

**ПРО ПОБУДОВУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ
ДО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ
З АНТИТОННИМ ОПЕРАТОРОМ**

Муравльова С.О.

Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, проф. Колосова С.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, просп. Науки, 14, каф. Прикладної математики, тел.
(057)702-13-35)

E-mail: muravlova.svitlana@nure.ua

The paper shows the possibility of constructing a two-way approximation to the solution of one nonlinear boundary value problem with an antitone accompanying operator. Conditions were obtained that relate the four parameters involved in the problem statement.

Отримані в нелінійному функціональному аналізі різні ознаки нерухомої точки для операторних рівнянь дають можливість доводити існування та єдиність розв'язку крайової задачі для ДРЧП, якщо цій задачі вдається поставити у відповідність операторне рівняння. Цю відповідність треба розуміти таким чином: розв'язок операторного рівняння є розв'язком крайової задачі для диференціального рівняння.

Розглянемо крайову задачу [1]

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda(a + b \cdot u^p) \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &> 0 \text{ у } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\lambda > 0). \end{aligned} \quad (1)$$

У відповідність задачі (1) ставимо нелінійне операторне рівняння

$$u = Tu, \quad (2)$$

де

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} G(x, s)(a + bu^p(s))ds, \quad (3)$$

$G(x, s)$ - функція Гріна оператора Δ першої крайової задачі у Ω , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$. Властивості оператора T , а тому й задачі (1), суттєво залежать від значень параметрів a, b, p, λ . Вважаємо $a > 0, b > 0, p < 0$, Ω - скінченна область. Позначимо $p = -q$, $q > 0$. Оператор T набуває вигляду

$$Tu = \lambda \int_{\Omega} G(x, s) \left(a + \frac{b}{u^q(s)} \right) ds, \quad D(T) = K, \quad (4)$$

K - конус невід'ємних у $C(\Omega)$ функцій. Вочевидь, оператор T є антитонним, тобто такий, що з $u_1 \leq u_2$ ($u_1, u_2 \in K$) виходить $Tu_1 \geq Tu_2$, крім

того, оператор T є цілком неперервним у $C(\overline{\Omega})$, тому що $f(u) = a + \frac{b}{u^q}$ при $0 < u < +\infty, q > 0$ є неперервною функцією [2, с.264].

Нами встановлені наступні властивості оператора:

1) Оператор T є антитонний.

2) Побудовано конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \mid v_0 \leq u \leq w_0\} = \langle w_1(x), \beta \rangle$,

де $w_1(x) = \lambda \left(a + \frac{b}{\beta q} \right) \int_{\Omega} G(x, s) ds$, а стала β задовольняє нерівність

$$\max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} G(x, s) ds \leq \frac{\beta}{\lambda \left(a + \frac{b}{\beta q} \right)}.$$

3) Оператор T є псевдоугнутим та u_0 - псевдоугнутим $(u_0 = \int_{\Omega} G(x, s) ds)$ [2,3].

При доведенні цих властивостей на параметр q наклали умову $0 < q < 1$.

Доведені властивості оператора T дозволяють зробити висновок, що задача (1) має єдиний додатний розв'язок, послідовні наближення до якого можна отримати за схемою

$$w_{n+1}(x) = \int_{\Omega} G(x, s) (a + b u_n^{-q}(s)) ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

при цьому отримуємо нерівності

$$v_0 = w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n+1} \leq \dots \leq u \leq \dots \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta,$$

тобто двобічні наближення до розв'язку.

Список використаних джерел:

1. M. Matinfar, K. Nemati. A numerical extension on a Convex nonlinear elliptic problem. International Mathematical Forum, 3, 2008, no. 17, 811-816.
2. Опойцев В. И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов. Труды Моск. матем. Общества, 1978. – т. 36. с. 237-273.