К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ СУБОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОВЕТРИВАНИЕМ ДОБЫЧНЫХ УЧАСТКОВ ШАХТ

А. А. Волков, И. П. Лыткин, А. Я. Олешко, Ю. Н. Соколов

Харьков

При решении задачи синтеза оптимального управления проветриванием добычных участков шахт последние должны рассматриваться как объекты управления, подверженные случайным возмущениям [1]. Основные возмущения — процесс $B(t)$, связанный с работой добычного механизма, и $Q(t)$, обусловленный случайными изменениями дебита воздуха,— являются стационарными [2] и, будучи приведенными к уравнению объекта [3], образуют случайную дельта-коррелированную функцию $\xi(t)$, что дает возможность в качестве координат, достаточных для синтеза стохастически оптимального управления проветриванием, выбрать фазовые координаты объекта в текущий момент времени [4].

При этом задача синтеза оптимального управления проветриванием добычных участков формулируется следующим образом.

Рассматривается добычной участок (объект проветривания), находящийся под действием случайных возмущений и описываемый системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \beta x_2 + b_1 x_3 + b_0 u + \xi; \\ \dot{x}_3 &= u; \end{aligned} \tag{1}$$

где x_1 — отклонение концентрации метана от заданного значения;
x_2 — производная отклонения концентрации метана;
x_3 — отклонение дебита воздуха от заданного значения;
$\xi(t)$ — случайная функция, отражающая наличие указанных выше основных возмущений и удовлетворяющая условиям

$$M\xi(t) = 0; \; M\xi(t)\xi(t+\tau) \approx B\delta(t);$$

здесь β, b_1, b_0 — постоянные коэффициенты, причем $b_0 > 0$, $b_1 < 0$, $\beta > 0$. Требуется синтезировать управление $u(X)$, удовлетворяющее условию $|u(X(t))| \leq 1$, которое обеспечивает системе (1) вероятностную устойчивость [5] и минимизирует функционал

$$J = M\left\{\int_0^{\infty} \varphi(X(t))\,dt\right\},$$

где M — символ математического ожидания;
$X(t)$ — вектор фазовых координат при $u = u(X)$;
$\varphi(X)$ — определенно положительная функция штрафа.

Задаемся функцией штрафа

$$\varphi(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

и требуем, чтобы оптимальные траектории удовлетворяли условиям $X(0) \in \Omega$, где Ω — куб с координатами $\{-1 \leqslant x \leqslant +1\}$, а также условию вероятностной устойчивости [5].

Методы динамического программирования позволяют свести поставленную задачу к решению уравнения Беллмана, названного «диффузионным альтернативным» [4] для некоторой функции фазовых координат (функции потерь). Данное уравнение может быть получено известным способом [4], [5] и для нашей задачи имеет вид

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (-x_1 - \beta x_2 + b_1 x_3)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{B}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} =$$

$$= -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \left| b_0 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \right|. \qquad (2)$$

Соответственно уравнение поверхности переключения и алгоритм оптимального управления выражаются зависимостями

$$b_0 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0;$$

$$u_0(x) = -\operatorname{sign}\left(b_0 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\right),$$

где $f(x_1 x_2 x_3)$ — стационарная функция потерь.

Итак, задача синтеза оптимального управления проветриванием добычного участка сведена к определению функции потерь $f(x_1 x_2 x_3)$, удовлетворяющей уравнению (2). Следует отметить, что в настоящее время отсутствуют как точные, так и асимптотические методы решения уравнений типа (2). В связи с этим особый интерес имеют приближенные методы решения, позволяющие определить функцию потерь в первом приближении $f_1(x_1 x_2 x_3)$ и тем самым построить субоптимальный алгоритм управления:

$$u_{01}(x) = -\operatorname{sign}\left(b_0 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right). \qquad (3)$$

Близость получаемых результатов к желаемым должна быть оценена путем непосредственных вычислений выигрыша, получаемого в критерии качества $J(X)$. Для определения функции потерь в первом приближении можно воспользоваться методом разложения ее в ряд по полиномам Эрмита [4]; однако это приводит к излишне сложному вычислительному алгоритму.

Рассмотрим другой метод, использованный ранее для детерминированного варианта оптимального управления проветриванием [3], и покажем, что и в стохастическом случае он приводит к желаемым результатам.

Запишем уравнение объекта (1) в матричной форме

$$\dot{x}_1 = Ax + bu + \xi,$$

где

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\beta & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad \begin{matrix} b = (0, b_0, 1); \\ \xi = (0, \xi, 0). \end{matrix} \qquad (4)$$

Введем преобразование

$$x = Ty, \qquad (5)$$

где T — матрица, вычисленная таким образом, чтобы матрица $\tilde{A}$, определяемая из выражения

$$\tilde{A} = T^{-1}AT,$$

была диагональной

$$T = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda_1 & b_1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Подстановкой (5) в (4) исходную систему уравнений приводим к каноническому виду:

$$\dot{y} = \Lambda y + T^{-1}bu + T^{-1}\xi,$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + \beta_1 u + \gamma_1 \xi; \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + \beta_2 u + \gamma_2 \xi; \\ \dot{y}_3 &= \lambda_3 y_3 + \beta_3 u + \gamma_3 \xi. \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - 1};\ \lambda_2 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - 1};\ \lambda_3 = 0;$$

$$\beta_1 = -\frac{b_0\lambda_1 + b_1}{1 - \lambda_1^2};\ \beta_2 = \frac{b_0 + b_1\lambda_1}{1 - \lambda_1^2};\ \beta_3 = 1;$$

$$\gamma_1 = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1^2};\ ;\ \gamma_2 = \frac{1}{1 - \lambda_1^2};\ \gamma_3 = 0.$$

Диффузионное альтернативное уравнение для системы (6)

$$\lambda_1 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{B}{2}\left(\gamma_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} + \gamma_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\right) =$$

$$= -\varphi(y) + \left|\beta_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \beta_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial y_3}\right|.$$

где

$$\varphi(y) = (\lambda_1^2 + 1)\, y_1^2 + (\lambda_1^2 + 1)\, y_2^2 + (b_1^2 + 1)\, y_3^2 + 4\lambda_1 y_1 y_2 + 2b_1 y_1 y_3 +$$

$$+ 2b_1\lambda_1 y_2 y_3.$$

Метод наименьших квадратов (6) позволяет найти функцию потерь в первом приближении $f_1(y_1 y_2 y_3)$

$$f_1 = \sum_{i=0}^{l} a_i \varphi_i.$$

В качестве координатных функций φ_i возьмем совокупность степеней $y_1^{m_1} \cdot y_2^{m_2} \cdot y_3^{m_3}$ при $m_1 + m_2 + m_3 \leqslant 2$, $l = 10$;
тогда можно записать

$$\varphi_0 = 1;\ \varphi_1 = y_1;\ \varphi_2 = y_2;\ \varphi_3 = y_3;\ \varphi_4 = y_1 y_2;\ \varphi_5 = y_1 y_3;\ \varphi_6 = y_2 y_3;$$

$$\varphi_7 = y_1^2;\ \varphi_8 = y_2^2;\ \varphi_9 = y_3^2;$$

при этом выражение для f_1 запишем так:

$$f_1 = a_0 + a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + a_4y_1y_2 + a_5y_1y_3 + a_6y_2y_3 + a_7y_1^2 + a_8y_2^2 + a_9y_3^2.$$

Из условия определенной положительности функции f_1, вытекающего из требования вероятностной устойчивости, следует, что $a_0 = 0$. Коэффициенты $a_1 \div a_9$ определяем из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{9} (L\varphi_i, L\varphi_j) a_j = (\psi_1, L\varphi_i), \quad (i = 1, 2, \ldots 9), \tag{8}$$

где

$$(L\varphi_i, L\varphi_j) = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} L\varphi_i(y_1y_2y_3)\, L\varphi_j(y_1y_2y_3)\, dy_1dy_2dy_3;$$

$$(\psi_1, L\varphi_i) = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \psi_1(y_1y_2y_3)\, L\varphi_i(y_1y_2y_3)\, dy_1dy_2dy_3;$$

$$L = \lambda_1 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \lambda_2 y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{B}{2}\left(\gamma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1} + \gamma_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right);$$

$$\psi_1 = -\varphi(y_1y_2y_3).$$

Система уравнений (8) дает возможность определить коэффициенты a_1, a_2, $a_4 \div a_8$. При решении оказывается, что $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Коэффициент a_3 также необходимо принять равным нулю ($a_3 = 0$) из условия прохождения поверхности переключения, определяемой выражением

$$\beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \beta_2 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} = 0$$

через начало координат. Чтобы найти коэффициент a_9, используем условие Сильвестра для функции $f_1(y_1y_2y_3)$. После того, как определим все коэффициенты $a_0 \div a_9$, запишем функцию потерь (7) и субоптимальный алгоритм управления

$$u_{01}(y) = -\operatorname{sign}\left(\beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \beta_2 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f_1}{\partial y_3}\right) =$$

$$= -\operatorname{sign}(K_{1y}y_1 + K_{2y}y_2 + K_{3y}y_3). \tag{9}$$

Коэффициенты K_{1y}, K_{2y}, K_{3y} находим в численном виде. В статье их не приводим из-за громоздкости аналитических выражений.

Применив к выражению (9) преобразование (5), находим субоптимальный алгоритм управления в исходной системе координат

$$u_{01}(x) = -\operatorname{sign}(K_1x_1 + K_2x_2 + K_3x_3). \tag{10}$$

Для параметров, характеризующих добычной участок ($\beta = 2{,}36$, $b_1 = -1{,}3$, $b_0 = 5{,}77$; $B = 5{,}7$; $\lambda_1 = -1{,}8$; $\lambda_2 = -0{,}56$), $K_1 = 2{,}25$; $K_2 = 3{,}6$; $K_3 = 60$.

Исследование переходных процессов в системе (1) при субоптимальном управлении (10) показало значительный выигрыш в критерии качества $J(X)$ по сравнению с неоптимальным управлением. В частности, вдвое сокращается время переходных процессов и практически исчезают «всплески» концентрации метана, характерные для неоптимального управления проветриванием добычных участков.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Волков. Постановка задач оптимального управления проветриванием шахт. Сб. «Механизация и автоматизация проветривания шахт». Под ред. А. Н. Щербаня. Изд-во ин-та техн. инф., Киев, 1965.

2. А. А. Волков, В. П. Чуберкис. Вероятностные методы анализа газодинамических процессов в системах оптимального управления проветриванием шахт. Сб. «Приборы и устройства средств автоматики и телемеханики». Изд-во ХГУ, Харьков, 1965.

3. А. А. Волков, И. П. Лыткин, Ю. Н. Соколов. Построение приближенных алгоритмов оптимального управления проветриванием добычных участков шахт. «Горные машины и автоматика». Изд-во «Недра», 1967, № 2.

4. Г. Е. Колосов, Р. Л. Стратонович. Об одном асимптотическом методе решения задач синтеза оптимальных регуляторов. «Автоматика и телемеханика», т. 25, № 12, 1964.

5. И. П. Лыткин. О построении оптимальных систем стабилизации при наличии случайных возмущений. Рефераты докладов I Всесоюзного симпозиума по статистическим проблемам в технической кибернетике. Изд-во НТО, 1967.

6. И. П. Лыткин. О синтезе оптимального управления при помощи метода наименьших квадратов. В кн. «Оптимальные системы автоматического управления». Под ред. А. М. Летова. Изд-во «Наука», 1966.