

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет Навчально-науковий центр заочної форми навчання

Кафедра Штучного інтелекту

Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)

Спеціальність 122 Комп'ютерні науки
(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

Освітня програма Штучний інтелект
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри _____

(підпис)

«_____» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Ісламлі Туралу Іслам огли
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Розробка моделей безмасштабних мереж з незалежними показниками скейлінгу та еластичності

затверджена наказом університету від 18 травня 2026 р. № 75Стз

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 14 липня 2026 р.

3. Вихідні дані до роботи Науково-технічні публікації, дані інтернет-джерел щодо безмасштабних мереж та їх моделювання

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1) Огляд предметної галузі

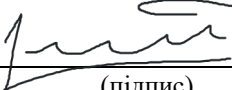
2) Розробка генеративної моделі безмасштабних мереж з роздільними параметрами скейлінгу та еластичності

3) Програмна реалізація розробленої моделі, проведення чисельного експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Строк / термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Отримання завдання на кваліфікаційну роботу	18.05.2026	виконано
2	Аналіз предметної галузі	23.05.2026	виконано
3	Постановка завдання та узгодження з керівником	26.05.2026	виконано
4	Дослідження поняття перколяції, видів перколяції, видів регулярних решіток	27.05.2026	виконано
5	Дослідження формування перколяційних кластерів	04.06.2026	виконано
6	Програмна реалізація перколяції на квадратній решітці дослідження перколяційної кластеризації	11.06.2026	виконано
7	Написання пояснювальної записки	20.06.2026	виконано
8	Попередній захист	28.06.2026	виконано
9	Захист перед ЕК	14.07.2026	виконано

Дата видачі завдання 18 травня 2026 р.

Здобувач 
(підпис)

Керівник роботи _____
(підпис)

ас. Максим ПОЛІТ _____
(посада, власне ім'я, прізвище)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 63 с., 13 рис., 1 табл., 2 дод., 12 джерел.

БЕЗМАСШТАБНІ МЕРЕЖІ, ЕЛАСТИЧНІСТЬ, МОДЕЛЬ
БАРАБАШІ-АЛЬБЕРТ, ПЕРЕВАЖНЕ ПРИЄДНАННЯ, ПЕРКОЛЯЦІЙНІ
КЛАСТЕРИ.

Об'єктом досліджень є безмасштабні мережі.

Предметом досліджень кваліфікаційної роботи є генеративні моделі
безмасштабних мереж.

Метою роботи є моделювання зростаючих безмасштабних мереж з
можливістю незалежної параметризації показників скейлінгу та
еластичності мережі.

ABSTRACT

Bachelor's thesis contains: 63 pp., 13 fig., 1 tabl., 2 ann., 12 references.

BARABASI-ALBERT MODEL, ELASTICITY, PERCOLATION
CLUSTERS, PREFERENTIAL ATTACHMENT, SCALE-FREE NETWORKS.

The object of research is scale-free networks.

The subject of research are generative models of scale-free networks.

The purpose of the work is modeling of growing scale-free networks with the possibility of independent parameterization of network scaling and elasticity factors.

ЗМІСТ

Вступ.....	8
1 Огляд предметної галузі	9
1.1 Складні мережі, їх властивості	9
1.1.1 Характеристики вузлів мереж.....	11
1.1.2 Розподіл ступенів вузлів.....	11
1.1.3 Найкоротший шлях між вузлами.....	12
1.1.4 Посередництво.....	13
1.1.5 Коефіцієнт кластеризації	13
1.2 Моделі складних мереж.....	14
1.2.1 Модель Ердеша-Реньї	15
1.2.2 Модель Уаттса-Строгатца	16
1.2.3 Модель Барабаши-Альберт	17
1.2.4 Безмасштабність мереж.....	21
1.3 Історія досліджень в галузі безмасштабних мереж	25
1.4 Постановка задач досліджень	31
2 Розробка генеративної моделі безмасштабних мереж з роздільними параметрами скейлінгу та еластичності	32
2.1 Генеративна модель безмасштабної мережі Барабаши-Альберт	33
2.2 Генеративна модель еластичної безмасштабної мережі	37
2.3 Генеративна модель безмасштабної мережі з роздільною параметризацією еластичності та скейлінгу	45
3 Програмна реалізація розробленої моделі, проведення чисельного експерименту	49
3.1 Вибір інструментального середовища	49
3.2 Генерація безмасштабних мереж.....	51
3.3 Програмна реалізація та моделювання еластичної безмасштабної мережі.....	55
Висновки	57

Перелік джерел посилення	58
Додаток А Тексти програм.....	60
Додаток Б Відомість кваліфікаційної роботи.....	63

ВСТУП

У 90-х роках ХХ століття, коли інтернет тільки зароджувався, дослідники вже порушили питання, яким законам підпорядковується зростання інтернету і яка найбільш адекватна модель для опису властивостей цієї мережі. Серед перших тут були А.-Л. Барабаші та Р. Альберт. Вони знайшли ряд важливих емпіричних закономірностей у поведінці інтернету і на їх основі розробили модель, яку згодом по-різному формалізували багато авторів.

Теорія складних мереж – це комплексний науковий напрямок, що знаходиться на стику таких наук, як дискретна математика, теорія графів, теорія алгоритмів, нелінійна динаміка, теорія фазових переходів, теорія фракталів, перколяційні процеси, тощо. Тому для успішного моделювання складних мереж необхідні базові відомості з усіх цих галузей.

У теорії складних мереж виділяють три основних напрями: дослідження статистичних властивостей, які характеризують поведінку реальних мереж; створення моделей мереж; передбачення поведінки мереж у разі зміни структурних властивостей.

Тематика досліджень, які провадяться у поточній кваліфікаційній роботі, зосереджена на другому з перелічених напрямків, а саме на моделюванні складних мереж. Найважливішим класом таких моделей є генеративні моделі. Це такі, які дозволяють моделювати зростаючу мережу покроково; він маленького зародку, два вузла, одне ребро, до мереж розміром у сотні тисяч, чи мільйони.

Одними з важливих характеристик мереж є показник скейлінгу та показник еластичності (логарифмічної щільності).

Отже, метою роботи є моделювання зростаючих безмасштабних мереж з можливістю незалежної параметризації показників скейлінгу та еластичності мережі.

1 ОГЛЯД ПРЕДМЕТНОЇ ГАЛУЗІ

1.1 Складні мережі, їх властивості

Складні мережі (complex networks) це мережі реального світу, які описуються графовими моделями, але, на відміну від об'єктів традиційної теорії графів, мають характерні властивості:

- великий розмір. Якщо у звичайній теорії графів розглядаються графи з одиницями-десятками вузлів, то мережі реального світу можуть мати розмір в сотні мільйонів вузлів;

- динамічність. Складні мережі постійно змінюються, зазвичай, зростають. Додаються нові вузли, утворюються нові зв'язки. Іноколи ці процеси проходять досить повільно, а іноколи – в режимі реального часу, тобто зі швидкістю, співставною з інтенсивністю запитів щодо структури та властивостей мережі;

- стохастичність. Еволюція складних мереж, їх поточні розміри та структура не є детермінованими, а є наслідками реалізації випадкових процесів;

- наявність загальних спільних рис, зокрема, безмасштабність. Незважаючи на широке розмаїття мереж, які вважаються складними, вони мають між собою деякі спільні риси, які зумовлюють можливість класифікації, моделювання та узагальнення. Зокрема, відомо, що більшість (хоч і далеко не всі) мереж реального світу мають властивість інваріантності до масштабу (scale-free). Це означає, що мережа в цілому є статистично подібною за характеристиками своїм фрагментам. Які, в свою чергу, подібні своїм часткам і так далі.

Структуру взаємозв'язків між багатьма об'єктами природи, або суспільства, можна ефективно та повно описати у вигляді графової, або мережевої) моделі, де кожному об'єкту відповідає вершина, або вузол, а зв'язку між парою об'єктів – ребро, чи дуга. Так відносини між людьми у

групі, відносини між фірмами, комп'ютерні мережі, взаємодії між нейронами – це приклади мереж [2], [3].

Доказ знаменитої теореми про чотири фарби Апелем і Хакеном (Kenneth Appel, Wolfgang Haken) в 1976 (чотирьох фарб достатньо, щоб розфарбувати будь-яку пласку карту так, щоб дві сусідні області були пофарбовані в різні кольори) – це найбільш відоме останнє досягнення в теорії графів.

Найвагоміші за останні 30 років результати у вивченні мережевих структур були отримані фізиками. Виявилося, що методи фізики, насамперед статистичної механіки, добре підходять до проблематики складних мереж. На відміну від математиків, фізики у своїх дослідженнях спираються на емпіричні дані про реальні мережі, такі як Інтернет, мережі друзів та знайомих або біологічні метаболічні мережі. Під час дослідження статистичних властивостей мереж, наприклад, законів розподілу вузлів за кількістю зв'язків, було виявлено велику кількість непередбачуваних властивостей реальних мереж, на які не звернули увагу ані математики, ані соціологи. Ці властивості стали стимулом для розробки нових теорій, моделей, виявлення нових фундаментальних властивостей мереж.

Топологічні властивості мереж, що розглядаються абстрактно від їхньої природи, але істотно визначають функціонування мереж, і становлять предмет дослідження теорії складних мереж.

Термін «складні мережі» виник на початку цього століття і відноситься до мереж з більш складною архітектурою, ніж класичні випадкові мережі із заданим числом вузлів та зв'язків або решіток у кристалах. Зазвичай у мережах, які вважаються «складними» є відносно невелика кількість вузлів із великою кількістю зв'язків – так звані хаби (від англійського hub – ядро, концентратор), які значною мірою визначають властивості мережі в цілому. При цьому виявилося, що більшість реальних мереж (біологічних, технічних, соціальних) є складними [4].

1.1.1 Характеристики вузлів мереж

Для окремих вузлів виділяють такі параметри:

- вхідний ступінь вузла – кількість ребер графа, що входять до вузол;
- вихідний ступінь вузла – кількість ребер графа, що виходять із вузла;
- середня та максимальна відстані від цього вузла до інших;
- ексцентричність (eccentricity) – найбільша з мінімальних відстаней від цього вузла до інших;
- посередництво (betweenness), яке показує, скільки найкоротших шляхів проходить через цей вузол;
- центральність та інші параметри.

1.1.2 Розподіл ступенів вузлів

Розподіл вузлів за кількістю зв'язків $p(k)$ описує ймовірність того, що випадково обраний вузол мережі має ступінь k :

$$p(k) = \frac{N(k)}{N}, \quad (0.1)$$

де $N(k)$ – кількість вузлів степені k у мережі;

N – загальна кількість вузлів у мережі.

Розподіл вузлів за кількістю зв'язків є найпростішою статистичною характеристикою довільної мережі. Важливо, що у багатьох випадках знання цієї характеристики достатньо для розуміння властивостей цієї мережі та процесів, що у ній відбуваються. У класичних випадкових графах розподіл вузлів за кількістю зв'язків (degree distribution) спадає досить швидко, оскільки для випадкових мереж (Ердеша-Реньї) цей розподіл підпорядковується закону Пуассона:

$$p(k) = e^{-q} \cdot \frac{q^k}{k!}, \quad (0.2)$$

де k – степінь вузла;

$$q = N \cdot p.$$

Багато реальних мереж – від метаболічних мереж у клітинах до мережі інтернет – мають розподіл вузлів, в якому щільність повільно спадає із зростанням k . В таких мережах хаби (вузли з великою кількістю зв'язків) становлять помітну частку від усіх вузлів, і саме вони визначають багато важливих властивостей цих мереж. Асимптотична залежність $p(k)$ є степеневою при високих значеннях k .

Розподіл вузлів за кількістю зв'язків у вигляді степеневого закону ще називається безмасштабним (scale free), а самі мережі отримали назву безмасштабних, або масштабно-інваріантних мереж (scale free networks), що означає відсутність типової кількості зв'язків у такій мережі.

1.1.3 Найкоротший шлях між вузлами

Відстань між вузлами визначається як кількість кроків, які необхідно зробити, щоб існуючими ребрами дістатися від одного вузла до іншого. Природно, вузли можуть бути з'єднані безпосередньо або опосередковано, через інші вузли.

Найкоротшим шляхом (SP, shortest path) між вузлами називається мінімальна відстань між ними. Для всієї мережі можна запровадити поняття середнього найкоротшого шляху, як середні за всіма парами вузлів мінімальні відстані між ними:

$$L^{sp} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i,j} l_{ij}^{\min}, \quad (0.3)$$

де n – кількість вузлів;

l_{ij}^{min} – найкоротша відстань між вузлами.

1.1.4 Посередництво

Посередництво (betweenness) – це параметр, який показує, скільки найкоротших шляхів проходить через вузол. Вузли з найбільшим посередництвом грають головну роль встановленні зв'язків між іншими вузлами у мережі. Посередництво b_m вузла m визначається за формулою:

$$b_m = \sum_{i \leq j} \frac{B(i, m, j)}{B(i, *, j)}, \quad (0.4)$$

де $B(i, *, j)$ – загальна кількість найкоротших шляхів між вузлами i та j ;

$B(i, m, j)$ – кількість таких найкоротших шляхів між i та j , які проходять через вузол m .

1.1.5 Коефіцієнт кластеризації

Уаттс та Строгатц запровадили такий параметр мереж, як коефіцієнт кластеризації. Цей коефіцієнт характеризує тенденцію до утворення груп взаємозалежних вузлів, так званих клік (clique). Для конкретного вузла коефіцієнт кластеризації показує, скільки найближчих сусідів даного вузла є найближчими сусідами друг для друга. Відношення реальної кількості зв'язків, які з'єднують найближчих сусідів даного вузла до максимально можливого (такого, при якому всі найближчі сусіди даного вузла були б пов'язані безпосередньо один з одним) називається коефіцієнтом кластеризації вузла. Природно, ця величина не перевищує одиниці.

Будемо називати два вузли сусідами, якщо існує зв'язок між ними. Для комплексних мереж характерно, що два вузли, сусідні до якогось вузла,

часто також є сусідами між собою. Щоб охарактеризувати це і був запропонований коефіцієнт кластеризації C_i вузла i . Припустимо, що вузол має ступінь k_i це означає, що у нього є k_i сусідів, між якими може бути максимум $k_i(k_i - 1)$ зв'язків. Тоді

$$C_i = \frac{2n_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (0.5)$$

де n_i – кількість зв'язків між сусідами вузла i .

Коефіцієнт кластеризації може бути співставлений не тільки окремому вузлу (0.5), а й всій мережі в цілому:

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i \quad (0.6)$$

де n – кількість вузлів;

C_i – коефіцієнти кластеризації окремих вузлів.

Коефіцієнт кластеризації C в загальному випадку визначається як потроєння відношення кількості «трикутників» (три вершини, з'єднані трьома ребрами) у графі до кількості «виделок» (шляхів довжиною два).

1.2 Моделі складних мереж

З суто математичних позицій будь-яка модель має право існування. Однак для додатків – у тому числі додатків до транспортної проблематики – деякі з цих моделей цікавіші, деякі – менші. Відповідно нижче представлені три класи моделей, кожен із яких за десятиліття, минулі з його появи, зарекомендував себе плідним як у рамках «чистої» математики, так і у межах її різноманітних додатків, серед яких надійність транспортної мережі, моделювання зростання мережі інтернет, соціальних та біологічних

мереж тощо. Далі виділено лише основні і важливі моменти теорії випадкових графів [15].

Модель Ердеша-Реньї є найпростішою та дозволяє конструювати штучні мережі з великою кількістю одночасно існуючих у них функціональних структур.

Модель Барабаші-Альберт, навпаки, є найгіршою з погляду конструювання якомога більшої кількості одночасно існуючих функціональних структур, проте найоптимальнішою з погляду схожості з реальними соціальними, комп'ютерними, біологічними мережами. Саме ця модель є базовою моделлю для безмасштабних мереж.

Модель Ватса-Строгатца є, за сутністю, перехідною ланкою між регулярною кільцевою решіткою та випадковим графом моделі Ердеша-Реньї. Вона дозволяє конструювати мережі типу «світ тісний» (small world).

1.2.1 Модель Ердеша-Реньї

Модель Ердеша – Реньї є історично першою з моделей випадкового графа, в якому ймовірність появи ребра між двома вершинами не залежить від інших ребер та є постійною. Згідно з цією моделлю, граф конструюється за допомогою з'єднання пар вершин випадковим чином. Кожне ребро включається до графа з ймовірністю $0 < p < 1$ незалежно для кожної пари існуючих вершин. Зі зростанням p від 0 до 1 граф стає все більш насиченим ребрами. При $p = 0$ маємо порожній граф (граф без ребер), при $p = 1$ граф є повнозв'язним. При фіксованій кількості вершин у графі значення p є єдиним вхідним параметром моделі Ердеша – Реньї.

Простота моделі Ердеша-Реньї дозволяє отримувати різні аналітичні оцінки. Однак варто відзначити, що модель в середньому не відтворює такі типові властивості реальних мереж, як степеневий розподіл степенів вершин, величину коефіцієнта кластеризації та довжини маршруту.

1.2.2 Модель Уаттса-Строгатца

У період з кінця XX сторіччя до теперішнього часу вийшло багато книг, що містять сучасні уявлення про мережі, якими можна певною мірою пояснити феномен популярності тематики соціальних мереж. Автором двох із них є Дункан Уаттс. У 1999 році він опублікував книгу «Малі світи, динаміка мереж від порядку до випадковості» (Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness), написану за матеріалами власної дисертації. Дослідження наводилися в Santa Fe Institute, відомому ще як Інститут вивчення складних систем. У 2004 році з'явилася розширена версія тієї ж книги під назвою «Шість рукостискань, наука про зв'язаний світ» (Six Degrees: the science of a connected age). У цих роботах автор розглядає феномени системних зв'язків між людьми з позиції психолога та соціолога. Уаттс був одним із перших, хто з часів перших експериментів Мільграма спробував побудувати математичну модель малого світу і поширити її на дослідження, які безпосередньо не пов'язані з соціальними мережами. Виявляється, що підхід, який ґрунтується на принципах малого світу, добре підходить для досліджень, пов'язаних з поширенням епідеміологічних захворювань, катастроф в енергосистемах та інших системах, що мають мережеву природу.

Дункан Уаттс та Стівен Строгатц виявили феномен, характерний для багатьох реальних мереж, названий ефектом «тісного світу».

Модель «тісного світу» полягає в тому, що перебираючи коло своїх найближчих знайомих, потім людей, які знають наших найближчих знайомих (але не знають нас безпосередньо), і т.д. легко переконатися в наступному: достатньо простежити за невеликим числом ланцюжків таких знайомств, щоб зрозуміти, що будь-хто опосередковано знайомий з будь-яким членом суспільства. У цьому сенсі наш світ є тісним, звідки і походить назва цієї моделі [6].

Мережеві структури, що відповідають властивостям малих світів,

мають такі типові властивості: мала середня довжина шляху між вузлами у порівнянні з діаметром мережі та великий коефіцієнт кластеризації.

При дослідженні цього феномена ними було запропоновано процедуру побудови моделі моделі, якій властивий цей феномен.

На рисунку 1.1 представлена ілюстрація моделі «світ тісний».

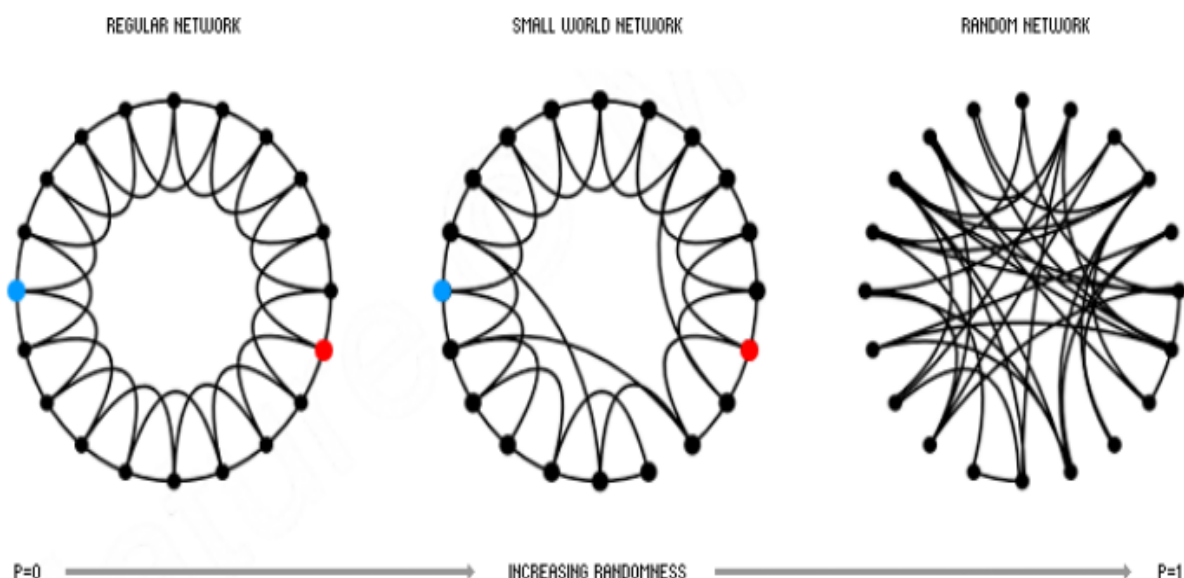


Рисунок 1.1 – Модель «світ тісний» Уаттса-Строгатца

На рисунку 1.1 можна побачити трансформацію мережі з регулярної кільцевої решітки в модель «світ тісний», а потім у випадковий граф.

Комп'ютерна модель «малого світу» була розроблена Уаттсом та Строгатсом декількома роками пізніше. Модель Уаттса-Строгатца є модель генерації випадкового графа, що має високий коефіцієнт кластеризації вершин і відносно невелику середню довжину шляху.

1.2.3 Модель Барабаши-Альберт

Однією з найцікавішою робот у галузі складних мереж визнано статтю Альберта Ласло Барабаши «Зв'язаність, нова наука про мережі». За своєю

освітою та тодішньою основною спеціальністю Барабаші – фізик. Отже, він підійшов до вивчення соціальних мереж з природничих позицій. Барабаші настільки впевнений у фундаментальній важливості мереж і пояснює специфікою мереж таку безліч явищ, що його порівнюють з Піфагором, який говорив «все є число». Так саме Барабаші сказав, що «все є мережа». Його підхід отримав висвітлення у багатьох виданнях, починаючи від наукових журналів Nature, Science, Science News та популярних American Scientist, Discovery, National Geographic та New Scientist до газет New York Times, USA Today, Washington та Business Week. Цей дослідник давав інтерв'ю багатьом значним телевізійним і радіоканалам.

Барабаші побудував свою систему поглядів, використовуючи нові підходи до теорії мереж і зокрема розроблений ним математичний апарат безмасштабних мереж (scale-free network) (рисунок 1.2). Новизна поглядів Барабаші полягає у тому, що до нього соціальні мережі вважалися абсолютно випадковими, а він показав, що ці мережі мають складну внутрішню структуру. Зокрема, він запропонував генеративну модель для таких мереж та пояснив, чому у мережах відбувається поділ вузлів на «бідну більшість» таких, що мають невелику кількість зв'язків та "багату меншість" вузлів-хабів.

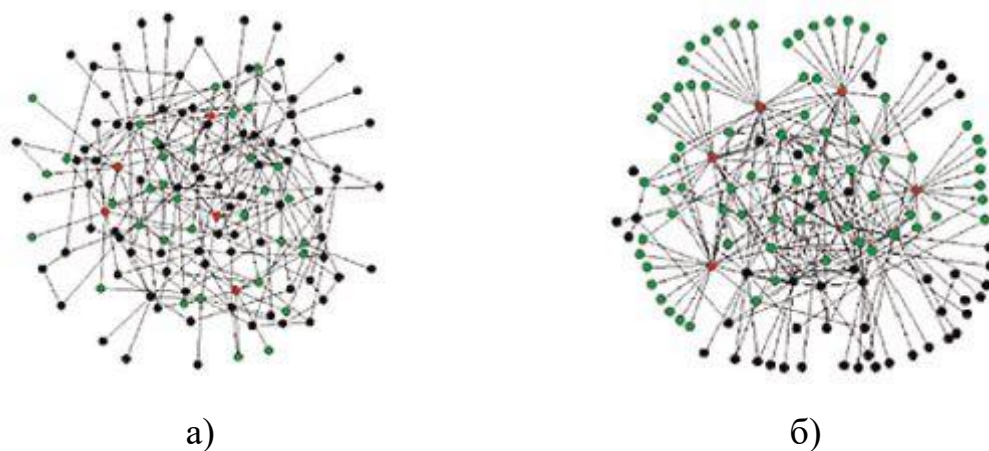


Рисунок 1.2 – Приклади мереж: а) з експоненційним розподілом степенів вузлів; б) безмасштабна (з степеневим розподілом)

Зокрема, Барабаші показав, що у тому випадку, якщо деяка мережева система еволюціонує без впливу зовнішніх регуляторів, то кількість зв'язків, якими обростають вузли, не є випадковою. Кількість зв'язків у окремо взятого вузла розподіляється не за законом Пуассона, а за степеневим законом (рисунок 1.3). Звідси випливає, що в більшості реальних мереж основна частина вузлів має обмежену кількість зв'язків, а окремі вузли-концентратори (Барабаші називає їх *hub*) мають аномально велику кількість.



Рисунок 1.3 – Типовий розподіл вузлів масштабно-інваріантної мережі за кількістю зв'язків

Можна говорити про наявність ієрархії вузлів у мережах, яка складається під впливом тих, чи інших факторів. Ієрархічність у структурі мереж є поясненням деяким емпіричним законам, таким, наприклад, як «правило Парето 20/80», а також успіхів таких речей, як мережевий маркетинг, особливості поширення епідеміологічних захворювань та багато інших феноменів, які ми спостерігаємо в житті. На основі теорії Барабаші можна навіть пояснити євангельську тезу «Хто має, тому дано буде; а хто не має, у того забереться і те, що він думає мати».

Модель графа Барабаші-Альберт (граф БА) є алгоритмом покрокової

генерації випадкових безмасштабних мереж з використанням правила переважного приєднання (рисунок 1.4).

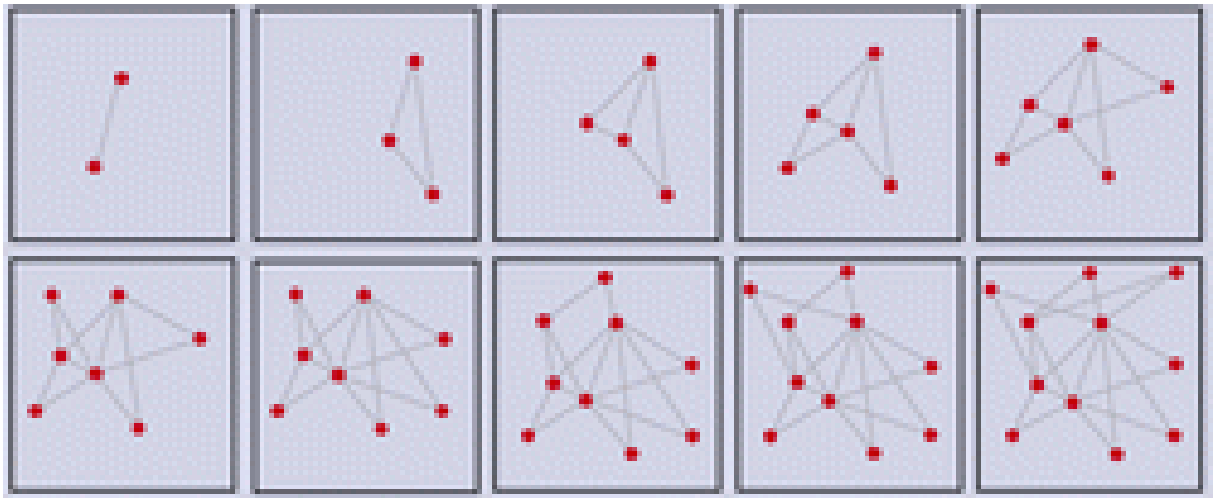


Рисунок 1.4 – Еволюція безмасштабної мережі

Правило переважного приєднання стверджує, що чим більший ступінь зв'язності має вершина, тим вища ймовірність приєднання до неї нових вершин.

Мережа БА вирощується з невеликого графа-зародку, у якого ступінь зв'язності кожної вершини має бути не менше одиниці.

Кожна нова вершина приєднується до вже існуючих вершин з ймовірністю, яка пропорційна до степеню (тобто кількості зв'язків) цієї існуючої вершини. Отже, ймовірність (p_i) того, що між новою вершиною та існуючою вершиною i утвориться зв'язок, дорівнює

$$p_i = \frac{k_i}{\sum_{j=1}^n k_j}, \quad (0.7)$$

де k_i – ступінь вузла i ;

n – поточний розмір мережі (кількість існуючих вузлів).

1.2.4 Безмасштабність мереж

Безмасштабна мережа (scale-free network) – це така мережа, в якій ступені вершин розподілені за степеневим законом або таким, який асимптотично наближається до степеневого. Це означає, що частка вузлів мережі, які мають k зв'язків для великих значень k становить

$$p(k) \approx c \cdot k^{-\gamma} \quad (0.8)$$

де c – нормалізуючий параметр;

γ – показник скейлінга мережі, який, зазвичай, знаходиться у діапазоні $\gamma \in (2;3)$, але може бути й більше трьох.

Безмасштабні мережі ще називають інваріантними до масштабу, або масштабно-інваріантними мережами.

Емпірично було встановлено, що багато природних мереж – соціальні, комунікаційні, біологічні, графи цитувань, посилань у WWW, та інші – добре моделюються безмасштабними графами.

У 1956 року Дерек Джон де Солла Прайс показав, що у мережах цитувань між науковими публікаціями кількість посилань на публікацію має розподіл із важкими хвостами, тобто розподіл, схожий на степеневий закон. У своїх роботах він не використовував термін «безмасштабні мережі». Цей термін з'явився набагато пізніше, наприкінці 90-х років, коли Альберт-Ласло Барабаші у своїх дослідженнях топології всесвітньої павутини виявив вузли-концентратори, що мають велику кількість зв'язків. Згодом він виявив подібні вузли в інших мережах, після чого дав знайденому класу мереж назву «безмасштабні мережі».

Безмасштабна мережа є зростаючою структурою, яка складається з вузлів, що зв'язуються особливим чином. Її побудова починається з єдиного поодинокого вузла. Потім на кожному кроці еволюції в структуру додається по одному новому вузлу, який зв'язується з одним з вузлів, які вже є в

мережі. Так мережа постійно зростає.

Головна відмінна риса безмасштабних мереж – існування вузлів-концентраторів (hubs), степені яких є дуже великі у порівнянні з степенями переважної більшості вузлів.

Безмасштабні мережі малочутливі до пошкоджень. Виявляється, що великі концентратори здебільшого оточені меншими концентраторами, а ті, своєю чергою ще меншими тощо. Якщо один із концентраторів буде втрачено, то майже всі зв'язки в мережі зберуться за рахунок існування концентраторів меншого розміру.

Ключова особливість масштабно-інваріантної мережі полягає в особливому алгоритмі з'єднання вузлів. Новий вузол тим швидше приєднається до якогось існуючого, чим більше інших вузлів до нього вже приєдналося. Нехай, наприклад, є мережа з трьома вузлами (рисунок 1.5). Ймовірність приєднання нового вузла до одного з них визначається пропорцією $1/4:1/2:1/4$, тому що відповідні вузли мають зв'язки в пропорції 1:2:1. Таким чином, з ймовірністю $1/2$ новий вузол приєднається до другого вузла, і це найімовірніший розвиток подій. Взагалі, вузол тим швидше накопичує нові зв'язки, чим їх у нього більше, бо ймовірніше, що нові вузли приєднуюватимуться саме до нього. Тобто, «багаті» вузли стають ще багатшими. Навпаки, «бідні» вузли схильні і залишатися «бідними».

В результаті розвивається мережа характерного виду, яку називають масштабно-інваріантною (рисунок 1.6).

Слід зазначити, що зображення масштабно-інваріантної мережі, наведене на рисунку 1.6, є умовним, тому що насправді вузли не мають якогось просторового розташування, воно для вузлів не задано. Можна було б зобразити мережу будь-яким заплутаним чином.

Очевидною особливістю цієї структури є наявність великої кількості вузлів, які мають дуже мало зв'язків (один, чи два), та невеликої множини вузлів, які мають дуже багато зв'язків (десятки, сотні та більше).

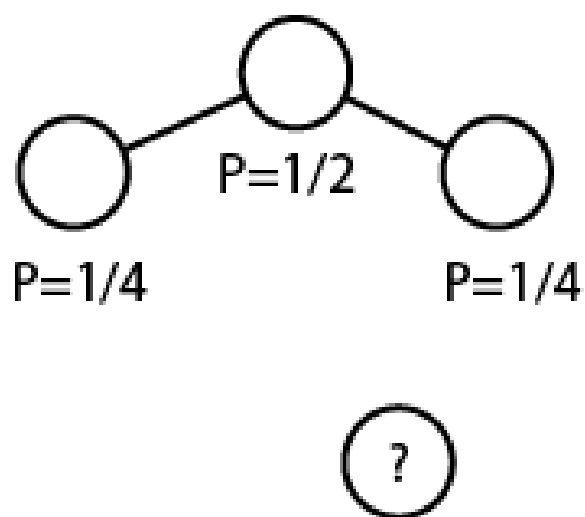


Рисунок 1.5 – Переважне приєднання вузлів

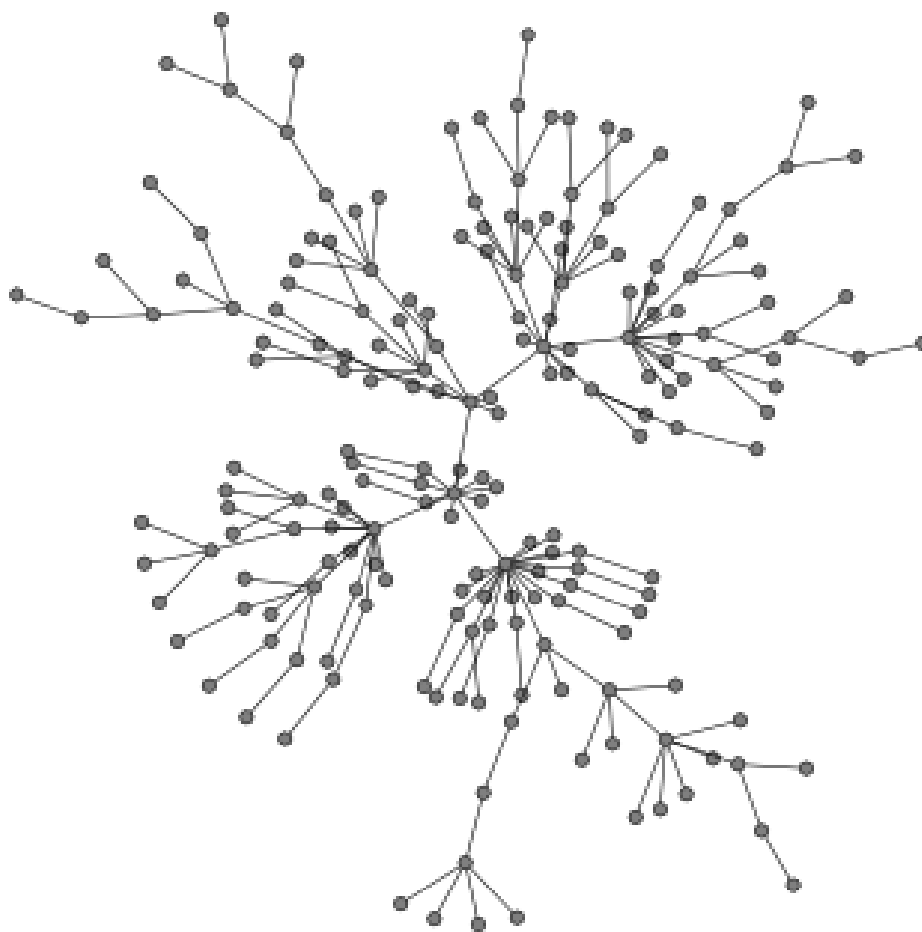


Рисунок 1.6 – Масштабно-інваріантна мережа – дерево Барабаші-Альберт

Статистично це виражається в тому, що ранговий розподіл вузлів за кількістю зв'язків для досить великої мережі зазвичай має яскраво виражений степеневий характер (рисунок 1.7).

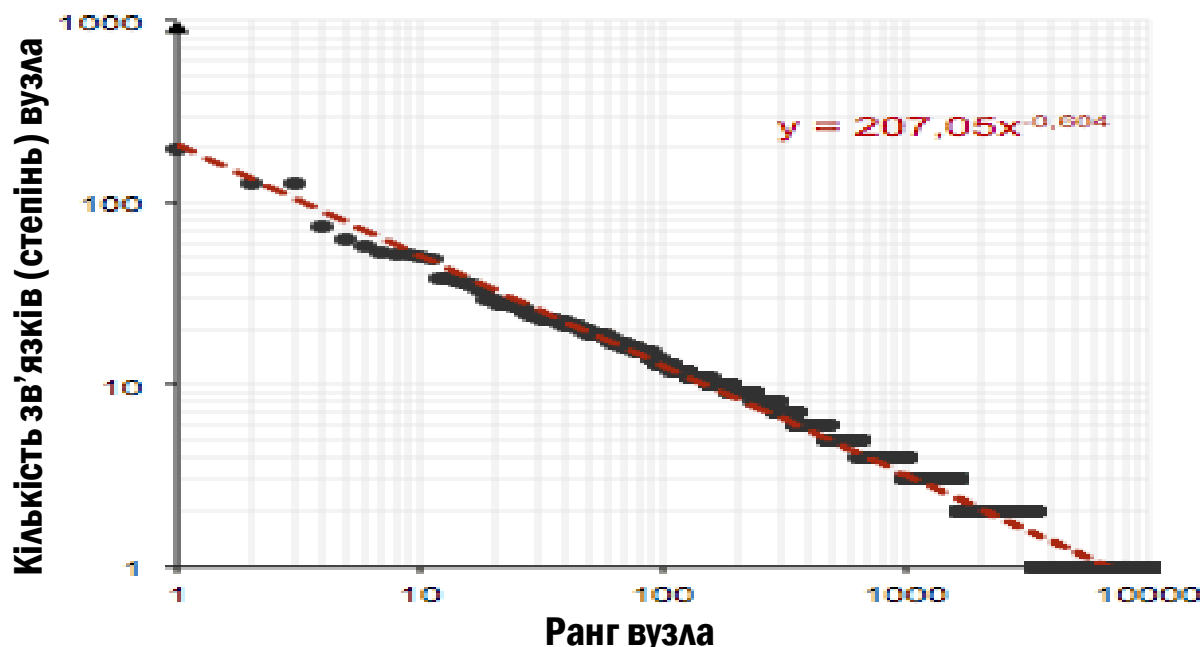


Рисунок 1.7 – Приклад рангового розподілу вузлів у масштабно-інваріантній мережі

Важливим є те, що подібний степеневий розподіл виникає вже на ранніх стадіях еволюції моделі, коли вузлів ще не більше 100, і зберігається майже незмінним на всьому доступному для огляду за допомогою звичайного комп'ютера горизонті часу.

Степеневий розподіл є властивим для параметрів, які не мають характерного масштабу, тобто для масштабно-інваріантних. Для мереж таким параметром є кількість зв'язків у вузлів. Степеневий розподіл їх кількості означає, що цей параметр немає якогось «типового» чи «характерного» значення.

Модель масштабно-інваріантної мережі дуже проста, і це робить її привабливою як пояснення походження багатьох існуючих у реальному

світі степеневих розподілів. Зокрема, як правило, з її допомогою пояснюють степеневий розподіл популярності веб-сайтів, статистику завантаження інтернет-вузлів тощо.

Нехай кожен вузол є конкретним географічним місцем, а зв'язки між ними – це люди. Тоді появу нового вузла можна порівняти з ситуацією народження нової людини в певній географічній точці, а зв'язок, який новий вузол простягне до одного з вже наявних вузлів – це відображення вибору місця проживання, який зрештою зробить ця людина. Правило «багатий стає багатшим» в даному випадку відображає перевагу людей вибирати для життя ті місця, де вже мешкає багато людей, тому що в цьому випадку відкриваються максимальні можливості для реалізації своїх здібностей, збагачення тощо.

1.3 Історія досліджень в галузі безмасштабних мереж

У 1999 році фізик з університету Нотр Дам (США) Л. Барабаші (Laszlo Barabasi) разом зі своєю аспіранткою Р. Альберт (Reka Albert) вивчали властивості реальних мереж з дещо іншого погляду. Якщо Строгатц і Уаттс у своєму дослідженні мереж виходили з феномену тісного світу, то Барабаші та Альберт вирішили дослідити закон розподілу вузлів деяких реальних мереж за кількістю зв'язків. Результат виявився несподіваним. Замість розподілу числа зв'язків за законом Пуассона, який має строгий максимум близько середнього значення, для багатьох реальних мереж, наприклад, таких як метаболічні мережі та білкові взаємодії в клітинах, структура авіаційних повідомлень, структура інтернету тощо, такого середнього значення не існує.

Таким чином, у багатьох реальних мережах невелика кількість вузлів містить дуже велику кількість зв'язків, а величезна кількість вузлів містить лише кілька зв'язків. Такі мережі одержали назву безмасштабних мереж (scale free networks). У своїх роботах Барабаші, а також Х. Джеонг

описали ті статистики інтернету, які лягли в основу науки про зростання цієї мережі – науки, що має глибокі додатки як у власне інтернет-проблематиці, так і в численних близьких дисциплінах.

Насправді більшість реальних мереж (соціальні, біологічні, транспортні та ін.) мають схожу «топологію». Мережа інтернет – це так званий веб-граф, вершинами якого є деякі конкретні структурні одиниці в інтернеті: сторінки, сайти, хості, власники тощо. Найчастіше ними є саме сайти. Дугами з'єднуються ті вершини, між якими є посилання. При цьому розумно проводити стільки дуг між двома вершинами, скільки посилань між відповідними сайтами. Отже, зв'язки (дуги) природно вважати спрямованими. Таким чином, веб-граф є орієнтованим і може мати кратні ребра, петлі і навіть кратні петлі (посилання цілком можуть йти з однієї сторінки даного сайту на іншу його сторінку). Тобто такий граф є псевдомультіорграфом. Відразу зрозуміло, що для такого «звіра» модель Ердеша – Реньї навряд чи підходить.

Основних тез у дослідженні Барабаші та Альберт є, фактично, три. По-перше, веб-граф є дуже розрідженим графом. Він має на n вершинах приблизно $k \cdot n$ дуг, де $k \geq 1$ – це деяка не дуже велика (у порівнянні з n) константа, в той час як максимально можлива кількість дуг у звичайному орієнтованому графі без петель та кратних дуг становить $n \cdot (n - 1)$.

Однак – і це по-друге, – діаметр веб-графа є дуже невеликим. У 1999 року він мав величину 6. Це добре всім відома властивість будь-якої соціальної мережі, яку прийнято в повсякденному мовленні характеризувати виразом «світ тісний». Наприклад, кажуть про те, що будь-які дві людини у світі «знайомі через 5–6 рукостискань». Так само і сайти: переходячи за посиланнями, можна перейти з будь-якого сайту на будь-якій іншій за 5–7 натискань. Звичайно, тут є важливе застереження: новостворені сайти можуть не бути пов'язані з зовнішнім по відношенню до них світом. Отже, веб-граф є дуже специфічним графом: він розріджений, але, одночасно з цим, він тісний.

По-третє, у веб-графа дуже характерний розподіл ступенів вершин: степеневий. Цей факт ріднить інтернет з багатьма реальними мережами – біологічними, соціальними, транспортними. Усі вони підкоряються степеневому закону.

Зважаючи на перераховані спостереження, не залишається жодних сумнівів у тому, що модель Ердеша – Реньї не застосовна для опису зростання інтернету та подібних мереж. Якщо підбором ймовірності p ще можна домогтися розрідженості і тісноти (хоча і не з тими параметрами), то степеневий розподіл зовсім не може з'явитись як наслідок схеми Бернуллі, в рамках якої з'являються ребра звичайного випадкового графа. У моделі $G(n, p)$ степінь кожної вершини випадкового графа біноміальна з параметрами $n - 1$ і p , і при таких p , які забезпечують більш-менш природню розрідженість, зазначений біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, а зовсім не степеневим.

Самі Барабаші та Альберт запропонували дуже розумний погляд на процес формування інтернету. Вони припустили, що в кожний момент часу з'являється новий сайт, і цей сайт ставить фіксовану кількість посилань на своїх попередників. На кого він віддасть перевагу послатися? Напевно, на тих, хто й так уже популярний. Можна припустити, що ймовірність, з якою новий сайт поставитиме посилання на один із існуючих сайтів, пропорційна числу посилань, що вже були на той сайт. Моделі випадкових графів, що ґрунтуються на описаній ідеї, називаються моделями переважного приєднання. У своїх роботах Барабаші та Альберт ніяк не конкретизували, яку саме з цих моделей вони пропонують розглядати. А ці моделі виключно різномірні за своїми властивостями. Адже можна ставити посилання незалежно одне від одного, а можна враховувати ще й залежність між різними посиланнями з одного сайту.

Нещодавно отримано свідчення того, що функціональні зв'язки у мозку людини утворюють безмасштабні мережі. У мозку тварин та людини постійно йдуть процеси самоорганізації та розпаду, функціональних

нейромережових структур. Кожна така мережа, що поєднує нейронні ансамблі з різних відділів мозку, створюється для реалізації певної функції мозку – поведінкової, когнітивної тощо. Саме такі функціональні нейронні мережі стали об'єктом вивчення групи дослідників на чолі з Д. Чіалво (Dante Chialvo), метою яких було перевірити можливість застосування ідей та методів сучасної теорії мереж (безмасштабні мережі, мережі тісного світу тощо) до топології реальних функціональних структур мозку.

Використовуючи метод магнітно-резонансного зображення, вимірювалася активність мозку при здійсненні простої моторної дії на кожному часовому інтервалі в 2.5 секунд протягом 400 таких інтервалів. Вивчалася область мозку розміром $36 \times 64 \times 64$ просторових осередків з розміром кожного осередку $3 \times 3.475 \times 3.475$ мм³. Фіксувалася активність кожного такого осередку при виконанні таких простих функцій, як, наприклад, стукіт пальцем по столу. При реєстрації активності кожного такого осередку можна визначити, які осередки взаємопов'язані між собою (якщо активність осередків у різних частинах мозку виявляє властивість синхронності, це вказує на те, що між ними є зв'язок). Отже, кожні дві таких комірки вважались функціонально пов'язаними між собою, якщо значення просторово-часової кореляції між ними перевищує деякий поріг. Виявилося, що такі зв'язані осередки утворюють безмасштабну мережу, яка містить 31203 вузла, з властивостями тісного світу та з степеневим розподілом степенів вузлів: $P(k) \approx c \cdot k^{-\gamma}$, де показник скейлінгу становив $\gamma \approx 2$.

Також вивчались структурні властивості продуктів художньої творчості. Наприклад, партитура музичного твору для рояля легко перетворюється на мережеву структуру, якщо вузлами такої мережі призначити музичні ноти всіх можливих тривалостей. Число вузлів у такій мережі не буде перевищувати 1800. Дійсно, число клавіш у рояля дорівнює 88 і, множачи це число на 20 (кількість можливих тривалостей ноти: цілі, половинні, чверті, восьмі, тощо), отримуємо 1760. Лі (Xiaofan

Liu), Tse (Chi K. Tse) та Смол (Michael Small) з політехнічного університету Гонконгу проаналізували статистичні властивості мереж, побудованих за описаним вище принципом, для творів Баха, Моцарта, Шопена та сучасних китайських композиторів, що працюють у жанрі поп-музики. Усі ці мережі виявилися безмасштабними. Середня кількість кроків між вузлами у цих мережах варіюють у діапазоні від 2.8 до 4.2.

Барабаші та Альберт запропонували просту та елегантну модель виникнення та еволюції безмасштабних мереж. Вони показали, що для виникнення безмасштабних мереж необхідні дві умови:

- зростання. Починаючи з невеликого числа m_0 вузлів, на кожному часовому кроці додається один новий вузол з m зв'язками, які з'єднують цей новий вузол з m різними вже існуючими вузлами;
- переважне приєднання (preferencial attachment). Коли вибираються вузли, до яких приєднується новий вузол, то вважається, що ймовірність, з якою новий вузол буде з'єднуватися з існуючим вузлом, пропорційна до кількості зв'язків, якими цей вузол вже пов'язаний з іншими вузлами.

Цей принцип був раніше запропонований Прайсом і Саймоном для пояснення походження степеневого закону у соціальних явищах. Фізики розглядають такі явища як властивості критичних станів.

Обчислення показують, що принцип переважного приєднання призводить до безмасштабної мережі з показником скейлінгу $\gamma = 3$. Саме таке значення скейлінгу досить рідко зустрічається в реальних мережах, але цінність цієї моделі Барабаші-Альберт полягає в тому, що вона показує принципову можливість генерації безмасштабної мережі на базі простих правил.

Розглянемо, як узагальнити цю модель, щоб отримати степеневий закон із довільним показником степені. Нехай можливість приєднання нового вузла до існуючого вузла, який має степінь q , пропорційна деякій функції $f(q)$, яка називається функція переваги. У моделі Барабаші-Альберт $f(q) = q$. Трохи модифікуємо цю функцію, нехай вона буде лінійною:

$f(q) = q + A$, де $A = a \cdot t$ має сенс «додаткової привабливості», $a \geq -1$, t – число зв'язків кожного нового вузла. Можна показати, що така лінійна модифікація призводить до безмасштабної мережі з $\gamma = 3 + a$, отже діапазон показника скейлінгу становитиме від 2 до нескінченості.

Якщо функція переваги має вигляд q^θ , де θ – деяке невід'ємне дійснозначне число, то можна показати, що механізм переважного приєднання призводить до степеневого розподілу і, відповідно, безмасштабності мережі, тільки при $\theta = 1$, тобто тільки коли функція переваги є лінійною.

Принцип переважного приєднання вперше використовувався для пояснення появи степеневого розподілу у дослідженні Юла щодо видового-родового різноманіття класифікації рослин в 1925 році. Сучасний метод основного кінетичного рівняння, який дає тей самий висновок, що й у Юла, але прозорішим чином, був запропонований Гербертом Саймоном в 1955 та був ним застосований до проблеми дослідження розмірів міст. До зростання мереж цей принцип вперше був застосований Дерек де Солла Прайсом в 1976, який досліджував мережі цитування між науковими публікаціями. Назва «переважне приєднання» та сьогоденню популярність моделей безмасштабних мереж пов'язана з роботою Барабаші та Альберт, які застосували його до розподілу посилань між інтернет-сторінками.

У безмасштабних мережах вузли з більшим степенем мають більше можливостей забирати собі зв'язки, що додаються до мережі. Інтуїтивно принцип переважного приєднання може бути зрозумілий, якщо ми думаємо в термінах соціальних мереж, які об'єднують людей. Тут зв'язок від A до B означає, що людина A знайома з людиною B . Вузли з великим степенем відповідають відомим людям з великою кількістю зв'язків. Коли новачок потрапляє до спільноти, для нього краще зв'язатися з одним з відомих людей, ніж з відносно невідомим. Подібним чином у всесвітній мережі сторінки пов'язуються з хабами, наприклад, із добре відомими сайтами, як Google або Вікіпедія, ніж зі сторінками, які мало, кому відомі. Якщо

вибирати для зв'язку нову сторінку випадковим чином, то можливість вибору певної сторінки буде пропорційна її степені. Це пояснює принцип переважного приєднання. Цей принцип є прикладом позитивного зворотного зв'язку, де спочатку випадкові варіації (один вузол спочатку має більше посилань або починає збирати посилання раніше за інші) автоматично посилюються, тим самим значно збільшуючи розрив. Це також іноді називають ефектом Матвія, «багаті стають багатшими», або автокаталізом у хімії.

1.4 Постановка задач досліджень

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження моделей складних мереж та розробка такої генеративної моделі, в якій була б можливість роздільної та незалежної параметризації показників скейлінгу та еластичності генерованої мережі.

Досягнення поставленої мети забезпечується виконанням наступних задач:

- провести аналіз предметної галузі;
- провести порівняльну характеристику існуючих моделей складних мереж, зокрема, безмасштабних;
- провести дослідження моделей Барабаші-Альберт та моделі еластичної мережі;
- на основі зазначених моделей розробити генеративну модель безмасштабної мережі з можливістю роздільної та незалежної параметризації показників скейлінгу та еластичності генерованої мережі;
- виконати програмну реалізацію запропонованої моделі та шляхом моделювання перевірити її працездатність та коректність.

2 РОЗРОБКА ГЕНЕРАТИВНОЇ МОДЕЛІ БЕЗМАСШТАБНИХ МЕРЕЖ З РОЗДІЛЬНИМИ ПАРАМЕТРАМИ СКЕЙЛІНГУ ТА ЕЛАСТИЧНОСТІ

Теорія складних мереж є відносно новим науковим напрямом, який сформувався наприкінці 90-х років XX сторіччя [1], [2]. Його формування було зумовлено бурхливим розвитком комп'ютерних мереж, соціальних мереж, появою та розвитком штучних нейронних мереж, дослідженнями мереж біохімічної природи. Підґрунтям теорії складних мереж слугувала теорія графів, проте складні мережі у сучасному розумінні цього терміну мають певні ключові властивості, сукупність яких виходить за межі класичної теорії графів. По-перше, складні мережі мають великий розмір – тисячі, мільйони, сотні мільйонів вузлів та ребер. По-друге, складні мережі є стохастичними, тобто правила встановлення зв'язків між вузлами мають не функціональну, а ймовірнісну сутність. По-третє, складні мережі є динамічними, зазвичай, зростаючими. Це означає, що кількість вузлів та ребер у мережі не є сталою, а збільшується протягом часу.

Відомо, що більшість складних мереж реального світу є безмасштабними (scale-free). В таких мережах розподіл вузлів за кількістю зв'язків є степеневим, або асимптотично степеневим, що є ознакою наявності фрактальних властивостей мережі.

Дослідження складних мереж проводяться у двох напрямках: досліджування властивостей (через вимірювання/оцінювання певних числових характеристик) реальних мереж, та створення моделей мереж, які б відтворювали структуру та характеристики реальних складних мереж. Серед таких моделей особливе місце займають генеративні моделі. Це такі, які дають змогу генерувати моделі покроково із зростанням розміру мережі. Від двох вузлів / одного ребра до мережі з багатьох мільйонів вузлів. Саме створення генеративної моделі безмасштабних мереж з певними заданими характеристиками генерованої мережі є темою досліджень цієї роботи.

2.1 Генеративна модель безмасштабної мережі Барабаші-Альберт

Характерною властивістю безмасштабних мереж [3] є асимптотично степеневий розподіл вузлів за степенем, тобто кількістю зв'язків:

$$\Pr(\deg_i = k) \underset{k \rightarrow \infty}{\propto} \text{const} \cdot k^{-\gamma}. \quad (0.9)$$

В основі моделей безмасштабних мереж лежать дві базові концепції: зростання та переважне приєднання. Зародком мережі слугує деякий невеличкий зв'язний граф з n_0 вузлів та m_0 ребер. При цьому, звісно, повинні виконуватись умови:

$$n_0 - 1 = m_0^{\min} \leq m_0 \leq m_0^{\max} = \frac{n_0(n_0 - 1)}{2}, \quad (0.10)$$

оскільки цей зародок повинен бути зв'язним та не може бути мультиграфом. Часто в якості зародка використовуються повні графи (K_{n_0}) з n_0 вузлами та $m_0 = m_0^{\max}$ ребрами. Найпростішими такими графами є K_2 – два вузла, з'єднані ребром, K_3 – трикутник з трьома вузлами та трьома ребрами.

Згідно із концепцією зростання на кожному кроці часу до мережі додається нове ребро та/або вузол. Зазвичай, у генеративних моделях мереж, міра часу ототожнюється з кількістю вузлів у мережі. Тобто вважається, що в момент часу $n > n_0$ мережа складається з n вузлів та під час наступного кроку часу в неї з'являється новий вузол з номером $n + 1$. Це і є реалізацією концепції росту. Таким чином, порядковий номер вузла відповідає моменту часу його появи та розміру мережі на цей момент.

Згідно з концепцією переважного приєднання ймовірність отримання вузлом нового зв'язка прямо пропорційна до кількості зв'язків, які цей вузол вже має. Позначимо $\deg_{i,n}$ – степінь вузла з номером i в момент часу n ,

E_n – кількість ребер у мережі з n вузлів. При цьому очевидно, що

$$\sum_{i=1}^n \deg_{i,n} = 2E_n. \quad (0.11)$$

Загальну кількість вільних кінців ребер, які додаються одночасно з новим вузлом $n + 1$, позначимо як m_n .

Згідно з концепцією переважного приєднання ймовірність того, що вільний кінець нового ребра приєднається до існуючого вузла i пропорційна до його степені $\deg_{i,n}$, тобто до кількості зв'язків, які він вже має:

$$p_{i,n}^{single} = \frac{\deg_{i,n}}{\sum_i \deg_{i,n}} = \frac{\deg_{i,n}}{2E_n}. \quad (0.12)$$

Враховуючи введені позначення m_n для кількості вільних кінців, які розподіляються згідно з (0.12), та вважаючи акти приєднання незалежними один від одного (схема Бернуллі), можна отримати різницеве рівняння для очікуваного приросту кількості зв'язків для кожного з існуючих вузлів:

$$\deg_{i,n+1} - \deg_{i,n} = m_n \cdot p_{i,n}^{single} = \deg_{i,n} \cdot \frac{m_n}{2E_n}. \quad (0.13)$$

У класичній БА-моделі [1] всі нові ребра одним кінцем приєднані до нового вузла, а кількість нових ребер є постійною:

$$m_n = \Delta E_n = m = const. \quad (0.14)$$

Для того, щоб уникнути перетворення мережі у мультиграф (тобто для уникнення утворення кратних ребер) кількість нових ребер не може

перевищити кількості вузлів у зародку мережі:

$$m \leq n_0. \quad (0.15)$$

З урахуванням (0.14), рівняння динаміки степенів вузлів (0.13) суттєво спрощується:

$$\deg_{i,n+1} - \deg_{i,n} = \deg_{i,n} \cdot \frac{1/2}{n - n'}, \quad (0.16)$$

де значення n' залежить від розміру зародка та від керуючого параметру m , але (що важливо) не залежить ані від розміру мережі (n), ані від порядкового номеру вузла ($n_0 < i \leq n$):

$$n' = n_0 - \frac{m_0}{m}. \quad (0.17)$$

Для важливого часткового випадку, коли зародок є повним графом K_{n_0} , а значення m дорівнює його розміру ($m = n_0$), величина n' (0.17) набуває свого мінімального значення $n' = \frac{m+1}{2}$.

Загальний розв'язок різницевого рівняння (0.16) має вигляд:

$$\deg_{i,n} = c_i \frac{\Gamma(n - n' + \frac{1}{2})}{\Gamma(n - n')}, \quad (0.18)$$

де $\Gamma(x)$ є широко відомою гамма-функцією Ейлера;

c_i визначається початковими умовами, тобто кількістю зв'язків у вузла $n_0 < i \leq n$ після його появи, але до появи вузла $i + 1$:

$$\deg_{i,i} = m. \quad (0.19)$$

З виразів (0.18) та (0.19) випливає, що $\deg_{i,i} = c_i \frac{\Gamma(i - n' + \frac{1}{2})}{\Gamma(i - n')} = m$,

звідки $c_i = m \cdot \frac{\Gamma(i - n')}{\Gamma(i - n' + \frac{1}{2})}$, та

$$\deg_{i,n} = m \cdot \frac{\Gamma(i - n')}{\Gamma(i - n' + \frac{1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(n - n' + \frac{1}{2})}{\Gamma(n - n')}. \quad (0.20)$$

Згідно з властивостями гамма-функції, для великих значень i та n (тобто для мережі великого розміру) степені вузлів задовільняють наступному наближеному виразу:

$$\deg_{i,n} \underset{i \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty}{\approx} m \cdot \left(\frac{n - n'}{i - n'} \right)^{1/2} \approx m \cdot \left(\frac{n}{i} \right)^{1/2}. \quad (0.21)$$

Отриманий вираз (0.21) свідчить, що ранговий розподіл степенів вузлів у мережі Барабаші-Альберт є асимптотично степеневим з показником рангового скейлінгу $\rho = 1/2$. Відомо, що показник скейлінгу частотного розподілу будь-якої випадкової величини взаємно однозначно пов'язаний з показником скейлінгу рангового розподілу цієї величини:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\rho}. \quad (0.22)$$

Отже, розподіл степенів вузлів у мережі Барабаші-Альберт є асимптотично степеневим з показником скейлінгу $\gamma = 3$.

Саме наявність степеневого розподілу вузлів за кількістю зв'язків є

характерною ознакою безмасштабності мережі.

З виразів (0.20) та/або (0.21) випливає, що середнє значення степені вузлів мережі Барабаші-Альберт становить:

$$\overline{\deg} = 2m. \quad (0.23)$$

Отже, середня степінь вузла лише вдвічі більше, ніж його мінімальна степінь. Водночас, лише чверть всіх вузлів будуть мати степінь, більшу або такою, що дорівнює, середньої (0.23). А найбільший хаб матиме приблизно $m\sqrt{n}$ зв'язків, тобто в $\sqrt{n}$ разів більше за мінімальну кількість. При цьому чим більше мережа (тобто n), тим більшою буде різниця між вузлами-«багатіями» (хабами) та звичайними вузлами. Медіанна степінь вузла становить $m\sqrt{2}$.

2.2 Генеративна модель еластичної безмасштабної мережі

Отже, найпростішою та найвідомішою моделлю безмасштабних мереж є модель Барабаші-Альберт (БА) [1, 4]. Вона вважається класичною, входить у бібліотеку NetworkX [5]. Проте, зазначена модель має певні недоліки та обмеження. По-перше, показник скейлінгу БА-мережі дорівнює $\gamma = 3$, в той час як скейлінг мереж реального світу буває різним: зазвичай, він варіюється у діапазоні $2 < \gamma \leq 3$, проте, існують і мережі з $\gamma > 3$ [3]. По-друге, в БА-моделі середня степінь вузла (0.23) є постійною, що протирічить самій концепції безмасштабності, не відповідає властивостям реальних мереж, та створює проблеми під час генерування щільних мереж великого розміру.

Для подолання першої з зазначених проблем найчастіше використовується модель додаткової привабливості (additional attractiveness), запропонована Прайсом [6]. Згідно з нею кожному вузлу мережі додається

постійна додаткова привабливість $a > -1$, яка додається до степені вузла під час обрахунку ймовірності приєднання зв'язки до нього. Отже, правило переважного приєднання (0.12) модифікується та набуває вигляду:

$$p_{i,n}^{single} = \frac{\deg_{i,n} + a}{\sum_{i=1}^n (\deg_{i,n} + a)} = \frac{\deg_{i,n} + a}{2E_n + n \cdot a}. \quad (0.24)$$

Його застосування призводить до відповідної модифікації різницевого рівняння (0.16) динаміки зростання степенів вузлів:

$$\deg_{i,n+1} - \deg_{i,n} = m \cdot \frac{\deg_{i,n} + a}{2E_n + na} = \frac{\rho(\deg_{i,n} + a)}{n - n''}, \quad (0.25)$$

де

$$\rho = \frac{1}{2 + a/m}, \quad n'' = 2n'\rho = \frac{2n'}{2 + a/m}. \quad (0.26)$$

Враховуючи початкові умови (0.19), розв'язок рівняння (0.25) має вигляд, близький до (0.20), а саме:

$$\deg_{i,n} = (a + m) \frac{\Gamma(i - n'')}{\Gamma(i - n'' + \rho)} \frac{\Gamma(n - n'' + \rho)}{\Gamma(n - n'')} - a \underset{i,n \rightarrow \infty}{\approx} (a + m) \left(\frac{n - n''}{i - n''} \right)^\rho - a. \quad (0.27)$$

Легко пересвідчитись, що при $a = 0$ параметри дорівнюють $\rho = 1/2$ та $n'' = n'$, а (0.27) співпадає з (0.20). В той же час, при $a \neq 0$ ранговий розподіл вузлів (0.27) є дискретним варіантом степеневого розподілу з показником рангового скейлінгу ρ (0.26). Відповідно, показник скейлінгу частотного розподілу вузлів за кількістю зв'язків становитиме [7].

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\rho} = 3 + \frac{a}{m}. \quad (0.28)$$

Таким чином, використання додаткової привабливості дає змогу створювати моделі безмасштабних мереж з показниками скейлінгу, відмінними від трьох. При цьому варто зазначити, що для забезпечення скейлінгу $\gamma < 3$ параметр додаткової привабливості повинен бути від'ємним $-1 < a < 0$ (але він не може бути менше, чи рівним -1 , бо ймовірності встановлення зв'язка (0.24) не можуть бути від'ємними).

Можна встановити, що середня степінь вузла у моделі додаткової привабливості є такою ж самою, як і у моделі Барабаші-Альберт (0.23), тобто $2m$ [8]. Отже, додаткова привабливість дозволяє регулювати показник скейлінга, але залишає постійною середню степінь вузла.

Для пояснення проблем, які спричиняє постійність середнього степеню вузлів, уявимо собі задачу моделювання еволюції деякої умовної соціальної мережі (спільноти), яка починається з маленького кола з $n_0 = 10$ друзів-однодумців та потім розвивається до багатотисячної спільноти. Зрозуміло, що значення керуючого параметра (m) не може перевищувати 10, адже одинадцятий вузол не може встановити більше, ніж 10 унікальних зв'язків. В результаті згенерована мережна модель великої спільноти виявиться дуже розрідженою, тобто середня кількість зв'язків у вузлах буде замалою. Так, для спільноти розміром $n = 5000$ вузлів було б цілком природньо очікувати середню степінь вузла $\overline{deg}$ (0.23) порядку декількох сотень (наприклад, відоме число Данбара [10], яке дорівнює 150), але аж ніяк не $2 \cdot 10 = 20$. Якщо ж встановити, наприклад, $m = 100$, то починати моделювання можна буде лише починаючи із зародку відповідного, відносно великого, розміру. І тоді, по-перше, постає питання, а як змодельовати цей зародок, а по-друге, властивості цього випадкового зародку будуть набагато суттєвіше впливати на властивості згенерованої великої мережі. Отже, виявляється, що моделі з $m_n = m = const$ придатні

для опису динаміки мереж лише на вузькому інтервалі масштабу мережі, тобто у кусково-стаціонарному режимі застосування моделей.

Для подолання цієї проблеми було запропоновано [9] доповнити базові концепції зростання та переважного приєднання концепцією еластичності. Згідно з нею відносна швидкість зростання кількості ребер

$$\delta E_n = \frac{\Delta E_n}{E_n} = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n}, \quad (0.29)$$

та відносна швидкість зростання кількості вузлів у мережі

$$\delta N_n = \frac{\Delta N_n}{N_n} = \frac{N_{n+1} - N_n}{N_n}, \quad (0.30)$$

не співпадають між собою.

У найпростішому випадку зазначені відносні прирости пропорційні з постійним (константним) коефіцієнтом пропорційності

$$1 \leq \lambda < 2, \quad (0.31)$$

який зветься еластичністю кількості ребер до кількості вузлів:

$$\delta E_n = \lambda \cdot \delta N_{n-1}, \quad or \quad \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} = \lambda \frac{N_n - N_{n-1}}{N_{n-1}}. \quad (0.32)$$

Подібний підхід широко застосовується під час моделювання динаміки хімічних реакцій, або економічних явищ (еластичність попиту від ціни тощо). Саме цим пояснюється дещо незвична назва показника еластичності (0.31).

Оскільки вимір часу ототожнений з кількістю вузлів, то $N_n = n$ тому

рівняння (0.32) приймає вигляд:

$$E_{n+1} - E_n = \lambda \frac{E_n}{n-1}. \quad (0.33)$$

Зародком еластичної безмасштабної мережі є два вузла, з'єднані ребром (тобто $E_2 = 1$). З урахуванням цієї початкової умови розв'язок рівняння (0.33) матиме наступний вигляд [8]:

$$E_n = \frac{\Gamma(n + \lambda - 1)}{\Gamma(n - 1)\Gamma(\lambda + 1)}, \quad (0.34)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера, яка є узагальненням факторіалу на дійснозначний аргумент;

$\Gamma(n + 1) = n!$ для цілих n .

Тоді приріст кількості ребер на кроці n становитиме

$$m_n = \Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\Gamma(n + \lambda - 1)}{\Gamma(n)\Gamma(\lambda)}. \quad (0.35)$$

Враховуючи властивості гамма-функції, з (0.34) випливає, що із зростанням мережі ($n \rightarrow \infty$) кількість ребер у неї та покроковий приріст кількості ребер зростатимуть за асимптотично степеневими законами:

$$E_n \approx \text{const} \cdot n^\lambda, \quad \Delta E_n \approx n^{\lambda-1}. \quad (0.36)$$

У таблиці 2.1 наведено приклад залежностей (0.34)–(0.35) для мережі з еластичністю $\lambda = 1.3$. На цьому прикладі можна бачити, що модель еластичних мереж набагато краще відтворює динамічні властивості реальних мереж, ніж модель БА. Так, для моделювання невеликих

мереж ($n \leq 100$) слід задати у БА-моделі $m = 2 \div 5$. Але, згідно з табл. 2.1, така модель буде непридатна для відтворення мережі великого розміру. З іншого боку, якщо n вимірюється мільйонами, то m повинно сягати сотень. Але тоді не можна буде відтворити еволюцію мережі на початковому етапі її існування. Більше того, потрібно буде якимось чином генерувати зародок БА-моделі з $n_0 \geq m$ вузлів і властивості моделі будуть суттєвим чином залежати від структури зв'язків у цьому зародку. Отже, застосування концепції еластичності дозволяє уникнути всіх зазначених проблем та неузгодженостей та генерувати моделі, які адекватно відтворюють динамічні властивості реальних мереж на всьому діапазоні їх можливих розмірів.

Таблиця 2.1 – Зростання кількості ребер у мережі з еластичністю $\lambda = 1.3$

Кількість вузлів (n)	2	10	100	10 000	1 млн.	100 млн.
Кількість ребер (E_n)	1	15	337	135 828	~54 млн.	~21.5 млрд.
Очікувана кількість нових ребер (ΔE_n)	1	2,1	4,4	17,7	70,3	279,9

З виразів (0.34)–(0.35) випливає, що у частковому випадку $\lambda = 1$ еластична модель приводить до деревовидної структури мережі, для якої $E_n = n - 1$. Модель БА також відповідає одиничній еластичності ($\lambda = 1$), але з іншими початковими умовами (іншим зародком мережі). Інший граничний випадок ($\lambda = 2$) породжує повні графи: такі, де кожен вузол з'єднаний з кожним іншим. Таку структуру не можна вважати безмасштабною, саме тому вважається, що $1 \leq \lambda < 2$. Варто зазначити, що еластичні моделі дають змогу генерувати щільні мережі. При цьому показник еластичності (λ) асимптотично збігається з логарифмічним показником щільності (ρ_{log}) мережі, а точніше $\lambda \approx \rho_{log} + 1$.

Отже, ключовою особливістю моделі еластичних мереж є те, що

кількість зв'язків (m_n), які утворюються між новим вузлом та існуючими, є не константою (як в моделях БА та додаткової привабливості), а залежить від розміру мережі (n). З (0.33) випливає, що ця залежність має вигляд:

$$2m_n = \lambda \cdot \frac{2E_n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \approx \lambda \cdot \overline{\deg(n)}. \quad (0.37)$$

Отриманий вираз (0.37) має досить простий, але значущий сенс: в кожен момент часу (n) кількість новостворюваних зв'язків (з точністю до асимптотично одиничного множника) в λ разів більше, ніж середня степінь існуючих вузлів. Інакше кажучи, якщо на поточний час існуючі вузли мережі мають деяку середню кількість зв'язків $\overline{\deg(n)}$, то новий вузол намагається «бути трошки кращім» за середній та приносить із собою в λ разів більше зв'язків. Зрозуміло, що таке намагання є цілком природним для суб'єктів соціальних мереж.

Якщо підставити (0.37), або (0.33) у базове рівняння (0.13), то отримаємо різницеве рівняння динаміки зростання степенів вузлів еластичної мережі:

$$\deg_{i,n+1} - \deg_{i,n} = \deg_{i,n} \cdot \frac{\lambda / 2}{n-1}, \quad (0.38)$$

з початковими умовами

$$\deg_{i,i} = m_{i-1} = \frac{\Gamma(i + \lambda - 2)}{\Gamma(i - 1)\Gamma(\lambda)} \quad (0.39)$$

для всіх $n \geq 2, 2 \leq i \leq n$.

Розв'язок рівнянь (0.38)–(0.39) має вигляд:

$$\deg_{i,n} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(i-2\rho)}{\Gamma(i-\rho)} \frac{\Gamma(n-\rho)}{\Gamma(n-1)}, \quad i, n \geq 2. \quad (0.40)$$

де

$$\rho = 1 - \lambda / 2, \quad 0 < \rho \leq 1 / 2. \quad (0.41)$$

При цьому перший вузол ($i = 1$) матиме степінь, тотожню степені другого вузла, тобто $\deg_{1,n} = \deg_{2,n}$, де $\deg_{2,n}$ знаходиться за (0.40). Це є цілком природньо, оскільки зародком мережі є ребро з вузлами 1 та 2, тобто нумерація цих вузлів між собою є суто умовною. Також варто нагадати, що еволюція мережі є випадковим процесом, а вирази $\deg_{i,n}$ позначають математичне очікування степені вузла, а не точне її значення.

Асимптотично, при великих значеннях i та n ($i \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$), розподіл (0.40) вузлів за степенями набуває приблизного вигляду:

$$\deg_{i,n} \underset{i,n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{n^{\lambda/2}}{i^\rho}. \quad (0.42)$$

Таким чином, показник рангового скейлінгу дорівнює ρ , а показник скейлінгу частотного розподілу вузлів за степенями дорівнює [9]

$$\gamma^{elast} = 1 + \frac{1}{\rho} = 1 + \frac{1}{1 - \lambda / 2} = \frac{4 - \lambda}{2 - \lambda}. \quad (0.43)$$

Середнє значення степені вузла еластичної мережі зростає із зростанням мережі та становить

$$\overline{\deg} = \frac{E_n}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} const \cdot n^{\lambda-1}. \quad (0.44)$$

З (0.43) випливає, що скейлінг еластичної мережі функціонально залежить від еластичності. Цей факт протирічить тому, що спостережувані значення скейлінгу реальних мереж є різними навіть за умов однакової щільності (а отже і еластичності) мереж. Більше того, з (0.43) випливає, що $\gamma \geq 3$, але для більшості мереж реального світу $2 < \gamma \leq 3$. Таким чином, є необхідність такої модифікації генеративної моделі безмасштабних мереж в якій параметри скейлінгу та еластичності не є однозначними функціями один одного.

2.3 Генеративна модель безмасштабної мережі з роздільною параметризацією еластичності та скейлінгу

Як було визначено, необхідно модифікувати генеративну модель безмасштабних мереж таким чином, щоб забезпечити можливість параметризувати скейлінг та еластичність окремо один від одного.

Для розв'язання зазначеної проблеми пропонується відокремити акт появи ребра від акту його з'єднанням з новим вузлом.

Нехай:

$$0 < p^{new} \leq 1 \quad (0.45)$$

є ймовірністю того, що нове ребро приєднане одним кінцем до нового вузла. Відповідно, $q^{new} = 1 - p^{new}$ буде ймовірністю того, що обидва кінця новостворюваного ребра є вільні.

Таким чином, якщо одночасно з новим вузлом (з номером $n + 1$) в мережі з'являються ΔE_n нових ребер, то кількість вільних кінців цих ребер складе

$$m_n = (p^{new} + 2q^{new})\Delta E_n = (2 - p^{new})\Delta E_n. \quad (0.46)$$

Згідно з концепцією еластичності (0.34)-(0.35), кількість нових ребер ΔE_n становить:

$$\Delta E_n = \frac{\Gamma(n + \lambda - 1)}{\Gamma(n)\Gamma(\lambda)} \quad (0.47)$$

Згідно з концепцією переважного приєднання всі ці вільні кінці розподіляються так саме, як і моделі Барабаші-Альберт, тобто згідно (0.12), отже зберігає чинність рівняння (0.13) для очікуваного приросту кількості зв'язків у вузлів. Підставивши (0.47), (0.46), та (0.12) у (0.13), отримаємо:

$$\deg_{i,n+1} - \deg_{i,n} = \deg_{i,n} \cdot \frac{\lambda(1 - p^{new} / 2)}{n - 1}. \quad (0.48)$$

Загальний розв'язок різницевого рівняння (0.48) (для $n > 1$) має вигляд:

$$\deg_{i,n} = c_i \frac{\Gamma(n - 1 + \beta)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(n - 1)}, \quad (0.49)$$

де

$$\beta = \lambda(1 - p^{new} / 2), \quad (0.50)$$

$c_1 = c_2 = 1$, а для $i > 2$ множник c_i визначається початковою умовою, а саме тим, що після появи та під'єднання до мережі (тобто в момент часу $n = i$) вузол i повинен мати $\Delta E_{i-1} \cdot p^{new}$ зв'язків:

$$\deg_{i,i} = \Delta E_{i-1} \cdot p^{new}. \quad (0.51)$$

Підставивши (0.47) та (0.49) до (0.51), матимемо:

$$\deg_{i,i} = c_i \frac{\Gamma(i-1+\beta)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(i-1)} = \frac{\Gamma(i-2+\lambda)}{\Gamma(i-1)\Gamma(\lambda)} \cdot p^{new}. \quad (0.52)$$

З (0.52) випливає, що

$$c_i = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(i-2+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(i-1+\beta)} \cdot p^{new}, \quad i = 3, \dots, n. \quad (0.53)$$

З урахуванням (0.53) рівняння (0.49) динаміки очікуваної степені вузла i прийме остаточний вигляд:

$$\deg_{i,n} = \frac{p^{new}}{\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(i-2+\lambda)}{\Gamma(i-1+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(n-1+\beta)}{\Gamma(n-1)}. \quad (0.54)$$

Незважаючи на деяку громіздкість отриманого виразу (0.54), його структура є доволі прозорою: перший множник (перший дріб) є нормуючою константою, спільною для всіх вузлів і всіх часових моментів. Другий множник відображає залежність степені вузла ($\deg_{i,n}$) від його номера (i), тобто від «дати народження» цього вузла. Третій множник відображає залежність степені вузла від поточного розміру мережі (n).

При великих значеннях n та i асимптотичний вигляд залежності (0.54) значно спрощується:

$$\deg_{i,n} \approx p^{new} \cdot \frac{(n-1)^\beta}{(i-1)^{\beta+1-\lambda}}. \quad (0.55)$$

Вираз (0.55) чітко вказує, що степінь вузлів зростає за степеневим законом від розміру мережі з показником степеню $\lambda/2 \leq \beta < \lambda$. З іншого

боку, з (0.55) випливає, що степені вузлів розподілені за асимптотично степеневим розподілом з показником рангового скейлінгу

$$\rho = \beta + 1 - \lambda = 1 - \lambda p^{new} / 2. \quad (0.56)$$

Враховуючи загальне співвідношення (0.22) між показниками рангового скейлінгу та скейлінгу частотного розподілу (γ), отримаємо що

$$\gamma = 1 + 1 / \rho = 1 + \frac{1}{\beta + 1 - \lambda} = 1 + \frac{1}{1 - p^{new} \lambda / 2}. \quad (0.57)$$

З (2.50) випливає, що скейлінг мережі, яка може бути згенерована за розробленою моделлю, варіюється від $2 + \varepsilon$ (при $p^{new} \rightarrow 0$) до $\gamma^{elast} > 3$ (при $p^{new} = 1$ згідно з (0.43)). Згідно з (2.50), для забезпечення заданого значення скейлінгу (γ) при відомому значенні показника еластичності (λ) ймовірність приєднання нового ребра до нового вузла (p^{new}) повинна становити:

$$p^{new} = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1}. \quad (0.58)$$

З іншого боку, для того, щоб показник скейлінгу вкладався в діапазон $2 < \gamma \leq 3$, характерний для більшості безмасштабних мереж, необхідно виконання умови:

$$\lambda p^{new} \leq 1. \quad (0.59)$$

Отже, було розроблено перспективну модель покрокової генерації еластичних безмасштабних мереж з можливістю роздільної, тобто окремої, параметризації показників еластичності та скейлінгу.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ РОЗРОБЛЕНОЇ МОДЕЛІ, ПРОВЕДЕННЯ ЧИСЕЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1 Вибір інструментального середовища

В якості інструментального середовища для програмної реалізації досліджуваних методів покрокової генерації безмасштабних мереж обрано середовище MATLAB [11]. Він являє собою інтерактивне середовище для програмування, чисельних розрахунків та візуалізації результатів обчислень з вбудованою високорівневою мовою програмування.

MATLAB дає змогу проводити аналіз даних, реалізовувати складні алгоритми наукових та інженерних обчислень, візуальним чином створювати моделі та використовувати їх.

Вбудована мова програмування у MATLAB здійснює підтримку векторних та матричних операцій, яка необхідна для розв'язання багатьох інженерних та наукових задач. За допомогою вбудованої мови програмування, у середовищі MATLAB можна писати програми та алгоритми швидше, ніж традиційними мовами програмування, тому що немає необхідності таких низькорівневих операцій як оголошення змінних, визначення типів і виділення пам'яті. Однією з значущих властивостей мови MATLAB є вбудована векторизація циклів, що у багатьох випадках позбавляє необхідності використання циклів `for`. А це в свою чергу суттєво спрощує та прискорює процес створення програм, робить код компактнішим, прозорішим. Так, один рядок коду MATLAB часто може замінити кілька рядків C/C++ коду.

Історія існування пакету MATLAB, назва якого походить від словосполучення Matrix Laboratory налічує біля сорока років. Однією з основних переваг пакету MATLAB є те, що для роботи користувачеві достатньо знати про нього рівно стільки, скільки вимагає його конкретна прикладна проблема, або задача. Так, у найпростішому випадку MATLAB

може зіграти роль звичайного калькулятора, для якого досить пам'ятати знаки математичних операцій. Якщо ж розв'язувана задача потребує застосування якихось більш складних та потужних інструментів, то MATLAB надає у розпорядження користувача потужну та зручну мову програмування разом із інтерактивними засобами створення, відлагодження створюваних програм, та візуалізації результатів.

На рисунку 3.1 представлено вигляд інтерфейсу MATLAB.

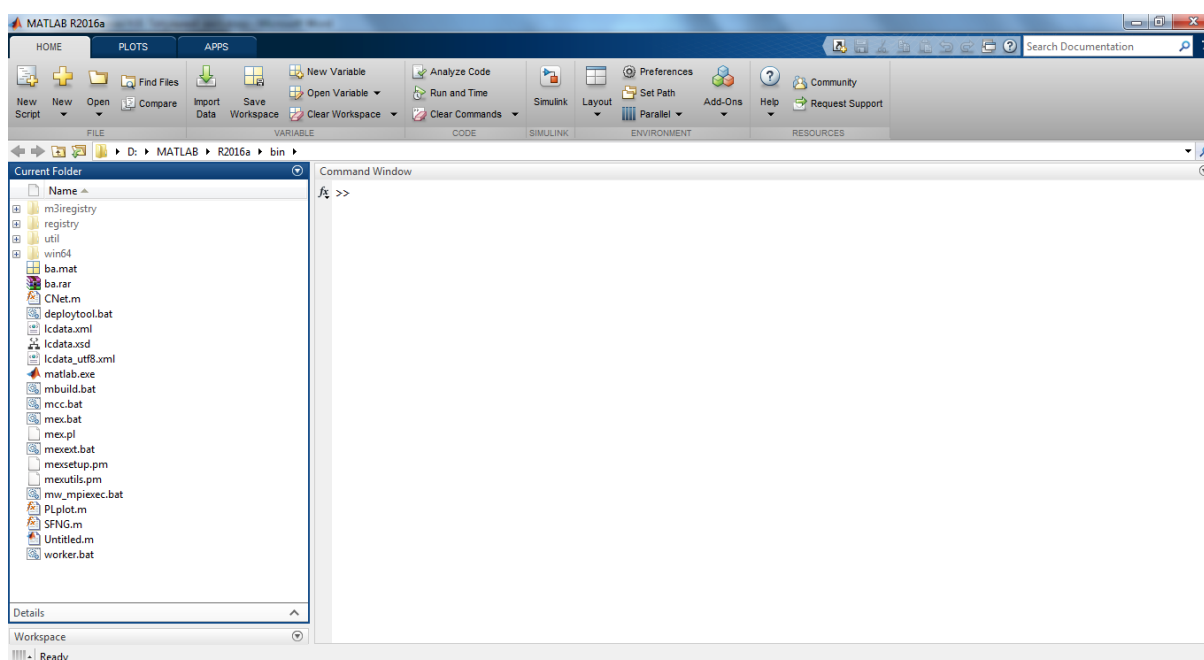


Рисунок 3.1 – Приклад вікна інтерфейсу MATLAB

Насамперед MATLAB є це засобом математичного моделювання, що забезпечує проведення досліджень практично у всіх галузях науки та техніки. При цьому структура пакета дозволяє ефективно поєднувати обидва основні підходи до створення моделі: аналітичний та імітаційний.

Саме у сфері математичного моделювання MATLAB дозволяє найповніше використовувати всі сучасні досягнення комп'ютерних технологій, у тому числі засоби візуалізації та аудифікації (озвучування) даних, а також можливості обміну даними через інтернет. Крім того, користувач має можливість створювати засобами MATLAB власний

графічний інтерфейс, що відповідає як його уподобанням, так і вимогам завдання. Як випливає з назви пакета, він орієнтований насамперед на обробку масивів даних (матриць та векторів). Це дозволило його розробникам суттєво підвищити ефективність процедур, які працюють із зазначеними типами даних, у порівнянні з мовами програмування загального призначення.

З погляду користувача, MATLAB має дуже потужну бібліотеку функцій (близько 1500), єдина проблема під час роботи з якою полягає у вмінні швидко знайти ті, які необхідні вирішення конкретної задачі.

3.2 Генерація безмасштабних мереж

Як було визначено під час дослідження предметної області, базовим алгоритмом покрокової генерації безмасштабних мереж є алгоритм Барабаші-Альберт. Було розроблено блок-схему цього алгоритму та здійснено його програмну реалізацію.

Розроблена програма реалізує генерацію та візуалізацію моделі безмасштабної мережі Барабаші-Альберт. Вона складається із трьох функцій.

Функція SFNG (рисунок 3.2) безпосередньо реалізує створення безмасштабної мережі Барабаші-Альберт та повертає цю мережу у вигляді списку списків суміжних вузлів, а також (в залежності від значення відповідної вхідної булевої змінної) у вигляді матриці суміжності. Цей код був розроблений таким чином, що можна було створити мережу малого розміру, а потім використовувати цю мережу як граф-зародок для створення мережі більшого розміру, продовжуючи цей процес доти, доки не буде досягнуто фактичного бажаного розміру мережі. Необхідно розуміти, що первісний граф-зародок не обов'язково повинен бути безмасштабною мережею, тоді як його нащадки будуть саме безмасштабними.

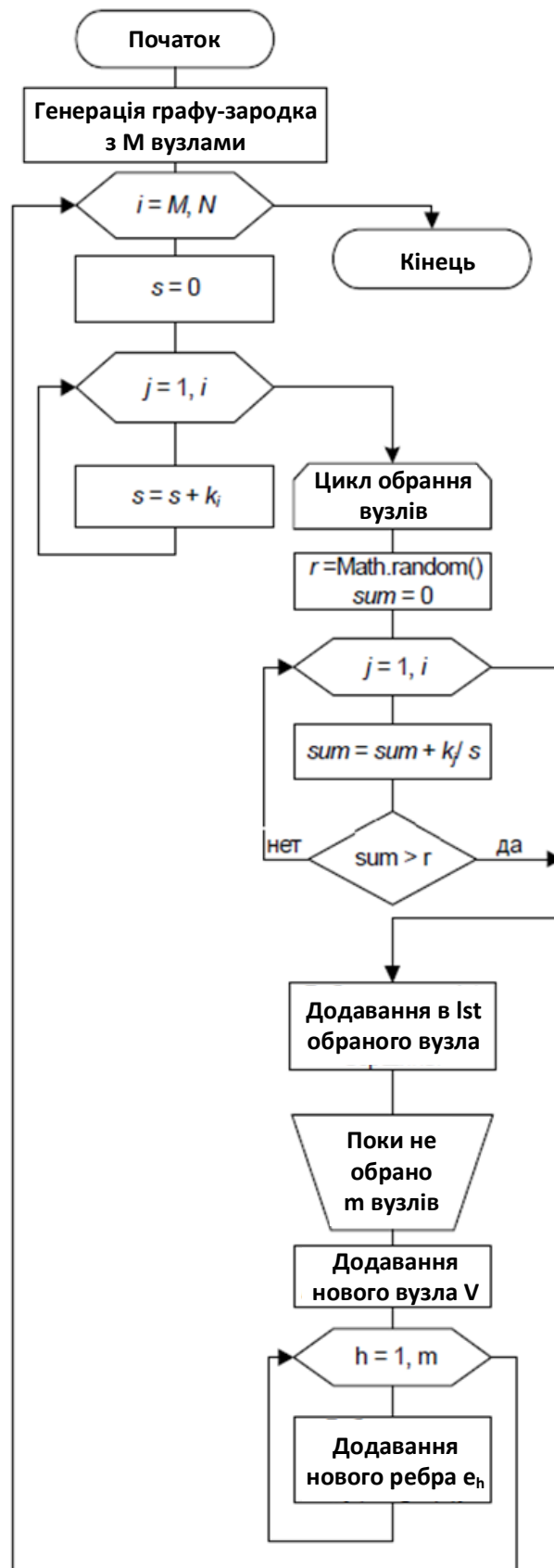


Рисунок 3.2 – Блок-схема алгоритму генерації моделі безмасштабної мережі