингер вводит обозначения для цветов, знак = для обозначения равенства цветов. Вводится также операция вычитания цветов: если $A+X=B$, то полагаем, что $X=B-A$. Указывается, что вычитание однозначно, однако оно определено не для всех пар цветов. Умножение цвета на натуральное число m определяется как многократное сложение $mA = A+A+A++\ldots+A\,m$ раз. Обратной к этой операции будет операция умножения на дробь вида $1/m$. Для того чтобы найти цвет A/m, нужно разделить спектр $f_A(\lambda)$, соответствующий цвету A, на m. Спектр $f_A(\lambda)/m$ будет соответствовать цвету A/m. Отмечается, что однозначность последней операции не очевидна и требует доказательства. Суперпозиция этих двух операций приводит к операции умножения цвета на рациональное число. Далее производится ссылка на второй закон Грассмана: "Непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета". Здесь Шредингер предлагает свою редакцию этого закона: "Если $\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)+\sigma\varphi(\lambda)$ являются двумя мало отличающимися друг от друга излучениями, а $\psi(\lambda)$ означает излучение, выглядящее одинаково с $\varphi(\lambda)$, то среди одинаково выглядящих излучений $\varphi+\sigma\varphi$ найдется минимум одно $\psi+\sigma\psi$, которое ненамного будет отличаться от y". Сославшись на нее, Шредингер приходит к понятию произведения μA произвольного вещественного числа μ на цвет A.

Но можно ли принять постулат об однозначности деления цвета на натуральное число, т. е. утверждать, что из равенства $\mu A=\mu B$ следует равенство $A=B$? Шредингер полагает, что этого нельзя сделать без дополнительных ссылок на опыт и здесь же приводит постулат, принадлежащий Герингу: "Одинаково выглядящие излучения будут одинаковыми, если повышать или понижать интенсивность каждого из них в одинаковых размерах". По поводу этого постулата замечается, что в нем, вероятно, содержится избыточная информация, так как частный случай этого постулата об умножении на натуральные числа был уже логически выведен из сложения цветов.

Переходя к обсуждению вопроса о размерности цветового пространства, Шредингер приводит формулировку первого закона Грассмана: "Для любого излучения можно подобрать одинаково выглядящую смесь белого излучения с некоторым чистым спектральным или же пурпурным излучением". Под чистым спектральным понимается монохроматическое излучение, под пурпурным – смесь крайних в видимой части спектра монохроматических излучений. Он замечает, что эта формулировка содержит больше информации, чем это нужно для обоснования размерности цветового пространства, и предлагает свою собственную формулировку постулата: "Существует линейно независимая тройка цветов. Любые четыре цвета всегда линейно зависимы".

Далее указывается способ взаимно-однозначного сопоставления каждому цвету трех вещественных чисел, называемых координатами цвета. Надо взять тройку A, B, C линейно независимых эталонных цветов и световое излучение со спектром $\Phi(\lambda)$, ни в одной точке не обращающимся в нуль. Из этого спектра вырезается небольшой участок на интервале $[\lambda, \lambda+\Delta\lambda]$ – так называемое "спектральное излучение", и цвет F_λ от этого излучения уравнивается линейной комбинацией эталонных цветов $F_\lambda=x_1A+x_2B+x_3C$. Если "спектральное излучение" сдвигать вдоль оси длин волн, меняя значение величины λ, коэффициенты x_1, x_2, x_3 при эталонных цветах будут изменяться, таким образом, получаем три функции $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$. В качестве координат цвета "спектрального излучения" единичной мощности принимаются числа

$$\frac{x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \frac{x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \frac{x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)}.$$

Координаты цвета произвольного излучения $f(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$\sum_1^n \frac{fx_1}{\Phi}, \sum_1^n \frac{fx_2}{\Phi}, \sum_1^n \frac{fx_3}{\Phi}.$$

Утверждается, что эти результаты можно с достаточной точностью заменить определенными интегралами вида

$$\int \frac{f(\lambda)x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}d\lambda, \quad \int \frac{f(\lambda)x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)}d\lambda, \quad \int \frac{f(\lambda)x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)}d\lambda.$$

Интегрирование здесь ведется по всей видимой части спектра в диапазоне $\lambda \in [0,4 \div 0,8$ мкм$]$. В статье Шредингера рассматривается также много других вопросов, однако они не отражены в нашем изложении, как не относящиеся к интересующей нас теме. Вместе с тем, мы постарались извлечь из нее все существенное, что связано с обоснованием соотношений (1.3)–(1.7).

1.3. Постановка задач исследования

Соображения Шредингера, изложенные выше, имеют, на наш взгляд, огромное значение для науки. Здесь впервые провозглашается, что ощущения человека могут успешно исследоваться чисто объективными методами и описываться математическими зависимостями точно так же, как и физические процессы. Более того, на примере зрительных ощущений показывается, как конкретно должно вестись исследование психических состояний, чтобы оно, в конечном итоге, приводило к их достоверному математическому описанию. Тезис Шредингера о возможности объективного изучения субъективных состояний не противоречит философии диалектического материализма, который считает, что между физическим и психическим нет непроходимой пропасти. В.И. Ленин писал: "...противоположность материи и сознания имеет абсолютное значение только в пределах очень ограниченной области: в данном случае исключительно в пределах основного гносеологического вопроса о том, что признать первичным, а что вторичным. За этими пределами относительность данного противоположения несомненна" [5]. "За этими пределами оперировать с противоположностью материи и духа, физического и психического, как с абсолютной противоположностью, было бы громадной ошибкой" [5].

Вместе с тем, как пишет сам Шредингер, его работа является лишь попыткой создания проекта теоретического обоснования колориметрии; она представляет собой не завершение, а только начало разработки проблемы. Ниже анализируются недостатки и пробелы в работе Шредингера. Это делается не с той целью, чтобы умалить его заслуги, которые, в действительности, очень велики, а затем, чтобы, отправляясь от достижений Шредингера, двинуться дальше в разработке поставленной им проблемы. Шредингер указывает, что множество спектров световых излучений образует функциональное пространство. Но какое именно? Этот вопрос остается без ответа. Между тем ясно, что ход дальнейших рассуждений должен существенно зависеть от выбора конкретного способа математического описания всей совокупности возможных зрительных стимулов, что световые спектры по признаку цвета группируются в классы. Ясно, что имеются в виду классы эквивалентности. Однако далеко не каждый бинарный предикат порождает классы эквивалентности. Так, множества равноцветных излучений, в принципе, могли бы и пересекаться – в этом нет ничего логически невозможного. Классы излучений, дающих один и тот же цвет на левом поле, могли бы и не совпадать с классами равноцветных излучений для правого поля. Чтобы этого не случилось, нужно потребовать, чтобы поведение наблюдателя подчинялось некоторым специальным свойствам. Однако об этих свойствах в работе Шредингера ничего не говорится. Вследствие этого существование классов излучений, которые можно было бы отождествить с цветами, остается недоказанным.

Шредингер без каких-либо оговорок пользуется операцией сложения излучения и операцией умножения излучения на вещественное число. При этом, очевидно, предполагается, что пространство излучений является линейным. Однако об аксиомах линейного пространства, которые должны при этом выполняться в опыте, ничего не говорится. Далее вводятся операции сложения и вычитания цветов (т.е. классов излучений). При этом указывается, что вычитание цветов определено не для всех пар цветов. Но это противоречит прежде сделанному предположению о том, что множество всех излучений, видимых глазом, есть функциональное пространство. На самом же деле Шредингер, очевидно, имеет в виду, что спектры не могут иметь отрицательных значений. Следовательно, речь должна идти не обо всем функциональном пространстве, а только о какой-то его части, по-видимому, о положительном конусе, однако это не оговаривается, эта сторона дела никак не отражена в постулатах, которые должны выполняться в опыте.

Много неясного в понятии непрерывности множества цветов. Что значат слова “непрерывное изменение цвета”, если под цветом понимается класс излучений? Как вывести из закона непрерывности в формулировке Грассмана или Шредингера существование и единственность произведения цвета на вещественное число? Эти и другие вопросы, которые можно было бы здесь поставить, остаются без ответа. То же самое относится и к проблеме доказательства конечномерности пространства цветов. Выглядят весьма бездоказательными и рассуждения о введении тройки чисел для математической характеристики цвета. Как доказать, что эта тройка чисел взаимно-однозначно связана с цветом? Сказанного достаточно, чтобы убедиться в том, что работа Шредингера, действительно, дает лишь *проект* теоретического обоснования колориметрии. К сделанному надо добавить еще очень многое, чтобы этот проект превратился в законченную научную теорию цвета. Целью настоящей статьи является разработка идей, сформулированных Шредингером.

1.4. Линейно порожденные предикаты

Пусть V – *выпуклое множество* в пространстве $L^2[0, 1]$. Это значит, что для любых двух точек $x, y \in V$ отрезок $[x, y] = \{Z/Z = (\lambda-\gamma)x+\gamma y,\ 0 \le \gamma \le 1\}$ является частью множества V. Отметим несколько частных случаев, которые, в основном, будут нас интересовать в приложениях. А именно, когда V – все пространство, V – окрестность некоторой точки, V - положительный конус пространства $L^2[0, 1]$ и, наконец, V – пересечение положительного конуса с некоторым телесным ограниченным множеством. Второй из этих случаев встречается, когда существуют экспериментальные возможности лишь для локального изучения предиката. Естественно, на основе такой информации могут быть сделаны доказательные выводы лишь для изученной окрестности. С математической точки зрения это означает, что рассматривается только ограничение предиката на эту окрестность, хотя физически предикат может быть определен и вне ее.

Положительным конусом в пространстве $L^2[0, 1]$ называется множество всех неотрицательных функций (более точно, всех классов эквивалентности по отношению равенства почти всюду, содержащих неотрицательные функции) этого пространства с линейной и топологической структурой, индуцированной на нем в пространство. Это множество ***выпукло***: если $x(t)$ и $y(t)$ – неотрицательные функции, то их выпуклая комбинация $z(t) = (1-\gamma)x(t) + \gamma y(t)$ $(0 \le \gamma \le 1)$ также является неотрицательной функцией. Необходимость изучения только неотрицательных функций возникает, например, в случаях, когда функции являются математическим описанием спектра. Наконец, четвертый случай на практике возникает, когда существенны оба приведенные выше соображения. Например, при изучении зрения человека ограничиваются излучениями с не очень большими энергиями, поскольку чрезмерно интенсивные излучения могут разрушить орган зрения. Это значит, что рассматриваются излучения со спектральными характеристиками, являющимися неотрицательными функциями $x(\lambda)$, удовлетворяющими условиям $||x|| \le c$, где c – некоторая положительная константа. Другими словами, в этом случае множество V является пересечением положительного конуса и некоторого шара с центром в нуле.

Договоримся о терминологии и обозначениях. ***Линейным оператором*** будем называть аддитивный, однородный и непрерывный оператор в $L^2[0, 1]$. Для любого линейного оператора A и множества V через $A(V)$ будем обозначать множество всех точек $y \in L^2[0, 1]$, для которых существуют точки $x \in V$ такие, что $y = Ax$. В частном случае, когда V совпадает со всем пространством, это множество называется ***образом оператора** A* и обозначается $\mathrm{Im}A$. Множество всех точек $x \in L^2[0, 1]$, для которых $Ax = 0$, называется ***ядром оператора*** и обозначается через $\mathrm{Ker}A$. Через A^* будем обозначать оператор, сопряженный с оператором A, т. е. такой, для которого при всех $x, y \in L^2[0, 1]$ справедливо равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Если подпространства X и Y пространства $L^2[0, 1]$ обладают тем свойством, что для любого элемента $z \in L^2[0, 1]$ существуют единственные элементы $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что $z = x + y$, то говорят, что пространство $L^2[0, 1]$ разложено в прямую сумму подпространств X и Y. Этот факт будем изображать равенством $L^2[0, 1] = X \dot{+} Y$. В частном случае, когда в прямом разложении подпространства X и Y взаимно ортогональны, говорят об ***ортогональном разложении***. Будем писать в таком случае $L^2[0, 1] = X \oplus Y$. Оператор A называется ***проектором***, если он линеен и ***идемпотентен***, т.е. $A^2 = A$. Для любого проектора существует разложение в прямую сумму:

$$L^2[0, 1] = \mathrm{Im}A \dot{+} \mathrm{Ker}A, \qquad (1.8)$$

причем A является тождественным преобразованием на $\mathrm{Im}A$. Проектор проектирует параллельно своему ядру. В частном случае, когда проектор P является *самосопряженным оператором* (т.е. $P^* = P$), он называется *ортопроектором*. В этом случае прямое разложение (1.8) является ортогональным:

$$L^2[0, 1] = \mathrm{Im}P \oplus \mathrm{Ker}P. \qquad (1.9)$$

Множество M называется ***аффинным многообразием***, если $(1-\gamma)x + \gamma y \in M$ для всех $x, y \in M$ и всех чисел γ. Каждое аффинное многообразие M параллельно единственному линейному многообразию M_0 в том смысле, что $M = M_0 + a$ для некоторой точки $a \in M$. Линейное многообразие M_0 называется ***транслянтом аффинного многообразия** M*. Для всякого множества V существует единственное минимальное по включению аффинное множество M, содержащее V. Оно именуется ***аффинной оболочкой множества** V* и обозначается $\mathrm{aff}V$. Транслянт множества $\mathrm{aff}V$ будем обозначать $T(V)$. Наконец, договоримся для всякого множества V обозначать через $L(V)$ его линейную оболочку.

Рассмотрим предикат Φ, определенный на декартовом квадрате $V \times V$, где V – некоторое множество в $L^2[0, \lambda]$. Другими словами, Φ - функция, которая ставит в соответствие любой паре $x, y \in V$ число нуль или один. Будем предполагать, что этот предикат удовлетворяет условиям:

1) для любого $x \in V$ имеет место равенство $\Phi(x, x) = 1$;

2) для любых $x, y \in V$ равенство $\Phi(x, y) = 1$ влечет равенство $\Phi(y, x) = 1$,

3) для любых $x, y, z \in V$ равенства $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(y, z) = 1$ влекут равенство $\Phi(x, z) = 1$.

При этих условиях отношение между x и y, состоящее в выполнении равенства $\Phi(x, y) = 1$, обладает рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью. Такое отношение порождает на V разбиение на классы, а именно x и y принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=1$. Нас будут интересовать условия, при которых это разбиение на классы согласуется с линейной и топологической структурой пространства $L^2[0, 1]$.

Назовем предикат Φ *линейно порожденным*, если в $L^2[0, 1]$ существует такой ортопроектор P, что для всех $x, y \in V$

$$\Phi(x, y)=D(Px, Py), \qquad (1.10)$$

где D – *предикат равенства*: $D(u, v)=1$ тогда и только тогда, когда $u=v$.

Лемма 1.1. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате произвольного множества V, был линейно порожденным, необходимо и достаточно, чтобы в $L^2[0, 1]$ существовал такой линейный оператор B с замкнутым образом, что*

$$\Phi(x, y)=D(Bx, By), \; x, y \in V. \qquad (1.11)$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть линейный оператор B связан с предикатом Φ равенством (1.11). Для любого оператора с замкнутым образом существует разложение в ортогональную сумму

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}B^*\oplus\mathrm{Ker}B. \qquad (1.12)$$

Обозначим через P ортопроектор $L^2[0, 1]$ на подпространство $\mathrm{Im}B^*$. Комбинация равенств (1.9) и (1.12) дает

$$\mathrm{Im}P=\mathrm{Im}B^*, \; \mathrm{Ker}P=\mathrm{Ker}B. \qquad (1.13)$$

Покажем, что для так определенного ортопроектора P выполняется равенство (1.10). Пусть $\Phi(x, y)=1$. Тогда, в силу (1.11), $Bx=By$, или, что то же самое, $B(x, y)=0$. Значит, $x\text{-}y\in\mathrm{Ker}B$. Поэтому из (1.13) следует, что $x\text{-}y\in\mathrm{Ker}P$, т. е. $Px=Py$. Обратно, если $Px=Py$, то $Bx=By$. Таким образом, $\Phi(x, y)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $x, y\in V$ и $Px=Py$. Другими словами, справедливо (1.10). *Необходимость* очевидна, поскольку в качестве B можно взять ортопроектор P. Лемма 1.1 доказана.

Наша дальнейшая цель заключается в разработке конструкции, которая позволит каждому $x\in V$ ставить в соответствие единственный элемент $y(x)\in V$ такой, что $\Phi(x, y(x))=1$. В случае, когда V – все пространство, таким элементом мог бы быть Px. В остальных случаях это уже не так, поскольку точка Px может не принадлежать множеству V. Способ выбора элемента $y(x)$ зависит от характера множества V. Поэтому, начиная с этого места, мы будем некоторое время раздельно рассматривать различные случаи.

1.5. Предикаты на декартовом квадрате всего пространства

Лемма 1.2. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы в $L^2[0, 1]$ существовал такой линейный оператор A с замкнутым образом, для которого равенство*

$$\Phi(x, Ay)=1 \qquad (1.14)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть оператор A с указанными свойствами существует. Покажем, что

$$\Phi(x, y)=D(Ax, Ay). \qquad (1.15)$$

Действительно, пусть $\Phi(x, y)=1$. Из условия леммы следует, что $\Phi(y, Ay)=1$. Из двух последних равенств и условия транзитивности 3) вытекает равенство $\Phi(x, Ay)=1$. Тогда по условию $Ax=Ay$. Пусть, обратно, $Ax=Ay$. Вместе с уравнением $\Phi(x, Ax)=1$ это дает $\Phi(x, Ay)=1$. Но $\Phi(y, Ay)=1$. Применяя к двум последним равенствам условия 2) и 3), получаем $\Phi(x, y)=1$. Равенство (1.15) доказано. Из него и леммы 1.1 следует, что предикат Φ линейный. Положим $A=P$, где P – ортопроектор, связанный с Φ определением (1.10), и покажем, что уравнение (1.14) выполняется тогда и только тогда, когда $Px=Py$. Действительно, согласно формуле (1.10), равенство (1.14) при $A=P$ может быть переписано в виде $Px=P^2y$. Но P – проектор. Поэтому последнее равенство означает, что $Px=Py$. Лемма 1.2. доказана.

Назовем любой линейный оператор A с замкнутым образом, для которого выполняются условия леммы 1.2, *присоединенным* к предикату Φ. Как видно из определения (1.10), каждому ортопроектору P можно поставить в соответствие единственный линейный предикат Φ. Верно и обратное – каждому линейному предикату Φ соответствует только один ортопроектор, удовлетворяющий равенству (1.10). Это следует из того, что если для двух ортопроекторов равенства $P_1x=P_1y$ и $P_2x=P_2y$ эквивалентны при всех $x, y\in L^2[0, 1]$, то $\mathrm{Ker}P_1=\mathrm{Ker}P_2$ и, следовательно, $P_1=P_2$. Таким образом, существует однозначное соответствие между всеми линейными предикатами и всеми ортопроекторами, или, что то же самое, всеми линейными подпространствами. С операторами, присоединенными к линейному предикату Φ, дело обстоит не так. Полная характеристика таких операторов дается следующими утверждениями.

Лемма 1.3. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, P – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$AP=A, \; PA=P. \qquad (1.16)$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для линейного оператора A выполняются равенства (1.16). Покажем, что образ оператора A замкнут и

$$\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P, \; \mathrm{Im}A^*=\mathrm{Im}P, \; A^2=A. \qquad (1.17)$$

Действительно, пусть $x\in\mathrm{Ker}A$, т.е. $Ax=0$. Тогда из второго равенства (1.16) следует, что $Px=PAx=0$, т.е. $x\in\mathrm{Ker}P$. Обратно, если $x\in\mathrm{Ker}P$, то $Px=0$ и $Ax=APx=0$, т.е. $x\in\mathrm{Ker}A$. Первое равенство (1.17) доказано. Далее, $A^2=(AP)\times(AP)=A(PA)P=AP^2=AP=A$. Итак, третье уравнение (1.17) выполняется. Из него вытекает замкнутость образа оператора A. Действительно, пусть $\{y_\kappa\}_{\kappa=1}^{\infty}\subset\mathrm{Im}A$, $y_k\to y$ при $\kappa\rangle\infty$. Поскольку A – ограниченный оператор, то тогда $Ay_k\in Ay$ при $\kappa\in\infty$. Но каждая точка y_k представима в виде $y_k=Ax_k$. Поэтому $Ay_k=A^2x_k=Ax_k=y_k$. Таким образом, $y=Ay\in\mathrm{Im}A$. Поскольку $\mathrm{Im}A$ замкнут, справедливо ортогональное разложение

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}A^*\oplus\mathrm{Ker}A. \qquad (1.18)$$

Сравнивая это равенство с (1.9) и учитывая, что $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$, получаем второе равенство (1.17). Уравнение (1.14), учитывая (1.10), можно переписать в виде $Px=PAy$ или, используя (1.16), $Px=Py$. Последнее равенство означает, что $x\text{-}y\in\mathrm{Ker}P=\mathrm{Ker}A$, а значит $Ax=Ay$. Достаточность доказана. *Необходимость.* Пусть линейный оператор A присоединен к линейному предикату Φ. Формула (1.10) позволяет переписать (1.14) в виде $Px=PAy$. Таким образом $Px=PAy$ тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Поэтому, в частности, $Px=PAy$ для всех $x\in L^2[0, 1]$. Второе равенство (1.16) доказано. Поскольку оператор A присоединен к предикату Φ, то справедливо (1.15). Сравнивая это равенство с (1.10), получаем $D(Ax, Ay)=D(Px, Py)$. Таким образом, $A(x\text{-}y)=0$ тогда и только тогда, когда $P(x\text{-}y)=0$, т.е. $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Разложим произвольный элемент $x\in L^2[0, 1]$ в ортогональную сумму $x=x_1 E x_2$, где $x_1\in \mathrm{Im}P$, $x_2\in\mathrm{Ker}P$. Тогда $Ax=Ax_1$, так как $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. С другой стороны, $Px=Px_1$ и, следовательно, $APx=Ax_1$. Поэтому $Ax=APx$ для любого элемента $x\in L^2[0, 1]$, т.е. выполняется первое равенство (1.16). Лемма 1.3 доказана.

Представим для выразительности этот результат в матричном виде. Напомним, что если линейные пространства X_1 и X_2 представлены в виде прямых сумм $X_1=Y_1 \dotplus Z_1$, $X_2=Y_2 \dotplus Z_2$, линейный оператор $A{:}X_1\to X_2$ порождает четыре линейных оператора $A_{11}{:}Y_1\to Y_2$, $A_{12}{:}Z_1\to Y_2$, $A_{21}{:}Y_1\to Z_2$, $A_{22}{:}Z_1\to Z_2$, таких, что $A(y_1 \dotplus Z_1) = (A_{11}y_1+A_{12}Z_1) \dotplus (A_{21}y_1 +A_{22}Z_1)$. Матрица, составленная из этих операторов, называется ***матричным представлением оператора A***. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad (1.19)$$

— матричное представление оператора A, соответствующее прямому разложению (1.9).

Следствие 1.1. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства* $L^2[0, 1]$, P *– соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединен к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы его матричное представление* (1.19) *имело вид*

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.20)$$

где I – тождественный оператор в пространстве $\mathrm{Im}P$, A_{21}: $\mathrm{Im}P\to\mathrm{Ker}P$ *– произвольный линейный оператор.*

Доказательство. Матричное представление оператора P имеет вид

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.21)$$

Отсюда и из (1.19) получаем

$$PA=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ AP=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.22)$$

Предположим, что оператор A присоединен к линейному предикату Φ. Тогда имеют место равенства (1.16). Сравнивая выражение (1.21) с первым уравнением (1.22), получаем, что $A_{11}=I$, $A_{12}=0$. Аналогично из сравнения (1.19) со вторым равенством (1.22), находим, что $A_{22}=0$. Таким образом, справедливо (1.20). Обратно, пусть справедливо (1.20), т.е. $A_{11}=I$, $A_{12}=0$, $A_{22}=0$. Тогда из (1.22) вытекают равенства (1.16). Поэтому в силу леммы 1.3 оператор A является присоединенным к предикату Φ. Следствие 1.1 доказано.

Приведем теперь другое описание множества всех операторов, присоединенных к линейному предикату Φ.

Следствие 1.2. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства* $L^2[0, 1]$, *P – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединен к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы A был проектором параллельно* $\mathrm{Ker}P$.

Доказательство. Пусть линейный оператор A является присоединенным к предикату Φ. Тогда, как было показано при доказательстве леммы 1.3, $A^2=A$, т.е. A – проектор. Проектор проектирует параллельно своему ядру, но в нашем случае $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Следовательно, проектор A проектирует параллельно $\mathrm{Ker}P$. Обратно, пусть A – проектор параллельно $\mathrm{Ker}P$, т.е. $A^2=A$, $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Представим произвольный элемент $x\in L^2[0, 1]$ в виде $x=x_1+x_2$, $x_1\in\mathrm{Im}P$, $x_2\in\mathrm{Ker}P$. Как видно из матричного представления (1.19), $x\in\mathrm{Ker}P$ тогда и только тогда, когда

$$A_{11}x_1+A_{12}x_2=0,\ A_{21}x_1+A_{22}x_2=0.$$

Так как $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$, последние равенства эквивалентны равенству $x_1=0$. Это значит, что $A_{12}=0$, $A_{22}=0$ и $\mathrm{Ker}(A_{11}\oplus A_{21})=\{0\}$. Таким образом,

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.23)$$

Возводя последнее равенство в квадрат, получаем

$$A^2=\begin{pmatrix} A^2{}_{11} & 0 \\ A_{21}A_{11} & 0 \end{pmatrix}.$$

Но по условию $A^2=A$, т.е. $A_{11}^2=A_{11}$, $A_{21}A_{11}=A_{21}$. Из двух последних равенств следует, что $(A_{11}\oplus A_{21})A_{11}= =A_{11}\oplus A_{21}$. Отсюда видно, что оператор $A_{11}\oplus A_{21}$ может быть невырожденным лишь в том случае, если $\mathrm{Ker}A_{11}=\{0\}$. Поскольку $A_{11}^2=A_{11}$, то имеет место прямое разложение $\mathrm{Im}P=\mathrm{Im}A_{11}\dotplus\mathrm{Ker}A_{11}$. Следовательно, $\mathrm{Im}A_{11}=\mathrm{Im}P$. Тогда $A_{11}=1$. Действительно, пусть $y\in\mathrm{Im}P$ и, следовательно, $y\in\mathrm{Im}A_{11}$, т.е. существует $x\in\mathrm{Im}P$ такой, что $y=A_{11}x$. Имеем $A_{11}y=A_{11}^2x=A_{11}x=y$. Итак, равенство $A_{11}=1$ справедливо. Тогда из (1.23) и следствия 1.1 вытекает, что оператор A присоединен к предикату Φ. Следствие 1.2 доказано.

Из формулы (1.15) видно, что оператор, присоединенный к линейному предикату, удовлетворяет условиям леммы 1.1. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Связь между двумя свойствами оператора – удовлетворять условию леммы 1.1 и быть присоединенным – описывается следующим утверждением.

Следствие 1.3. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства* $L^2[0, 1]$. *Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы A был проектором и для него выполнялось равенство* (1.15).

Доказательство. Пусть оператор A присоединен к предикату Φ. При доказательстве леммы 1.2 было показано, что тогда справедливо (1.15). Тот факт, что A является проектором, вытекает из следствия 1.2. Обратно, пусть A – проектор и имеет место равенство (1.15). Сравнивая (1.15) и определение (1.10), получаем, что для $x, y\in L^2[0, 1]$ $Px=Py$ тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Следовательно, $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Поэтому из следствия 1.2 вытекает, что оператор A присоединен к предикату Φ. Следствие 1.3 доказано.

Следствие 1.4. *Для того чтобы для линейного оператора A существовал линейный предикат, к которому оператор A является присоединенным, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был проектором.*

1.6. Предикаты, определенные на декартовом квадрате выпуклого конуса

Подмножество K пространства $L^2[0, 1]$ называется *конусом*, если $\lambda x \in K$ для любых $x \in K$, $\lambda i0$ и $x_1+x_2 \in K$ для любых x_1, $x_2 \in K$. Линейная оболочка $L(K)$ конуса K совпадает с множеством всех точек x пространства, представимых в виде $x=x_1-x_2$, x_1, $x_2 \in K$. Нас будут интересовать конусы с замкнутой линейной оболочкой. Подклассом таких конусов являются воспроизводящие конусы. Конус K называется *воспроизводящим*, если $L(K)$ совпадает со всем пространством. Отметим важный частный случай – положительный конус в $L^2[0, 1]$. Он является воспроизводящим, поскольку любая функция $x(t)$, суммируемая с квадратом на [0, 1], может быть представлена в виде $x(t)=x+(t)-x-(t)$, где

$$x_+(t)=\begin{cases} x(t), \text{ если } x(t)\geq 0, \\ 0, \quad \text{если } x(t)<0, \end{cases}$$

$$x_-(t)=\begin{cases} 0, \quad \text{если } x(t)\geq 0, \\ -x(t), \text{ если } x(t)<0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Очевидно, функции $x+$ и $x-$ являются неотрицательными и суммируемыми с квадратом.

Если конус K является воспроизводящим, то всякому линейному предикату Φ соответствует лишь один ортопроектор P, связанный с ним равенством (1.10). Это видно из того, что если для двух ортопроекторов P_1 и P_2 равенства $P_1x=P_1y$ и $P_2x=P_2y$ эквивалентны при всех $x, y \in K$, то $\mathrm{Ker}P_1=\mathrm{Ker}P_2$. Действительно, пусть $x \in \mathrm{Ker}P_1$. Так как K – воспроизводящий конус, то существуют $x_1, x_2 \in K$: $x=x_1-x_2$. Тогда $P_1(x)=P_1(x_1)-P_1(x_2)=0$, $P_2(x_1)=P_1(x_1)$, $P_2(x_2)=P_1(x_2)$. Значит, $P_2(x_1)-P_2(x_2)=0$ и $\mathrm{Ker}P_1 \subset \mathrm{Ker}P_2$. Очевидно, верно и обратное включение. Следовательно, $P_1=P_2$. Если K – не воспроизводящий конус, но $L(K)$ – замкнутое множество, то ортопроектор P не определен однозначно. Поскольку принципиально этот случай не отличается от случая воспроизводящего конуса (вместо всего пространства $L^2[0, 1]$ можно с самого начала рассматривать подпространство $L(K)$, мы, чтобы не усложнять формулировки, ограничимся в настоящем параграфе случаем воспроизводящего конуса.

Лемма 1.2 не может быть перенесена на случай конуса дословно, поскольку элементы вида Ax $(x \in K)$, вообще говоря, не принадлежат конусу K и поэтому выражение $\Phi(x, Ax)$ может не иметь смысла. Аналогом леммы 1.2 для случая конуса может служить следующая

Лемма 1.4. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на квадрате воспроизводящего конуса K, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный оператор A с замкнутым образом и отображения (вообще говоря, линейные) $fi: L^2[0, 1] \to = K$ $(i=1, 2)$, удовлетворяющие следующим условиям*:

$$(f_2 - f_1) = I, \quad (1.25)$$

где I – тождественное отображение; для x, yОK равенство $\Phi(x+f_1(Ay), f_2(Ay))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$; для $x, y \in K$ равенство $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=1$.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть оператор A и отображения f_1, f_2 с указанными свойствами существуют. Рассмотрим произвольные $x, y \in K$, для которых $\Phi(x, y)=1$. Тогда $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=1$. Вместе с равенством $\Phi(x+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$ это дает $\Phi(y+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$. Но тогда в силу свойства оператора A и отображений f_1, f_2 должно быть $Ax=Ay$. Пусть, обратно, $x, y \in K$ и $Ax=Ay$. Имеем $\Phi(y+f_1(Ay), f_2(Ay))=1$. Комбинируя это равенство с уравнением $Ax=Ay$, получаем $\Phi(y+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$. Отсюда и из равенства $\Phi(x+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$ находим, что $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=1$. Следовательно, $\Phi(x, y)=1$. Итак, для любых $x, y \in K$ уравнение $\Phi(x, y)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Это означает, что справедливо равенство $\Phi(x, y)=D(Ax, Ay)$, $x, y \in K$. Тогда в силу леммы 1.1 предикат Φ является линейным. *Необходимость*. Поскольку K – воспроизводящий конус, любой элемент $z \in L^2[0, 1]$ может быть представлен в виде $z=z_2-z_1$, где $z_1, z_2 \in K$. Такое представление, вообще говоря, не является единственным. Воспользуемся аксиомой выбора и выберем произвольным образом одно из таких представлений для каждого z. Тогда $z_2=f_2(z)$, $z_1=f_1(z)$, где f_1, f_2 – некоторое отображение $\Lambda^2[0, 1] \to K$. Очевидно, $f_2-f_1=I$, где I – тождественное отображение. Покажем, что второе и третье условия леммы также выполняются, если положить $A=P$, где P – ортопроектор, соответствующий Φ. Равенство $\Phi(x+f_1(Py), f_2(Py))=1$ в силу формулы (1.10) означает, что $P(x+f_1(Py))=Pf_2(Py)$, т.е. $Px=P(f_2-f_1)(Py)$. Формулы (1.24) и равенство $P^2=P$ позволяют заключить, что оно выполняется тогда и только тогда, когда $Px=Py$. Выполнимость третьего условия леммы очевидна. Лемма 1.4 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства леммы, отображения f_1 и f_2 являются совершенно произвольными, лишь бы для них выполнялось равенство $f_2-f_1=I$. Другими словами, если какие-либо отображения f_1 и f_2 удовлетворяют условиям леммы 1.4, то любые другие отображения, обладающие данным свойством, также удовлетворяют этим условиям. Кроме того, отображения f_1 и f_2 могут быть определены не на всем пространстве $L^2[0, 1]$, а лишь на $\mathrm{Im}A$, поскольку они применяются к элементам вида Ax.

Будем называть линейный оператор A в $L^2[0, 1]$ *присоединенным к линейно порожденному предикату* Φ, определенному на $K \times K$, если для него существуют такие отображения f_1 и f_2, что выполняются условия леммы 1.4.

Лемма 1.5. *Пусть Φ – линейный предикат на квадрате воспроизводящего конуса K, P – отвечающий ему ортопроектор. Для того, чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$AP=A, \; PA=P \quad (1.26)$$

Доказательство *Достаточность*. Пусть для линейного оператора A выполняются равенства (1.26). Тогда, как было показано при доказательстве леммы 1.3, $\mathrm{Im}A$ замкнут. Обозначим через f_1 и f_2 произвольные отображения $L^2[0, 1] \to K$, для которых $f_2-f_1=I$. Как было показано при доказательстве леммы 1.4, в сторону необходимости, эти отображения вместе с ортопроектором P удовлетворяют условиям леммы 1.4. Покажем, что они удовлетворяют тем же условиям и совместно с оператором A. В силу формулы (1.10) равенство $\Phi(x+f_1(Ay), f_2(Ay))=I$ выполняется тогда и только тогда, когда $P(x+f_1(Ay))=PAy$, т.е. $Px=P(f_2-f_1)Ay$, или с учетом (1.25) и (1.26) $Px=Py$.

Таким образом, второе условие леммы 1.4 выполняется. Выполнение третьего условия очевидно. *Необходимость*. Пусть оператор A является присоединенным к предикату Φ. Второе из условий леммы 1.4 позволяет заключить, что для любых $x, y \in K$ равенство $Ax=Ay$ выполняется тогда и только тогда, когда $Px=P(f_2\text{-}f_1)Ay$ или, в силу (1.11), $Px=PAy$. В частности, отсюда следует, что $Px=PAx$ для всех $x \in K$. Поскольку K – воспроизводящий конус, отсюда вытекает второе из равенств (1.26). При доказательстве леммы 1.4 было показано, что для оператора A, присоединенного к предикату Φ, имеет место равенство (1.26). Вместе с (1.10) это дает: для любых $x, y \in K$ равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны. Поскольку K – воспроизводящий конус, отсюда следует, что $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Окончание доказательства леммы совпадает с окончанием доказательства леммы 1.3. Лемма 1.5 доказана.

Линейный оператор, присоединенный к предикату Φ, был определен различным образом в случаях всего пространства и конуса. Тем не менее, формулировки леммы 1.3 и 1.5 почти совпадают. Почти совпадают соответственно и формулировки следствий. Поскольку их доказательства отличаются лишь в деталях, мы приведем здесь для случая конуса только формулировки.

Следствие 1.5. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса К, Р-соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор А был присоединенным к предикату Ф, необходимо и достаточно, чтобы его матричное представление, соответствующее ортогональному разложению* $L^2[0, 1]=\mathrm{Im}P\oplus\mathrm{Ker}P$, *имело вид*

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где I – тождественный оператор в пространстве $\mathrm{Im}P$, A_{21}: $\mathrm{Im}P\to\mathrm{Ker}P$ *– произвольный линейный оператор.*

Следствие 1.6. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса К, Р – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор А был присоединенным к предикату Ф, необходимо и достаточно, чтобы А был проектором параллельно* $\mathrm{Ker}P$.

Следствие 1.7. *Пусть Φ – линейно порожденный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса К. Для того чтобы линейный оператор А был присоединенным к предикату Ф, необходимо и достаточно, чтобы А был проектором и выполнялось равенство* (1.15).

Следствие 1.8. *Для того чтобы для линейного оператора А существовал линейный предикат на квадрате воспроизводящего конуса К, к которому оператор А является присоединенным, необходимо и достаточно, чтобы оператор А был проектором.*

1.7. Предикаты на декартовом квадрате выпуклого множества

Аффинная оболочка любого множества V состоит из всех векторов x вида

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\ , \qquad (1.27)$$

где m – любое натуральное число, $x_i \in V$, а λi – произвольные числа, сумма которых равна 1. В случае, когда V – выпуклое множество, это утверждение можно уточнить, а именно:

$$\mathrm{aff}V=\{X|X=\beta_1x_1+\beta_2x_2,\ xi\in \mathrm{V},\ \beta_1+\beta_2=1\} \qquad (1.28)$$

Проверим это равенство. Пусть $x\in\mathrm{aff}V$. Тогда он представим в виде (1.27). Пусть I – множество всех номеров i в (1.27), для которых $\lambda i<0$. Если $I=\varnothing$, то $x\in V$ и для него выполняется (2.28). Пусть $I\neq\varnothing$. Положим

$$\beta_1=\sum_{i\in I}\lambda_i\ ;\ \beta_2=+\sum_{i\overline{\in} I}\lambda_i\ ;\ \mu_i=\beta_1^{-1}\lambda_i,\ i\in I;\ \mu_i=+\beta_2^{-1}\lambda_i,\ i\overline{\in} I\ .$$

Из (1.27) вытекают представления (1.28), где

$$x_1=\sum_{i\in I}\mu_i x_i\ ,\ x_2=\sum_{i\overline{\in} I}\mu_i x_i\ .$$

Поскольку V – выпуклое множество и $\mu_i\geq 0,\ \sum_{i\in I}\mu_i=1,\ \sum_{i\overline{\in} I}\mu_i$, то $x_1, x_2\in V$. Кроме того, очевидно, $\beta_1+\beta_2=1$. Равенство (1.28) доказано.

В дальнейшем нам понадобится еще одно равенство, справедливое для выпуклых множеств:

$$\mathrm{aff}V=\{X|X=\alpha+\beta(x_1-x_2),\ \beta>0,\ x_1\in V,\ x_2\in V\}. \qquad (1.29)$$

Здесь α – произвольная фиксированная точка множества V. Проверим это равенство. Обозначим множество, фигурирующее в правой части (1.29), через Z. Это множество является аффинным многообразием. Действительно, пусть $z, z'\in Z$. Тогда

$z=\alpha+\beta(x_1\text{-}x_2)$, $z'=\alpha+\beta'(x_1'\text{-}x_2')$; $\beta>0, \beta'>0$;

$x_1, x_2, x_1', x_2'\in V$.

Зададим произвольное число а и положим $x=|1\text{-}\lambda|\beta+|\lambda|\beta'$, $\gamma=|\lambda|\beta' x^1$. Тогда $x>0$, $\gamma\in[0, 1]$ и справедливо равенство

$$(1-\lambda)z+\lambda z'=\alpha+x(y_1-y_2), \qquad (1.30)$$

Здесь $y_1=(1\text{-}\gamma)x_1+\gamma x_1'$, $y_2=(1\text{-}\gamma)x_2+\gamma x_2'$, в случае $0\leq\lambda\leq 1$; $y_1=(1\text{-}\gamma)x_2+\gamma x_1'$, $y_2=(1\text{-}\gamma)x_1+\gamma x_2'$, в случае $\lambda>1$; $y_1=(1\text{-}\gamma)x_1+\gamma x_2'$, $y_2=(1\text{-}\gamma)x_2+\gamma x_1'$, в случае $\lambda<0$. В любом случае $y_1, y_2\in V$ и из (1.30) вытекает, что $(1\text{-}\lambda)z+\lambda z'\in Z'$. Итак, Z – аффинное многообразие. Любая точка $v\in V$ представима в виде $v=\alpha+(v\text{-}\alpha)$. Поэтому $Z\supset V$. По определению $\mathrm{aff}V$ является минимальным аффинным многообразием, содержащим V. Из доказанного выше вытекает, что $\mathrm{aff}V\subset Z$. Проверим справедливость обратного включения. Точки α, x_1, $x_2\in V\subset\mathrm{aff}V$. Поэтому $(1+\beta)x_1\text{-}bx_2\in\mathrm{aff}V$ и $(1+\beta)\alpha-\beta x_2\in\mathrm{aff}V$. Легко видеть, что

$$\alpha+\beta\left(x_1-x_2\right)=\frac{\beta}{1+\beta}\left((1+\beta)x_1-\beta x_2\right)+\frac{1}{1+\beta}\left((1+\beta)\alpha-\beta x_2\right).$$

Следовательно, и $\alpha+\beta(x_1\text{-}x_2)\in\mathrm{aff}V$ и $Z\subset\mathrm{aff}$. Формула (1.29) доказана.

Лемма 1.6. *Пусть V – выпуклое множество и* $\mathrm{aff}V=L^2[0, 1]$. *Для того чтобы предикат Ф, определенный на квадрате множества V, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали линейный оператор А с замкнутым образом и отображения* $fi: L^2[0, 1]\to V$ $(i=1, 2)$, $\gamma_0: L^2[0, 1]\to[0, 1]$, *удовлетворяющие условиям*:

$$\gamma_0(x)x+(1-\gamma_0(x))f_1(x)=f_2(x)\ ; \qquad (1.31)$$

для $x, y\in V$ равенство

$$\Phi(\gamma_0(Ax)y+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax),\ f_2(Ax))=1 \qquad (1.32)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$; для x, $y\in V$ равенство

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax),\ \gamma_0(Ax)y+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax))=1 \qquad (1.33)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x,y)=1$.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть оператор A и отображения γ_0, f_1, f_2 удовлетворяют условиям леммы. Рассмотрим какую-либо пару точек $x, y\in V$, для которых $\Phi(x, y)=1$. Тогда для них выполняется (1.33). Комбинируя это равенство с

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1, \quad (1.34)$$

получаем (1.32). Но тогда $Ax=Ay$. Пусть, обратно, $Ax=Ay$. Тогда выполняется (1.32). Вместе с равенством $\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1$ это дает (1.33). Значит, $\Phi(x,y)=1$. Тогда имеет место равенство

$$\Phi(x, y)=D(Ax, Ay);\ x, y\in V. \quad (1.35)$$

Поэтому из леммы 1.1 следует, что предикат Φ является линейным. *Необходимость*. Пусть оператор Φ является линейным. По условию aff$V=L^2[0, 1]$. Поэтому любой вектор $x\in L^2[0, 1]$ представим (не единственным образом) в виде (1.19). Выберем для любого X произвольным образом числа bi и точки xi, для которых справедливо это равенство. В случае $b_1<0$, $b_2>0$ положим $\gamma_0=\beta_2^{-1}$, $f_1(x)=x_1$, $f(x_2)=x_2$. Случай $b_1>0$, $b_2<0$ рассматривается аналогично. Другие случаи исключены равенством $b_1+b_2=1$. Легко проверить, что в любом случае $f_1(x)$, $f_2(x)\in V$ и справедливо (1.33). Проверим выполнимость второго и третьего условий леммы 1.6, полагая $A=P$, где P – ортопроектор, соответствующий предикату Φ. В соответствии с (1.10) равенство (1.32) может быть переписано в виде

$$Pf_1\gamma_0(Px)Py+(1-\gamma_0(Px))=Pf_2(Px)).$$

Вместе с (1.33) это дает $\gamma_0(Px)Py=\gamma_0(Px)Px$, т.е. $Px=Py$. Тем самым проверено второе условие. Выполнимость третьего очевидна. Лемма 1.6 доказана.

Будем называть оператор A *присоединенным* к линейному предикату Φ на $V\times V$, если он вместе с некоторыми отображениями γ_0, f_1 и f_2 удовлетворяет условиям леммы 1.6.

Лемма 1.7. *Пусть Φ – линейный предикат на квадрате выпуклого множества $V\subset$ aff$V=L_2[0, \lambda]$, а P – отвечающий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$AP=A,\ PA=P. \quad (1.36)$$

Доказательство. *Достаточность*. Пусть оператор A связан с ортопроектором P, отвечающим предикату Φ, равенствами (1.36). Тогда, как было показано при доказательстве леммы 1.3, образ оператора A замкнут.

Для оператора P, как было показано при доказательстве леммы 1.6, существуют отображения γ_0, f_1 и f_2, которые вместе с P удовлетворяют условиям леммы 1.6. Покажем, что они удовлетворяют условиям этой леммы и вместе с оператором A. Первое и третье условия очевидны. Проверим второе. Формула (1.10) позволяет переписать равенство (1.32) в виде

$$\gamma_0(Ax)Py+(1-\gamma_0(Ax))Pf_1(Ax)=Pf_2(Ax)$$

или, учитывая (1.31) и (1.36), $\gamma_0(Ax)Py=\gamma_0(Ax)Px$, т.е. $Py=Px$. Последнее уравнение эквивалентно равенству $Ay=Ax$, поскольку Ker$A$=Ker$P$. *Необходимость*. Пусть линейный оператор A присоединен к предикату Φ. Тогда в соответствии с леммой 1.6 предикат является линейным. Формула (2.3) позволяет переписать равенство (1.32) в виде

$$\gamma_0(Ax)Py+(1-\gamma_0(Ax))Pf_1(Ax)=Pf_2(Ax)$$

или, учитывая (1.32), $Py=PAx$. Таким образом, для всех $x, y\in V$ последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Отсюда, в частности, вытекает, что $Px=PAx$, $x\in V$. Формула (1.28) позволяет распространить это равенство на множество aff$V$, которое по условию совпадает со всем пространством. Таким образом, второе равенство (1.36) выполняется. Как было показано при доказательстве леммы 1.6, для оператора A имеет место равенство (1.35). Вместе с (1.10) это дает: для любых $x, y\in V$ равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны. Покажем, что эта эквивалентность сохраняется для любых точек пространства. Пусть $x, y\in L^2[0, 1]$. Тогда по условию леммы $x, y\in$ aff$V$. Воспользуемся уравнением (1.29): $x=\alpha+\beta(x_1-x_2)$, $y=\alpha+\gamma(y_1-y_2)$; $\alpha, x_1, x_2, y_1, y_2\in V$; $\beta, \gamma>0$. Тогда равенство $Ax=Ay$ означает, что $\beta(Ax_1-Ax_2)=\gamma(Ay_1-Ay_2)$, т.е. $Au=Av$, где

$$u=\frac{\beta}{\beta+\gamma}x_1+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}y_2,\quad v=\frac{\beta}{\beta+\gamma}x_2+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}y_1.$$

Аналогично, равенство $Px=Py$ означает, что $Pu=Pv$. Но $u, v\in V$. Поэтому выражения $Au=Av$ и $Pu=Pv$ эквивалентны. Значит, и равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны. Итак, Ker$A$=Ker$P$ и $Pa=P$. Как было показано при доказательстве леммы 1.3, отсюда вытекает уравнение $AP=A$. Лемма 1.7 доказана.

Замечание. Выбор отображений f_1, f_2 и γ_0 в представлении линейного предиката через присоединенный оператор не существенен. Если какие-либо отображения f_1, f_2 и γ_0 удовлетворяют второму и третьему условиям леммы 1.6, то любые другие отображения, для которых выполняется (1.33), также удовлетворяют этим условиям. Это было видно при доказательстве лемм 1.6 и 1.7. Кроме того, отображения f_1, f_2 и γ_0 могут рассматриваться не на всем пространстве, а лишь на ImA, так как и во всех формулировках, и во всех доказательствах они применяются лишь к элементам вида Ax.

В случае выпуклого множества справедливы аналоги следствий 1.1÷1.4. Приведем их формулировки.

Следствие 1.9. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате выпуклого множества V с* aff$V=L^2[0, 1]$, *P – отвечающий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий (тем самым, эти условия эквивалентны).*

Матричное представление оператора A, соответствующее прямому разложению $L^2[0, 1]$=Im$P\oplus$Ker$P$, имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где I – тождественный оператор в пространстве ImP, A_{21}: Im$P\to$Ker$P$ – произвольный линейный оператор.

Оператор A является проектором параллельно Ker$P$ и для него справедливо равенство (1.35).

Следствие 1.10. *Для того чтобы для линейного оператора A существовал линейный предикат на квадрате выпуклого множества $V\subset$* aff$V=L^2[0, 1]$, *к которому оператор A является присоединенным, необходимо и достаточно, чтобы A был проектором.*

Литература: 1. *Ньютон И.* Оптика. Изд. 2-е. М.: Гостехтеориздат, 1954. 320 с. 2. *Maxwell J.C.* On the theory of compound colours and the relations of the spectrum//Proc. Roy. Soc. 1860. Vol. 10. 3. *Schrцdinger E.* Grundlinien einer Theorie der Farbenmetric im Tagessehen//Ann. d. Phys., 1920. Bd. 63, N22. 4. *Grassman H.* Zur Theorie der Farbenmischung//Ann. d. Phys. u Chemie, 1853. Bd. 89, N5. 5. *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм. М.: Госполитиздат, 1967. 132 с.

Поступила в редколлегию 12.02.98

Походенко Виталина Алексеевна, аспирантка кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: идентификация механизмов цветового зрения человека, информатика. Адрес: 312131, Украина, Харьков, п/о "Коммунист-1", уч. гор. ХГАУ, д.34, кв. 39, тел.: 40-94-46, 99-78-32.

Тарасова Татьяна Геннадиевна, инженер. Научные интересы: математические модели зрения человека, прграммирование. Адрес: 310018 Украина, Харьков, ул. Балакирева, 46, кв. 60, тел. 33-74-18.

Шабанов-Кушнаренко Сергей Юрьевич, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: идентификация механизмов интеллекта человека, информатика. Адрес: 310058, Украина, Харьков, ул. Культуры, 11, кв 31, тел. 40-94-46.

УДК 528.002+681.51

ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ГЕОИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА "ИнГИС"

ТКАЧЕНКО В.Ф., БАБИЙЧУК С.В., ГУБА Н.И., ТРИШИН В.В., ЧЕЛОМБИТЬКО В.Ф.

Рассмотрены назначение, функции, структура разработанной авторами инструментальной геоинформационой системы (ИнГИС), предназначенной для создания, просмотра и управления ГИС-проектами. Даны определения основных понятий геоинформационных систем. Приведены примеры объектов и областей использования ИнГИС, а также примеры функциональных задач, решаемых разработанной системой.

Разработка ГИС-проектов с использованием объектного подхода [1] предполагает предварительное обследование и структуризацию объекта на иерархические уровни с выделением элементов на каждом из них, которые имеют собственный набор атрибутивных данных, представляющих интерес для пользователя. При этом элементы более высокого уровня иерархии состоят из элементов нижнего уровня, которые, в свою очередь, также могут быть разложены на элементы более низкого уровня. Нижний уровень абстракции и количество уровней иерархии исходного сложного объекта определяется целями и набором решаемых задач, которые ставят перед собой разработчики конкретного ГИС-проекта. Этот этап работы выполняется совместно разработчиком ГИС-проекта и его заказчиком вручную. Кроме этого, на предварительном этапе происходит согласование функций справочной системы ГИС-приложения, а также перечень функциональных задач, интересующих заказчика.

Вся дальнейшая работа по созданию ГИС-проекта конкретного объекта (предприятия, населенного пункта) с согласованной структурой данных и перечнем функций должна возлагаться на некий инструментальный программный комплекс, который в соответствии с терминологией, приведенной в [2], носит название инструментальная ГИС.

Разработанная ИнГИС относится к классу инструментальных геоинформационных.

При разработке данной системы авторы ставили перед собой следующие цели:

– определить основными объектами, на которые ориентирована система, регионы, населенные пункты (инженерные сети, земельные участки, недвижимость и пр.), предприятия. Графический материал этих объектов может быть представлен как на планшетах (М: 1:500, 1:2000), так и в виде схем;

– обеспечить оперативную автоматизированную настройку системы на любой конкретный объект из перечисленных и генерацию справочной ГИС данного объекта;

– разработать универсальный, для данной предметной области, блок процедур модификации и редактирования ГИС-проекта;

– обеспечить коммуникабельность системы (импорт/экспорт внутреннего представления данных в графические и текстовые форматы);

– разработать блок типовых функциональных задач и задач пространственного анализа.

Для организации данных в ИнГИС зафиксированы следующие понятия, отслеживающие иерархическую структуру приложения:

Приложение (объект) – объект реального мира (населенный пункт, предприятие, инженерная сеть и др.), для которого выполняется ГИС-проект.

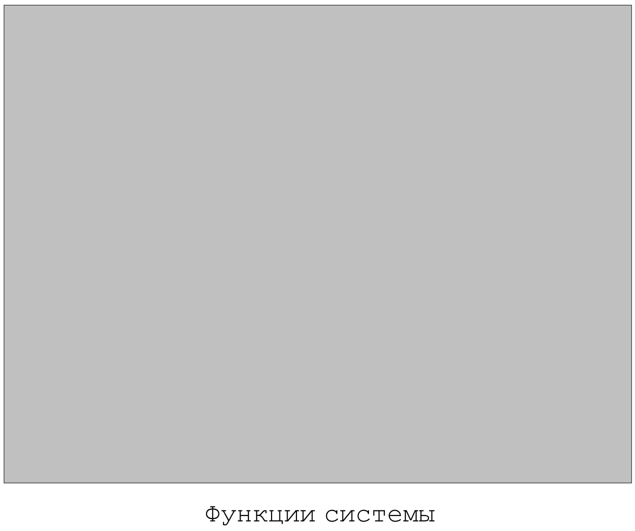
Проект – структура данных, включающая графическую информацию, а также базу данных текстовой информации об объекте (предприятии).

Тема – логическая совокупность данных (графическая информация и таблицы базы данных) для представления отдельной подсистемы объекта, например – водопроводная сеть, сеть газоснабжения.

Покрытие – логическая совокупность данных об объектах темы, которые имеют общие характеристики (точечные объекты, линейные, полилинейные, полигональные и т.п.) Покрытие состоит из графического представления объектов и таблицы базы данных с атрибутами объектов.

Объект ГИС состоит из графического представления (условного обозначения) некоторого элемента приложения, его графических атрибутов и записи в таблице базы данных покрытия.

Функциональная схема ИнГИС представлена на рисунке.



Функции системы

Реализация основных функций системы основана на принципах объектно-ориентированного программирования (ООП), когда все необходимые свойства объектов ГИС (рисование, отрисовка по БД, запись,