Б. К. ЛОПАТЧЕНКО, канд. техн. наук

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ МЕТРИКИ В БИНОКУЛЯРНОМ ЗРИТЕЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. *СООБЩЕНИЕ 2*

Для удобства математического описания свойств бинокулярного пространства введем некоторые определения.

Определение 1. Множество $M \subset R^3$ называется завершенным, если 1) M содержит не менее двух точек; 2) $u, v \in M$, то $u \bigcirc v \in M$; 3) $u, v \in M$, то $u * v \in M$; $v * u \in M$; 4) множество M — замкнутое.

Определение 2. Множество M называется «прямой», если оно завершенное и никакая его собственная часть не является завершенным множеством.

Определение 3. Множество M называется «плоскостью», если оно завершенное, не является «прямой» и не совпадает с R^3.

На основании условий 4—7 (см. сообщение 1) сформулируем следующие аксиомы:

Аксиома 1. Для любых точек $a, b \in R^3$ уравнение $a \bigcirc x = b$ однозначно разрешимо.

Аксиома 2. Для любых точек $a, b \in R^3$ справедливо равенство $a \bigcirc b = b \bigcirc a$.

Аксиома 3. Операция равноделения обладает свойством $a \bigcirc a = a$.

Аксиома 4. Операции внутреннего ($\bigcirc$) и внешнего ($*$) равноделения непрерывны на пространстве R^3.

С помощью операций равноделения построим некоторую конструкцию Г, которая может быть использована в качестве «прямой» и «плоскости».

Пусть $\{a, b, \ldots, l\}$ — конечное непустое множество точек в пространстве R^3. Положим

$$S_0(a, b, \ldots, l) = \{a, b, \ldots, l\}. \qquad (1)$$

Построим по индукции последовательность множеств $S_k(a, b, \ldots, l)$.

Пусть множество $S_k(a, b, \ldots, l)$ определено. Положим

$$S_{k+1}(a, b, \ldots, l) = \Big(\bigcup_{u,\, v \in S_k} (u \bigcirc v)\Big) \cup \Big(\bigcup_{u,\, v \in S_k} (u * v)\Big) \cup \Big(\bigcup_{u,\, v \in S_k} (v * u)\Big). \qquad (2)$$

Таким образом, по индукции определена последовательность множеств $S_0(a, b, \ldots, l)$, $S_1(a, b, \ldots, l)$, $S_2(a, b, \ldots, l)$, ..., $S_k(a,$

$b, \ldots, l)$, ... Для двух точек эта последовательность будет иметь вид

$$S_0(a, b) = \{a, b\};$$

$$S_1(a, b) = \{a, b, a \bigcirc b, a * b, b * a\};$$

$$S_2(a, b) = \{a, b, a \bigcirc b, a * b, b * a, a \bigcirc (a \bigcirc b), b \bigcirc (a \bigcirc b), a \bigcirc (b * a), b \bigcirc (a * b), b * (a * b), a * (b * a), (a \bigcirc b) * (a * b), (a \bigcirc b) * (b * a)\},$$

. . . .

Из аксиомы 3 следует, что $S_0(a, b, \ldots, l) \subset S_1(a, b, \ldots, l) \subset \ldots \subset S_k(a, b, \ldots, l) \subset \ldots$ Очевидно (из аксиомы 2), что $S_k(a, b, \ldots, l)$ не зависит от порядка точек $a, b, \ldots, l$.

Определение 4. Положим $S(a, b, \ldots, l) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} S_k(a, b, \ldots, l)$.

Определение 5. $\Gamma(a, b, \ldots, l) = \overline{S}(a, b, \ldots, l)$. Очевидно, $\Gamma(a, b, \ldots, l)$ не зависит от порядка точек $a, b, \ldots, l$. Так как $S_k(a, b, \ldots, l)$ не зависит от порядка точек, следовательно, и S не зависит от порядка и при замыкании это свойство не меняется. Множество $\Gamma(a, b, \ldots, l)$ непусто (оно содержит, например, точки $a, b, \ldots, l$).

Утверждение 1. Если $u, v \in \Gamma(a, b, \ldots, l)$, то $u \bigcirc v \in \Gamma(a, b, \ldots, l)$, $u * v \in \Gamma(a, b, \ldots, l)$.

Доказательство. Из определения 5 следует, что найдутся такие точки $u_k, v_k \in S_k(a, b, \ldots, l)$, что $\lim\limits_{k \to \infty} u_k = u$, $\lim\limits_{k \to \infty} v_k = v$. Тогда $u_k \bigcirc v_k \in S_{k+1}(a, b, \ldots, l)$ и $u_k * v_k \in S_k(a, b, \ldots, l)$, следовательно, $u_k \bigcirc v_k$, $u_k * v_k \in \Gamma(a, b, \ldots, l)$. Но в силу аксиомы 4 $\lim\limits_{k \to \infty} u_k \bigcirc v_k = u \bigcirc v$, $\lim\limits_{k \to \infty} u_k * v_k = u * v$ и $\Gamma(a, b, \ldots, l)$ — замкнуто. Следовательно, $u \bigcirc v$, $u * v \in \Gamma(a, b, \ldots, l)$.

Следствие 1. Если набор точек $e_1, e_2, \ldots, e_s \in \Gamma(a, b, \ldots, l)$, то $\Gamma(e_1, e_2, \ldots, e_s) \subset \Gamma(a, b, \ldots, l)$.

Утверждение 2. Если среди точек $a, b, \ldots, l$ есть хотя бы две различных, то множество $\Gamma(a, b, \ldots, l)$ — завершенное.

Доказательство. Свойства 1,4 (см. определение 1) вытекают из определения 5, а свойства 2, 3 — из утверждения 1.

Утверждение 3. Если M — завершенное множество и $a, b, \ldots, l \in M$, то $\Gamma(a, b, \ldots, l) \subset M$.

Доказательство. Точки $a, b, \ldots, l$ образуют некоторое множество $S_0(a, b, \ldots, l) \subset M$. Так как по условию множество M — завершенное, то в силу свойств 2 и 3 определения 1 можно построить последовательность вложенных множеств $S_0(a, b, \ldots, l \subset S_1(a, b, \ldots, l) \subset \ldots \subset S_k(a, b, \ldots, l) \subset S_{k+1}(a, b, \ldots, l) \subset \ldots \subset M$, где элемент $S_{k+1}(a, b, \ldots, l)$ определяется формулой (2).

Очевидно, для объединения множеств $S_k(a, b, \ldots, l)$ выполняется соотношение $S(a, b, \ldots, l) \subset M$. При замыкании это соотношение не изменится, т. е. $\overline{S}(a, b, \ldots, l) \subset \overline{M}$, но $\overline{M} = M$

в силу свойств замыкания), а $\bar{S}(a, b, \ldots, l) = \Gamma(a, b, \ldots, l)$ по определению 5, следовательно, $\Gamma(a, b, \ldots, l) \subset M$.

Аксиома 5. Если $c, d \in \Gamma(a, b)$ и $c = d$, то $a, b \in \Gamma(c, d)$.

Утверждение 4. Если $a \neq b$, то множество $\Gamma(a, b)$ есть «прямая».

Доказательство. Множество $\Gamma(a, b)$ — завершенное (согласно утверждению 2). Пусть множество $\Gamma(a, b)$ имеет собственную часть

$$M \subset \Gamma(a, b), \tag{3}$$

где M — завершенное. Так как M — завершенное множество, то из определения 1 (свойство 1) следует, что существует $c, d \in M$ и $c \neq d$. Точки $c, d \in \Gamma(a, b)$, так как M — его часть, следовательно, $a, b \in \Gamma(c, d)$ (из аксиомы 5). Множество $\Gamma(c, d)$ — завершенное (утверждение 2). Теперь на основании утверждения 3 могут быть записаны следующие соотношения:

$$\Gamma(a, b) \subset \Gamma(c, d); \tag{4}$$

$$\Gamma(c, d) \subset M. \tag{5}$$

Соотношения (3)—(5) могут иметь место только если $\Gamma(a, b) = M$, т. е. множество $\Gamma(a, b)$ — завершенное, и его завершенная собственная часть совпадает со всем множеством, следовательно, по определению 2 $\Gamma(a, b)$ — «прямая», что и требовалось доказать.

Следствие 2. Через любые две точки проходит «прямая».

Утверждение 5. Если M — «прямая», $a, b \in M$ и $a \neq b$, то $M = \Gamma(a, b)$.

Доказательство. Так как M — завершенное множество (по определению 2), то по утверждению 3 имеем $\Gamma(a, b) \subset M$. Если $\Gamma(a, b) \neq M$, то собственная часть множества M является завершенным множеством, что противоречит определению 2. Следовательно, $M = \Gamma(a, b)$.

Следствие 3. Через две различные точки проходит не более одной «прямой».

Следствие 4. На каждой «прямой» лежит по крайней мере две точки.

Утверждение 6. Если $a \neq b$ и $c \in \Gamma(a, b)$, то $a \bar{\in} \Gamma(a, b)$.

Доказательство. Пусть $a \in \Gamma(c, b)$. Тогда в силу аксиомы выполняется условие: если $a, d \in \Gamma(a, b)$ и $a \neq d$, то $b, c \in \Gamma(a, b)$. В нашем случае $a, b \in \Gamma(c, b)$ и $a = b$, следовательно, $c \in \Gamma(a, b)$, что противоречит нашему предположению.

Следствие 5. Пусть a, b, c — различные точки. Тогда эквивалентны следующие три условия:

$$c \bar{\in} \Gamma(a, b); \quad a \bar{\in} \Gamma(b, c); \quad b \bar{\in} \Gamma(a, c). \tag{6}$$

Определение 6. Пусть a, b, c — различные точки. Если справедливо хотя бы одно из условий (6), будем говорить, что точки не лежат на одной «прямой».

Следствие 6. Пусть a, b, c — различные точки. Тогда эквивалентны следующие три условия:

$$c \in \Gamma(a, b); \quad a \in \Gamma(b, c); \quad b \in \Gamma(a, c). \tag{7}$$

Определение 7. Пусть a, b, c — различные точки. Если справедливо одно из условий (7), будем говорить, что точки a, b, c лежат на одной прямой.

Определения 6 и 7 корректны в силу того, что в нашем случае «прямые» не зависят от порядка точек. Это следует из способа построения конструкции Γ.

Аксиома 6. Конструктивное множество Γ, построенное по трем точкам, не заполняет все пространство R^3, т. е. $\Gamma(a, b, c) \neq R^3$.

Утверждение 7. Если a, b, c — различные точки, не лежащие на одной «прямой», то $\Gamma(a, b, c)$ — «плоскость».

Доказательство. Из утверждения 2 следует, что $\Gamma(a, b, c)$ — завершенное множество. $\Gamma(a, b, c)$ — не «прямая», так как по условию теоремы a, b, c не лежат на одной «прямой». Из аксиомы 3 следует, что $\Gamma(a, b, c) \neq R^3$, следовательно, по определению 3 множество $\Gamma(a, b, c)$ — «плоскость».

Следствие 7. Через любые три точки проходит «плоскость».

Аксиома 7. Если a, b, c — различные точки и $d \bar{\in} \Gamma(a, b, c)$, то $\Gamma(a, b, c, d) = R^3$.

Утверждение 8. Если M — «плоскость», a, b, $c \in M$ и различны, то $M = \Gamma(a, b, c)$.

Доказательство. M — завершенное множество (по определению 3). Тогда из утверждения 3 следует

$$\Gamma(a, b, c) \subset M. \tag{8}$$

Пусть $M \neq \Gamma(a, b, c)$. Тогда из соотношения (8) заключаем, что существует точка $d \in M$, $d \bar{\in} \Gamma(a, b, c)$, и из аксиомы 7 имеем

$$\Gamma(a, b, c, d) = R^3. \tag{9}$$

Но a, b, c, $d \in M$, где M — завершенное, следовательно, из утверждения 3

$$\Gamma(a, b, c, d) \subset M. \tag{10}$$

Из выражений (9) и (10) имеем $M = R^3$, что противоречит определению 3.

Следствие 8. Через три различные точки проходит ровно одна «плоскость».

Следствие 9. Если a, $b \in M$, где M — «плоскость», то $\Gamma(a, b) \subset M$, т. е. вся прямая принадлежит «плоскости».

Следствие 10. Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной «плоскости».

Аксиома 8. Если две «плоскости» имеют общую точку, то они имеют, по крайней мере, еще одну общую точку.

Построим некоторое конструктивное множество Δ, которое будет использовано нами в качестве такого элемента зрительного пространства, как «отрезок». Пусть $a \neq b$ — некоторые фиксированные точки. Положим

$$T_0(a, b) = \{a, b\}. \tag{11}$$

Построим по индукции последовательность множеств T_k. Пусть множество $T_k(a, b)$ определено. Положим

$$T_{k+1}(a, b) = \bigcup_{u, v \in T_k} (u \bigcirc v). \tag{12}$$

Тогда образуется следующая последовательность множеств: $T_0(a, b) = \{a, b\}$; $T_1(a, b) = \{a, b, a \bigcirc b\}$; $T_2(a, b) = \{a, b, a \bigcirc b, a \bigcirc \bigcirc (a \bigcirc b), b \bigcirc (a \bigcirc b))$. . . . .
В силу аксиомы 3 эти множества вложены друг в друга: $T_0(a, b) \subset T_1(a, b) \subset T_2(a, b) \subset \ldots \subset T_k(a, b) \subset \ldots$

Определение 8. Положим $T(a, b) = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T_k(a, b)\right) \setminus T_0(a, b)$.

Определение 9. Положим $\Delta(a, b) = \overline{T}(a, b) \setminus T_0(a, b)$.

Таким образом, мы ввели некоторый открытый отрезок. По аксиоме 3 $T_1(a, b) = \{a\} = \{b\}$. Учитывая выражение (12), имеем $T_k = \{a\} = \{b\}$. По определению 8 $T(a, b) = T_0(a, b)$ и замыкание множества $T(a, b)$ также равно $T_0(a, b)$. По определению 9 $\Delta(a, b) = \varnothing$.

Справедливо и обратное утверждение: если $\Delta(a, b) = \varnothing$, то $a = b$. Действительно, из определения 9 вытекает, что $\overline{T}(a, в) \setminus T_0(a, b) = \varnothing$. Такое соотношение имеет место либо если $\overline{T}(a, b) = \varnothing$ и $T_0(a, b) = \varnothing$, либо если $\overline{T}(a, b) = T_0(a, b)$, но $T_0(a, b) \neq \varnothing$, так как в соответствии с выражением (11) содержит хотя бы одну точку, следовательно, справедливо $\overline{T}(a, b) = T_0(a, b)$. То есть разность $\bigcup_{k=0}^{\infty} T_k(a, b) \setminus T_0(a, b)$ равна $T_0(a, b)$. Это справедливо только тогда, когда $a = b$. Очевидно,

$$\Delta(a, b) \subset \Gamma(a, b), \tag{13}$$

так как из равенств (2) и (12) $T_k(a, b) \subset S_k(a, b)$. Учитывая определения 4 и 8, $T(a, b) \subset S(a, b)$, а в соответствии с определениями 5 и 9 $\Delta(a, b) \subset \Gamma(a, b)$. Очевидно,

$$\Delta(a, b) = \Delta(b, a) \tag{14}$$

в силу аксиомы 2.

Определение 10. Если $c \in \Delta(a, b)$, будем говорить, что точка c лежит между точками a и b или (что одно и то же) точка c лежит между точками b и a.

Очевидно, если $c \in \Delta(a, b)$, то a, b, c — различные точки (так как отрезок открытый) одной «прямой» [из свойства (13)].

Утверждение 9. Для любых точек a и c существует точка $b \in \Gamma(a, c)$ такая, что $c \in \Delta(a, b)$.

Доказательство. Положим $b = a * c$. Согласно утверждению 1 $b \in \Gamma(a, c)$ и из способа построения $\Delta(a, b)$ (формула (12) определения 8, 9) следует, что $a \bigcirc b \in \Delta(a, b)$.

Утверждение 10. Если $c \in \Delta(a, b)$, то $T(a, c) \subset \Delta(a, b)$.

Доказательство проведем индукцией по k. Пусть $c \subset \Delta(a, b)$, следовательно, по определению 9 существует последовательность точек $c_n \in T_{k(n)}(a, b)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Тогда $a \bigcirc c_n \in T_{k(n)+1}(a, b)$ и поскольку $a \bigcirc c_n \neq a$ и $a \bigcirc c_n \neq b$, $a \bigcirc c_n \in T_{k(n)+1}(a, b) \setminus T_0(a, b)$. Далее из способа построения $\Delta(a, b)$ вытекает соотношение $T_{k(n)+1}(a, b) \setminus T_0(a, b) \subset T(a, b) \subset \overline{T}(a, b) = \Delta(a, b) \cup T_0(a, b)$. Из аксиомы 4 следует $a \bigcirc c \in \overline{T}(a, b) = \Delta(a, b) \cup T_0(a, b)$. Так как $a \bigcirc c \neq a$ и $a \bigcirc c \neq b$ (поскольку иначе было бы $c = a * b$, что противоречит условию $c \in \Delta(a, b)$), то $a \bigcirc c \in \Delta(a, b)$. $T_0(a, c) \subset \Delta(a, b) \cup \{a\}$, пусть и $T_k(a, c) \subset \Delta(a, b) \cup \{a\}$. Положим $z = T_{k+1}(a, c)$, тогда $z = u \bigcirc v$, где $u, v \in T_k(a, c)$, но $T_k(a, c) \subset \Delta(a, b) \cup \{a\}$, следовательно, существуют точки u_n, v_n такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ и $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$; $u_n, v_n \in T_{k(n)}(a, b)$, тогда $u_n \bigcirc v_n \in T_{k(n)+1}(a, b) \subset \Delta(a, b)$. Из аксиомы 4 следует, что $u \bigcirc v \in \Delta(a, b) \cup T_0(a, b)$ и $z \in \Delta(a, b)$;

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} T_k(a, c) \subset \Delta(a, b) \cup \{a\}.$$

Из определения 8 вытекает $T(a, c) \subset \Delta(a, b) \setminus \{c\} \subset \Delta(a, b)$. Утверждение доказано.

Следствие 11. Если $c \in \Delta(a, b)$, то $\Delta(a, c) \subset \Delta(a, b)$.

Утверждение 11. Если $c \in \Delta(a, b)$ и $a \in \Delta(c, b)$, то $\Delta(a, b) = \Delta(c, b)$.

Доказательство. Если $c \in \Delta(a, b)$, из следствия 11 имеем $\Delta(c, b) \subset \Delta(a, b)$. Если $a \in \Delta(c, b)$, из следствия 11 имеем $\Delta(a, b) \subset \Delta(c, b)$, откуда $\Delta(a, b) = \Delta(c, b)$.

Аксиома 9. Если $\Delta(a, b) = \Delta(c, b)$, то $a = c$.

Следствие 12. Среди любых трех точек существует не более одной, лежащей между двумя другими.

Действительно, если $c \in \Delta(a, b)$ и $a \in \Delta(c, b)$, то в силу утверждения 11 и аксиомы 9 $a = c$, но это противоречит тому, что $c \in \Delta(a, b)$.

Аксиома 10. Пусть точки a, b, c не лежат на одной «прямой» и Γ — некоторая «прямая» $\Gamma \subset \Gamma(a, b, c)$, причем $a, b, c \in \Gamma$. Тогда, если $d \in \Delta(a, b)$, то либо $e \in \Delta(a, c)$, либо $e \in \Delta(b, c)$, где $d, e \in \Gamma$.

Определение 11. Будем говорить, что если $\Delta(a, b) \sim \Delta(c, d)$, то существует преобразование, при котором $\Delta(a, b) = \Delta(c, d)$.

Поскольку точки a, b однозначно определяют «отрезок» $\Delta(a, b)$, то, используя отношения эквивалентности (аксиомы 1—3) 1 для «отрезков», можно вывести следующие следствия из свойств «отрезков»:

Следствие 13. Если $a, b \in \Gamma(a, b)$, $a' \in \Gamma(a', b')$, то существует точка b' (или $b'' = a * b'$) такая, что $\Delta(a, b) \sim \Delta(a', b')$.

Следствие 14. Если $\Delta(a, b) \sim \Delta(e, d)$ и $\Delta(e, m) \sim \Delta(c, d)$, то $\Delta(a, b) \sim \Delta(e, m)$.

Следствие 15. Пусть $\Delta(a, b) \subset \Gamma(a, b)$, $\Delta(b, c) \subset \Gamma(a, b)$ и $\Delta(a, b) \cap \Delta(b, c) = \varnothing$. Пусть также $\Delta(a', b') \subset \Gamma(a', b')$, $\Delta(b', c') \subset \subset \Gamma(a', b')$ и $\Delta(a', b') \cap \Delta(b', c') = \varnothing$, тогда если $\Delta(a, b) \sim \Delta(a', b')$ и $\Delta(b, c) \sim \Delta(b', c')$, то $\Delta(a, c) \sim \Delta(a', c')$.

Для введения в пространство «углов» необходимо определить понятие «полупрямой». Пусть $a \neq b$ — некоторые фиксированные точки. Примем

$$P_0(a, b) = \{a, b\}. \tag{15}$$

Построим по индукции последовательность множеств $P_k(a, b)$. Пусть определено $P_k(a, b)$. Положим

$$P_{k+1}(a, b) = \Big(\bigcup_{u, v \in P_k} (u \bigcirc v)\Big) \cup \Big(\bigcup_{u, v \in P_k} (u * v)\Big). \tag{16}$$

Образуется следующая последовательность множеств:

$$P_0(a, b) = \{a, b\};$$

$$P_1(a, b) = \{a, b, a \bigcirc b, a * b\};$$

$$P_2(a, b) = \{a, b, a \bigcirc b, a * b, a \bigcirc (a \bigcirc b), b \bigcirc (a \bigcirc b); \\ a \bigcirc (a * b), b \bigcirc (a * b), b * (a * b)\};$$

. . . .

Из аксиомы 3 следует $P_0(a, b) \subset P_1(a, b) \subset \ldots \subset P_k(a, b) \subset \ldots$ Положим

$$P(a, b) = \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k(a, b). \tag{17}$$

Определим «полупрямую» следующим образом:

$$\gamma(a, b) = \overline{P}(a, b). \tag{18}$$

Определение 12. «Углом» назовем множество $\psi(b, a, c) = \gamma(a, b) \cup \gamma(a, c)$.

Аксиома 11. Пусть $\psi(b, a, c) \subset \Gamma(b, a, c)$ и $\Gamma(a, b) \subset \Gamma(a', b')$. Тогда существует «полупрямая» $\gamma(a', c')$ такая, что $\psi(b, a, c) \sim \sim \psi(b', a', c')$, а все внутренние точки плоскости, ограниченные «полупрямыми» «угла» $\psi(b', a', c')$ лежат по одну сторону от «прямой» $\Gamma(a', b')$.

Аксиома 12. Пусть a, b, c не лежат на одной «прямой» и a', b', c' не лежат на одной «прямой». Если при этом $\Delta(a, b) \sim \sim \Delta(a', b')$, $\Delta(a, c) \sim \Delta(a', c')$ и $\psi(b, a, c) \sim \psi(b', a', c')$, то $\psi(a, b, c) \sim \psi(a', b', c')$ и $\psi(a, c, b) \sim \psi(a', b', c')$.

Аксиома 13 (Архимеда). Пусть $\Delta(a, b)$ и $\Delta(c, d)$ — произвольные «отрезки». Тогда на «прямой» $\Gamma(a, b)$ существует ряд точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, расположенных так, что $a_1 \in \Delta(a, a_2)$, $a_2 \in \Delta(a_1, a_3)$ и т. д., причем $\Delta(a, a_1) \sim \Delta(c, d)$, $\Delta(a_1, a_2) \sim \Delta(c, d) \ldots \Delta(a_{n-1} a_n) \sim \sim \Delta(c, d)$ и $b \in \Delta(a, a_n)$.

Аксиома 14 (Кантора). Пусть на «прямой» $\Gamma(a, b)$ дана бесконечная последовательность отрезков $\Delta(a_1, b_1) \supset \Delta(a_2, b_2) \supset \ldots$ $\supset \Delta(a_n, b_n) \supset \ldots$ Пусть для любого отрезка $\Delta(c, d)$ найдется номер n, для которого $\Delta(a_n, b_n) \subset \Delta(a_k, b_k) \sim \Delta(c, d)$. Тогда существует точка $x \in \Gamma(a, b)$, лежащая внутри всех «отрезков», то есть $x \in \Delta(a_n, b_n)$ при $n \to \infty$.

Введенная система аксиом порождает абсолютную геометрию. Добавление к ней некоторой аксиомы параллельности приводит либо к евклидовому пространству, либо к пространству Лобачевского. В качестве указанной аксиомы используем свойство средней линии треугольника. В используемых нами операциях она будет иметь следующий вид:

Аксиома 15. Пусть a, b, c — различные точки, не лежащие на одной «прямой». Тогда найдется точка $l \in \Delta(a, a \bigcirc c)$ (либо $l' \in \Delta(c, a \bigcirc c)$) такая, что $\Delta(a \bigcirc b, b \bigcirc c) \sim \Delta(a, l)$ (либо $\Delta(a \bigcirc b, b \bigcirc c) \sim \Delta(a, l')$).

Изложенная аксиоматика удовлетворяет требованиям непротиворечивости и полноты, поскольку по ходу ее введения в качестве следствий получены все аксиомы Гильберта. Экспериментальная проверка аксиом сводится к построению в физическом пространстве «прямых», «плоскостей», «углов» и «отрезков» и оценка точности выполнения над ними отношений, предусмотренных аксиомами. Анализ психофизических экспериментов по проверке аксиом позволяет сделать вывод о том, что метрика воспринимаемого бинокулярного зрительного пространства есть метрика Лобачевского.