

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МНОГОПРОВОДНОЙ ЛИНИИ СО СКРУТКОЙ ПРОВОДНИКОВ

К. К. Абрамов

Киевский институт автоматики

Одним из критериев, влияющих на надежность работы телемеханических каналов связи, является степень однородности электрических параметров кабельных цепей. Достаточно точное решение задачи об электромагнитном поле многопроводной линии-кабеля закладывает основу для изучения необходимых зависимостей.

До последнего времени в связи со значительными математическими трудностями электромагнитное поле кабелей с учетом скрутки не исследовалось: решались задачи о поле линии с параллельными проводниками. Подобное упрощение исключает из поля зрения продольное магнитное поле линии и, таким образом, некоторые свойства линии остаются неисследованными.

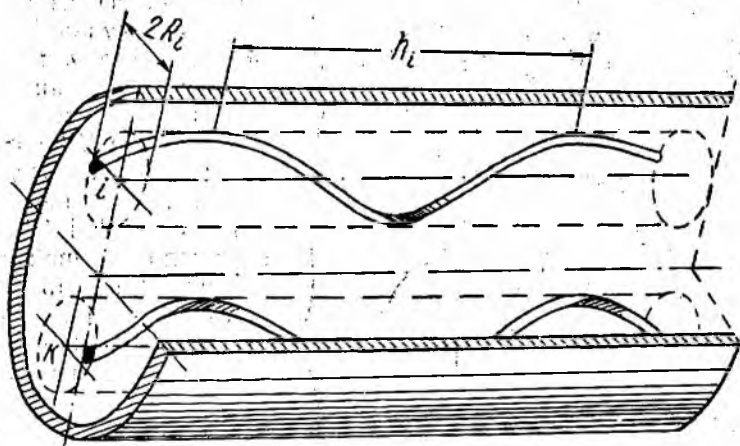


Рис. 1. Линия со скруткой проводников.

Нельзя утверждать, конечно, что поля спиральных линий не рассматривались совершенно. Даже наоборот, спиральным линиям, а также спиральным волноводам посвящено много работ, решения в которых искались, однако для одиночных спиралей или для нескольких спиралей при условии их соосности [2], [3].

Цель данной работы — составить и дать методику решения задачи об электромагнитном поле многопроводной линии с учетом скрутки и произвольного расположения ее проводников (рис. 1).

Общие решения

В цилиндрических координатах составляющие напряженностей электрического поля (E) и магнитного поля (H) определяются через два вектора Герца, которые направлены вдоль оси линии z . Это электрический вектор Герца $\Pi^{(e)}$ и магнитный вектор Герца $\Pi^{(m)}$ (5).

$$\begin{aligned} E &= \text{grad} \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial z} - \mu' \epsilon' \Pi^{(e)} e_z - \mu \text{rot} \Pi^{(m)} e_z; \\ H &= \epsilon^1 \text{rot} \Pi^{(e)} e_z + \text{grad} \frac{\partial \Pi^{(m)}}{\partial z} - \mu' \epsilon' \Pi^{(m)} e_z; \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\mu' = i\omega\mu, \quad \epsilon' = \epsilon + i\omega\epsilon.$$

Векторы $\Pi^{(e)}$ и $\Pi^{(m)}$ удовлетворяют волновому уравнению (рис. 2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} &= k^2 \Pi; \\ k^2 &= \mu' \epsilon'. \end{aligned} \quad (2)$$

Частным решением уравнения (2) является произведение:

$$Z_n(\sqrt{k^2 - p^2} \rho) e^{in\varphi} e^{pz}, \quad (3)$$

где Z_n — одна из модифицированных функций Бесселя n -го порядка, n и p — произвольные постоянные.

От угла φ поле зависит периодически $\Pi(\varphi) = \Pi(\varphi + 2\pi) = \dots$, поэтому n принимает только целые значения $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Постоянная p , с одной стороны, должна учитывать периодичность изменения поля, а с другой стороны — затухание и фазовые изменения. Шаги скрутки в кабелях стремятся выбирать так, чтобы образовывались секции симметрии (длиной H), причем H не превышает нескольких

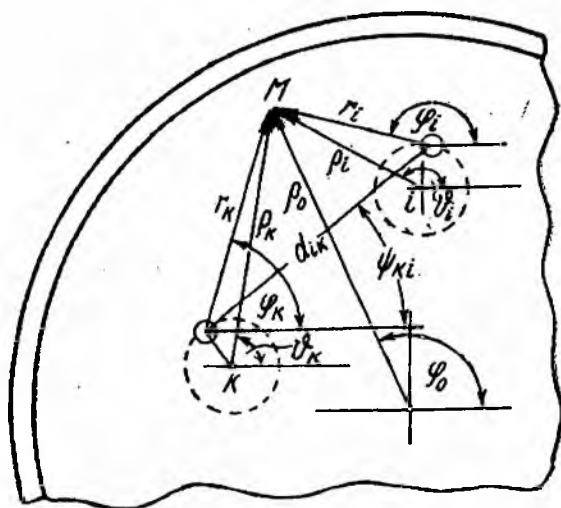


Рис. 2. Линия и системы координат.

метров. Следовательно, e^{pz} представляет произведение периодической функции, имеющей относительно большую скорость изменения по z , и функции изменяются по длине медленно.

$$e^{pz} = e^{imgz} \cdot e^{-\gamma z}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

Общее решение записывается как двойная сумма решений (4), причем суммирование по n и по m выполняется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим возможность упрощения общего решения для хорошо проводящих сред (металлы). Длины шагов скрутки кабельных групп лежат в пределах $0,100 \div 0,300$ м, поэтому величина $g_{\max} = 2\pi/h$ составляет $62,8 \div 21,01/\text{м}$. Величина $k = \sqrt{i\omega\mu\sigma}$ для металлов зависит от частоты и, в частности, для меди принимает значения, сведенные в табл. 1.

Поскольку $|k| \gg 2\pi/h$, аргументы функций Бесселя можно заменить их приближенными значениями (kr).

Обратимся к общему решению для диэлектрика. В изолирующей среде аргумент $k_1^2 = \mu'\epsilon'$ имеет такой же порядок, что и γ^2 . По сравнению с $2\pi/h$ ими можно пренебречь и поэтому аргументами функций Бесселя можно считать величины mgr .

Чтобы выяснить возможность замены I_n и K_n их первыми членами разложения в степенной ряд, произведем расчет численных значений аргументов для разных областей поперечного сечения кабеля (табл. 2). Зна-

Таблица 2

	1	2	5	10
$\sum$ $\rho = 0,6$	0,04	0,08	0,2	0,4
$\sum$ $\rho = 3,6$	0,24	0,48	1,2	2,4
$\sum$ $\rho = 2,4$	1,6	3,2	8,0	16,0

чения ρ взяты соответственно равными радиусу проводника, радиусу группы и расстоянию между двумя наиболее удаленными точками сечения высокочастотного кабеля.

Из табл. 2 следует, что замена возможна только вблизи поверхности проводника, а с некоторой натяжкой — и в границах области, занимаемой группой. В общем же случае замена невозможна и, определяя поле, наводимое токами цепей одной группы вблизи поверхности проводников другой группы, необходимо пользоваться точными значениями функций Бесселя. Записывая общие решения для функций поля диэлектрика, следует учесть, что источниками поля являются токи в проводниках и в оболочке (первичные или наведенные вихревые) и при удалении от поверхности провода или оболочки такое поле убывает.

Поле, наведенное токами проводников, при этом должно описываться частными решениями вида

$$B_{ni} K_n(mgr_i) e^{i(nv + mgz)} - \gamma z, \quad (5)$$

а поле оболочки — решениями вида

$$A_{n0} I_n(mgr_i) e^{i(nv + mgz)} - \gamma z, \quad (6)$$

A_{n0} и B_{ni} — постоянные интегрирования.

Электромагнитное поле спиральной нити

Магнитное поле спиральной нити, описанное в работе [2], может служить отправным моментом для решения данной задачи. В этой работе магнитное поле Г. Бухгольца определил как поле постоянного тока или стационарного переменного тока. Для бесконечно длинной спирали им найдена продольная составляющая векторного потенциала

$$A_z = -\frac{\mu' I}{2\pi} \left\{ \ln \rho + C + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(ngR) K_n(ng\rho) \cos n(v - gz) \right\} \quad (7)$$

и продольная составляющая вектора напряжения магнитного поля

$$B_z = -\operatorname{tg} \alpha \frac{dA_z}{dR}, \quad \text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi R}{h}. \quad (8)$$

В связи с тем, что электромагнитные процессы в кабелях связи протекают при условии квазистационарности, эти выражения будут верны и в нашем случае, если заменить постоянный ток I на ток $I_0 e^{i(\omega t - \gamma z)}$.

Осевые составляющие A_z и B_z просто связываются с векторами Герца $\Pi^{(e)}$ и $\Pi^{(m)}$:

$$A_z = \mu \varepsilon \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial t}, \quad \frac{1}{\mu} B_z = \frac{\partial^2 \Pi^{(m)}}{\partial t^2} - \mu' \varepsilon' \Pi^{(m)}, \quad (9)$$

откуда последние и находятся:

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)} &= -\frac{I}{2\pi \varepsilon'} \left\{ \ln r + C + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I'_n (ngR) K_n(ng\rho) \cos n(\nu - gz) \right\}; \\ \Pi^{(m)} &= -\frac{I}{2\pi \varepsilon'} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\gamma} \left\{ \frac{dC}{dR} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} ng I'_n (ngR) K_n(ng\rho) \cos n(\nu - gz) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения для нахождения постоянных интегрирования в подобных задачах составляются как результат выполнения граничных условий, причем граничным уравнениям следует придать «удобную форму». В частности, функции поля на границе раздела разлагаются в ряд по гармоническим функциям координатного угла. Таким образом, для получения практических решений нужно уметь преобразовывать функции, записанные в координатах ρ, ν , в координатах ρ_k, ν_k или ρ_0, ν_0 и разлагать эти функции в гармонический ряд.

Такие операции выполнимы, если воспользоваться теоремой сложения цилиндрических функций [4]. При этом для функций I_n и K_n существуют следующие соотношения:

а) $\rho_k < d_{ik}$

$$\begin{aligned} I_n(k\rho_i) e^{\pm i\nu_i} &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n-\nu} I_{n-\nu}(kd_{ik}) I_{\nu}(k\rho_k) e^{\pm i(n-\nu)\psi_{ki} \pm i\nu_0 k}; \\ K_n(k\rho_i) e^{\pm i\nu_i} &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^n K_{n+\nu}(kd_{ik}) I_{\nu}(k\rho_k) e^{\pm i(n+\nu)\psi_{ki} \pm i\nu_0 k}; \end{aligned} \quad (11)$$

б) при $\rho_k > d_{ik}$

$$\begin{aligned} I_n(k\rho_i) e^{\pm i\nu_i} &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu} I_{\nu}(kd_{ik}) I_{n+\nu}(k\rho_k) e^{\mp i\nu\psi_{ki} \pm i(n+\nu)\psi_k}; \\ K_n(k\rho_i) e^{\pm i\nu_i} &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} I_{\nu}(kd_{ik}) K_{n+\nu}(k\rho_k) e^{\mp i\nu\psi_{ki} \pm i(n+\nu)\psi_k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тангенциальные составляющие напряженностей

С помощью равенств (1) можно найти вблизи поверхности каждого проводника продольные и поперечные составляющие электрического и магнитного полей. Однако они еще не будут касательными по отношению

к поверхности проводника. Искомые составляющие несколько повернуты и могут быть получены, если спроектировать E и H на поверхность проводника:

$$\begin{aligned} E_{z'} &= E_z \cos \alpha + E_r \sin(\alpha \sin \varphi) + E_\varphi \sin(\alpha \cos \varphi); \\ E_{r'} &= -E_z \sin \alpha \cdot \sin \varphi + E_r \cos(\alpha \sin \varphi); \\ E_{\varphi'} &= -E_z \sin \alpha \cos \varphi + E_\varphi \cos(\alpha \cos \varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Составляющие $H_{z'}$, $H_{r'}$, $H_{\varphi'}$, удовлетворяют аналогичным равенствам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После выполнения граничных условий и нахождения постоянных интегрирования будет, как и в работе [1], получена система уравнений, связывающая токи проводников. Коэффициенты при токах в этой системе — конкретные формулы для расчета частичных параметров линии в зависимости от ее геометрии, в частности, параметров скрутки частоты и физических свойств материала.

Результаты решения подобной задачи открывают большие возможности для исследования различных особенностей, наблюдающихся при протекании электромагнитных процессов в кабелях, в частности, для определения точных и вероятностных зависимостей собственных и взаимных параметров кабелей от разброса диаметров проводов различных натяжений при скрутке, толщин изоляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. К. Абрамов, А. А. Ильин. Определение частотных параметров контактной сети шахты, Изд-во СО АН СССР, 1959, № 9.
2. Г. Бухгольц. Расчет электрических и магнитных полей, Госэнергоиздат, М., 1961.
3. И. И. Гроднев, К. Я. Сергейчук. Экранирование аппаратуры и кабелей связи, Связьиздат, М., 1960.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1963.
5. Дж. А. Страттон. Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.-Л., 1948.