

УДК 538.574

С. И. ЛАПТА, канд. физ.-мат. наук

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ОТРЕЗКА СПИРАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕГО
ВОЛНОВОДА ПРОДОЛЬНЫМ ДИПОЛЕМ, РАСПОЛОЖЕННЫМ
НА ЕГО ОСИ**

Исследование рассеяния электромагнитных волн на отрезке спирального волновода представляет интерес как для электроники СВЧ, так и для антенной техники. Однако до последнего времени не удавалось решить задачу со спиральной структурой конечной длины.

Представлено математически обоснованное решение задачи о дифракции на отрезке спирально проводящего волновода (спирально проводящее кольцо) электромагнитных полей, возбуждаемых электри-

ческим (магнитным) диполем, который расположен на его оси, с моментом, ориентированным вдоль нее и гармонически изменяющимся во времени по закону $e^{-i\omega t}$ ($\omega = ck$). Стенка кольца предполагается бесконечно тонкой и идеально проводящей в спиральном и непроводящей в перпендикулярном к нему направлении. Эта задача обладает аксиальной симметрией.

Рассмотрим сначала случай электрического диполя. Введем цилиндрическую систему координат ρ, φ, z с осью Oz , совпадающей с осью кольца, и центром O , равноудаленным от его кромок. Пусть d — ширина кольца, $2a$ — его диаметр, p — момент диполя, который помещен в точке M ($\rho = 0, z = z_0$), τ — направление спиральной проводимости, составляющее с плоскостью $z = \text{const}$ угол ψ .

Поле диполя в присутствии кольца удобно искать с помощью электрического и магнитного векторов Герца с единственными отличными от нуля z -составляющими, которые представим так:

$$\Pi^e(\rho, z) = \Pi_0^e(\rho, z) + \Pi_1^e(\rho, z),$$

$$\Pi^m(\rho, z) = \Pi_1^m(\rho, z),$$

где $\Pi_0^e(\rho, z) = p \frac{e^{ikR}}{R}$ соответствует диполю в свободном пространстве, а Π_1^e и Π_1^m — рассеянному полю, $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$.

Функции Π_1^e и Π_1^m должны удовлетворять уравнению Гельмгольца всюду вне кольца, условию на бесконечности в форме принципа предельного поглощения и быть такими, чтобы определяемое посредством их электромагнитное поле удовлетворяло граничному условию на кольце и условию конечности энергии в любой ограниченной области. Будем их искать в виде

$$\Pi_1^e(\rho, z) = \frac{p}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \left\{ \begin{array}{l} H_0^{(1)}(g) J_0\left(g \frac{\rho}{a}\right) \\ J_0(g) H_0^{(1)}\left(g \frac{\rho}{a}\right) \end{array} \right\} e^{is \frac{z}{a}} ds,$$

$$\Pi_1^m(\rho, z) = -i \frac{p}{a} \kappa \operatorname{ctg} \psi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)}{g} \left\{ \begin{array}{l} H_1^{(1)}(g) J_0\left(g \frac{\rho}{a}\right) \\ J_1(g) H_0^{(1)}\left(g \frac{\rho}{a}\right) \end{array} \right\} e^{is \frac{z}{a}} ds,$$

который уже учитывает удовлетворение уравнению Гельмгольца при $\rho < a$ и $\rho > a$, непрерывность тангенциальных составляющих вектора электрического поля на поверхности $\rho = a$ и отсутствие проводимости стенки кольца в направлении, перпендикулярном к спиральному. Здесь в фигурных скобках следует брать верхнюю строчку при $\rho < a$ и нижнюю при $\rho > a$; $J_n(y)$, $H_n^{(1)}(y)$ — функции Бесселя 1-го и 3-го рода соответственно; $g = \sqrt{\kappa^2 - s^2}$, причем $Jmg > 0$ при $|s| \rightarrow \infty$ вдоль вещественной оси; $\kappa = ka$.

Зная функцию $x(s)$, по известным формулам получаем рассеянное поле во всем пространстве. В частности, в дальней зоне рассеянное

поле представляет собой сферическую волну с составляющими в сферической системе координат r, θ, φ с центром в точке O и углом θ , отсчитываемым от оси Oz :

$$E_{\theta}^1 = H_{\varphi}^1 = i \frac{2p}{a^2} \kappa^2 \sin \theta x (\kappa \cos \theta) J_0(\kappa \sin \theta) \frac{e^{i\kappa r}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right);$$

$$E_{\varphi}^1 = -H_{\theta}^1 = -\frac{2p}{a^2} \kappa^2 \operatorname{ctg} \psi x (\kappa \cos \theta) J_1(\kappa \sin \theta) \frac{e^{i\kappa r}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Плотность поверхностного тока на кольце при этом имеет вид

$$j_{\tau} = -\frac{c\kappa p}{2\pi^2 a^3} \operatorname{cosec} \psi \int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{is \frac{z}{a}} ds.$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя искомая функция $x(s)$ есть преобразование Фурье плотности поверхностного тока на кольце и, следовательно, полностью определяет энергетические характеристики рассеянного поля.

Функция $x(s)$ — целая функция экспоненциального типа. Поэтому в рассеянном поле в дальней зоне в определенных направлениях присутствует только θ -либо только φ -поляризация. Так, единственная θ -поляризация рассеянного поля наблюдается в направлениях, определяемых углами

$$\theta_n = \arcsin \frac{\mu_n}{\kappa}$$

(μ_n — n -й корень функции Бесселя $J_1(y)$, $n = 1, 2, 3, \dots$).

В направлениях $\tilde{\theta}_n$, для которых

$$\sin \tilde{\theta}_n = \frac{\nu_n}{\kappa}$$

(ν_n — n -й корень функции Бесселя $J_0(y)$, $n = 1, 2, 3, \dots$; $\kappa > \nu_1$), присутствует только φ — поляризация поля.

Обращение в нуль спиральной составляющей полного электрического поля на поверхности кольца и отсутствие токов на ее дополнении до бесконечно длинного цилиндра приводят к следующей системе парных интегральных уравнений, которым должна удовлетворять искомая функция $x(s)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s) [g^2 J_0(g) H_0^{(1)}(g) + \kappa^2 \operatorname{ctg}^2 \psi J_1(g) H_1^{(1)}(g)] e^{is \frac{z}{a}} ds =$$

$$= -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) e^{i \frac{g}{a}(z-z_0)} ds, \quad |z| < \frac{d}{2}; \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s) e^{is \frac{z}{a}} ds = 0, \quad |z| > \frac{d}{2}. \quad (2)$$

Здесь использовано также известное разложение в интеграл Фурье функции

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{i}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\left(g \frac{\rho}{a}\right) e^{i \frac{s}{a}(z-z_0)} ds$$

и выражение для вронскиана функций Бесселя.

Для нахождения решения системы парных интегральных уравнений (1), (2) удобно свести ее на основе метода, предложенного в работе [1], к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода. Для этого продифференцируем уравнение (2) по z и обозначим

$$g^2 J_0(g) H_0^{(1)}(g) + \kappa^2 \operatorname{ctg}^2 \psi J_1(g) H_1^{(1)}(g) = \frac{i|s|}{\pi} [1 - \varepsilon(s)].$$

При этом получим, с точностью до другого $\varepsilon(s)$, уравнения вида, уже рассмотренного в работе [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(s) |s| [1 - \varepsilon(s)] e^{i s \frac{z}{a}} ds = - \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) e^{i \frac{s}{a}(z-z_0)} ds,$$

$$|z| < \frac{d}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(s) s e^{i s \frac{z}{a}} ds = 0, \quad |z| > \frac{d}{2},$$

$$\varepsilon(s) = O(s^{-2}).$$

Используя метод [1], эту систему сводим к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода:

$$x(s) = \eta \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{|t|}{t} \varepsilon(t) V_{\eta t}^{\eta s} dt - \eta \frac{\pi}{2s} \int_{-\infty}^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) e^{-it \frac{z_0}{a}} V_{\eta t}^{\eta s} dt,$$

(3)

где

$$\eta = \frac{d}{2a}; \quad V_{\lambda}^{\mu} = \frac{\lambda}{2(\mu - \lambda)} [J_0(\lambda) J_1(\mu) - J_0(\mu) J_1(\lambda)].$$

Решение этого уравнения аналогично [3] можно получить одним из численных методов в широкой области изменения параметров задачи. При этом погрешность, возникающую при замене (3) уравнением с конечными пределами интегрирования, нетрудно оценить, если учесть эквивалентность (3) системе (1), (2).

Второй способ решения уравнения (3) основан на методе последовательных приближений. Аналогично [2] можно показать, что для нормы интегрального оператора уравнения (3) справедлива оценка

$$\|K\| < C\eta (1 + \kappa |\ln \kappa|^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \psi),$$

где C — постоянная.

Следовательно, если ширина кольца достаточно мала по сравнению с его диаметром и с длиной волны либо шагом намотки спирали, $\|K\| \ll 1$

и можно пользоваться методом последовательных приближений. Ограничиваясь первым приближением, получаем для функции $x(s)$ то же выражение, что и в работе [2] со сплошным кольцом:

$$x(s) = -\eta \frac{\pi}{2} C_1 \frac{J_1(\eta s)}{s} + \eta^2 \frac{\pi i}{4} C_2 \frac{J_2(\eta s)}{s} + O(\eta^4 \ln \eta),$$

$$C_1 = \int_0^{\infty} g^2 H_0^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} dt = -ia^3 \left(\frac{d^2}{dz_0^2} + k^2 \right) \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \Big|_{\rho=a, z=0},$$

$$C_2 = -a \frac{d}{dz_0} C_1.$$

При этом плотность поверхностного тока с точностью $O(\eta^3 \ln \eta)$ имеет вид

$$j_r^p = \eta \frac{c\kappa\rho}{2\pi a^3} \operatorname{cosec} \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{a^2}} \left(C_1 + C_2 \frac{z}{2a} \right) =$$

$$= -i\eta \frac{c\kappa}{2\pi} \operatorname{cosec}^2 \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{a^2}} \left(1 - \frac{z}{2} \frac{d}{dz_0} \right) \bar{E}_r^{op}.$$

Здесь \bar{E}_r^{op} — спиральная составляющая электрического вектора поля источника при $\rho = a$, $z = 0$.

В случае магнитного диполя задача решается аналогично, причем она сводится к такой же системе парных интегральных уравнений (1), (2), но с другой правой частью:

$$\frac{\kappa^2}{2} \operatorname{ctg} \psi \int_{-\infty}^{\infty} g H_1^{(1)}(g) e^{-i\frac{g}{a}(z-z_0)} ds,$$

затем к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, которое отличается от (3) свободным членом:

$$-i\eta \frac{\pi m}{2s} \operatorname{ctg} \psi \int_{-\infty}^{\infty} g H_1^{(1)}(g) e^{-it\frac{z_0}{a}} V_{\eta s}^{\eta t} dt.$$

Его приближенное решение:

$$x^m(s) = -\eta \frac{\pi i}{2} C_3 \kappa \operatorname{ctg} \psi \frac{J_1(\eta s)}{s} - \eta^2 \frac{\pi}{4} C_4 \kappa \operatorname{ctg} \psi \frac{J_2(\eta s)}{s} + O(\eta^4 \ln \eta),$$

где

$$C_3 = \int_0^{\infty} g H_1^{(1)}(g) \cos t \frac{z_0}{a} dt = ia^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \Big|_{\rho=a, z=0}, C_4 = -a \frac{d}{dz_0} C_3.$$

Плотность поверхностного тока соответственно равна с точностью $O(\eta^3 \ln \eta)$

$$j_r^m = i\eta \frac{c\kappa^2 m}{2\pi a^3} \operatorname{cosec}^2 \psi \cos \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{a^2}} \left(C_3 + C_4 \frac{z}{2a} \right) =$$

$$= -i\eta \frac{c\kappa}{2\pi} \operatorname{cosec}^2 \psi \sqrt{1 - \frac{4z^2}{a^2}} \left(1 - \frac{z}{2} \frac{d}{dz_0} \right) \bar{E}_r^{om},$$

где m — величина момента магнитного диполя; \vec{E}_τ^{Om} — спиральная составляющая электрического вектора поля магнитного диполя при $\rho = a, z = 0$.

Сопоставляя эти приближенные решения с решениями задач возбуждения сплошного узкого кольца электрическим и магнитным дipoлями [2], приходим к следующим выводам.

Если в случае сплошного кольца возбуждение электрическим и магнитным диполями совершенно различно, как по краевым особенностям поверхностного тока, так и по поляризации и интенсивности рассеянного поля, при спиральной проводимости ($\psi \neq 0$) рассеянное поле содержит одновременно обе Θ - и Φ -поляризации (соотношение между ними определяется углом ψ), его интенсивность не зависит от вида источника и определяется спиральной составляющей электрического вектора поля источника на кольце. Характер рассеяния поля спирально проводящим кольцом, в том числе и характер краевых особенностей поверхностного тока, — того же типа, что и при возбуждении сплошного кольца электрическим диполем.

Следует отметить, что приведенное решение не допускает предельного перехода $\psi \rightarrow 0$, т. е. из него нельзя получить решение задачи возбуждения магнитным диполем сплошного кольца, которое имеет качественно иной характер [2].

Список литературы: 1. Сологуб В. Г. О решении одного интегрального уравнения типа свертки с конечными пределами интегрирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 837—854. 2. Ланга С. И., Сологуб В. Г. Возбуждение отрезка круглого волновода продольным диполем, расположенным на его оси // Радиотехника. 1974. Вып. 30. С. 146—155. 3. Ланга С. И., Мисюра Н. Н., Сологуб В. Г. Исследование рассеивающих свойств цилиндрических экранов в резонансной области // Распространение и дифракция радиоволн в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах: Сб. науч. тр. К., 1984. С. 146—155.

Поступила в редколлегию 13.06.88