

## ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МИКРОПОЛОСКОВЫХ УСТРОЙСТВ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОВЕРХНОСТНЫМ ИМПЕДАНСОМ

### 1 Введение

В последние несколько лет заметно возрос интерес к нелинейным эффектам, возникающим в микрополосковых устройствах. Это вызвано широким применением высокотемпературных сверхпроводящих (ВТСП) материалов в СВЧ технике [1]. В стремлении улучшить качественные характеристики электронных систем и систем телекоммуникаций все чаще применяются планарные структуры, изготовленные на основе ВТСП. Плотность тока в таких устройствах достаточно велика, и даже слабая нелинейность поверхностного импеданса может стать причиной серьезных нелинейных искажений сигнала. Таким образом, при разработке элементов с применением ВТСП необходимо учитывать нелинейность параметров материала. Основная сложность анализа состоит в том, что нелинейность носит распределенный характер.

На сегодняшний день известно несколько подходов к анализу СВЧ устройств с нелинейным поверхностным импедансом. Так, например, в [2] авторы используют для описания микрополосковой структуры телеграфные уравнения и предлагают аппроксимировать потери в сверхпроводящей линии передачи степенным рядом вида

$$R_1(t) = \sum_{n=0}^N a_n [I(t)]^n, \quad (1)$$

где  $N$  – число слагаемых ряда, необходимых для адекватного описания явления. В [3] авторами помимо аппроксимации вида (1) используется аналогичное представление зависимости распределенной индуктивности от поверхностного тока в проводнике. Однако указанные методы не учитывают всех волновых процессов, происходящих в сложных структурах с распределенными параметрами.

В этой работе предложено применить общий подход к анализу устройств, проводники которых обладают нелинейными свойствами, заключающийся в решении уравнений Максвелла совместно с применением эффективных методов упрощения исходной задачи для случая микрополосковых структур. Это позволит избежать указанных ранее недостатков и расширить круг решаемых задач в сторону усложнения конфигурации анализируемых микрополосковых устройств.

Отсутствие эффективных аналитических методов решения системы дифференциальных уравнений приводит к необходимости использовать численные методы, интенсивное внедрение которых в инженерную практику стало возможным лишь в последние годы в связи с расширением парка высокопроизводительных ЭВМ. Однако переход от системы дифференциальных уравнений к системе уравнений в конечных разностях сопровождается появлением погрешности аппроксимации искомых зависимостей. Уменьшая шаг дифференцирования, теоретически можно получить численное решение, сколь угодно близкое к аналитическому, однако это приводит к значительному увеличению числа шагов дифференцирования, что в свою очередь усиливает влияние ошибок округления из-за конечной точности ЭВМ. К тому же, если значения исходной функции заданы с некоторой ошибкой, то дифференцирование функции приводит к усилению влияния ошибки, причем тем значительнее, чем выше порядок определяемой производной. Этому недостатка лишены методы численного интегрирования. Даже наоборот – интегрирование функции приводит к уменьшению влияния ошибки, причем, тем значительнее, чем выше кратность определяемого

интеграла. В связи с этим целесообразно представлять математическую модель исследуемой структуры в виде системы интегральных уравнений.

При анализе реальных СВЧ устройств с помощью ЭВМ необходимо быть уверенным в устойчивости искомого решения, поскольку применение численных методов к практическим задачам анализа электродинамических структур связано с проблемой сходимости к решению, и улучшить характеристику метода интегрирования можно грамотным выбором шага интегрирования.

## 2 Вывод расчетных соотношений

Предположим, что в однородном изотропном пространстве с параметрами  $(\epsilon_0, \mu_0)$  расположено тело объемом  $V_1$  (рис. 1), на поверхности  $S$  которого мгновенные значения тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического  $\vec{E}(q, t)$  и магнитного  $\vec{H}(q, t)$  полей связаны соотношением

$$\vec{n}_q \times \vec{E}(q, t) = -\hat{Z}\{\vec{n}_q \times \vec{H}(q, t)\} \quad (2)$$

или 
$$\vec{J}^M(q, t) = \hat{Z}\{\vec{J}^{\mathcal{O}}(q, t)\} \quad (3)$$

в эквивалентном виде.

Здесь:  $\vec{n}_q$  – внешняя нормаль к поверхности тела в точке  $q$ ;  $\vec{J}^M(q, t) = \vec{E}(q, t) \times \vec{n}_q$ ,  $\vec{J}^{\mathcal{O}}(q, t) = \vec{n}_q \times \vec{H}(q, t)$  – мгновенные значения эквивалентных поверхностных токов;  $\hat{Z}\{\cdot\}$  – нелинейный оператор, описывающий нелинейные свойства поверхностного импеданса. Поверхность предполагается гладкой. В объеме  $V^{ct}$  заключены сторонние источники  $J^{a, ct}$  и (или)  $J^{m, ct}$ , создающие в точке  $q$  на поверхности  $S$  напряженности полей  $E^i(q, t)$ ,  $H^i(q, t)$ . Требуется определить поле в пространстве вне  $V_1$ , то есть в области  $V_2$ . Для точного определения  $\hat{Z}\{\cdot\}$  в общем случае необходимо решить граничную задачу в строгой постановке. Однако в этом нет необходимости. Можно определить оператор  $\hat{Z}\{\cdot\}$  либо из решения той или иной ключевой задачи, либо в целом ряде случаев, учитывая геометрию задачи, степень, вид нелинейности и т.п. Исходя из этого на всех этапах рассмотрения задачи мы стремимся не уточнять вид оператора  $\hat{Z}\{\cdot\}$  и используем выражения (2) или (3) для определения граничных условий.

Традиционно для решения уравнений Максвелла используются вспомогательные функции, потенциалы, которые приводят к нахождению поля после дифференциальных операций. Введем вспомогательную величину – электродинамический векторный потенциал  $\vec{A}$ .

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (4)$$

Несложно показать, подставив это выражение во второе уравнение Максвелла и учитывая лоренцеву калибровку, что введенный нами векторный потенциал удовлетворяет следующему векторному уравнению Даламбера:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (5)$$

здесь  $\nabla$  – оператор Гамильтона.

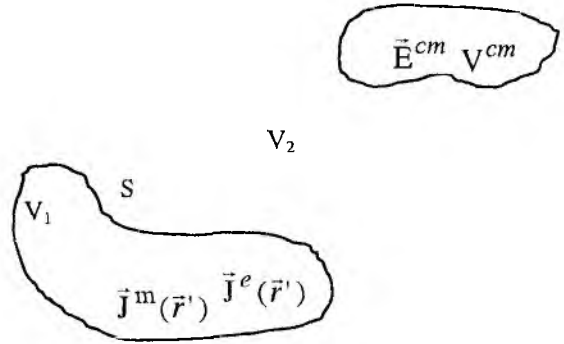


Рис. 1

Решение уравнения (5) можно выразить как

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \mu\mu_0 \int_V \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t) dV' \quad (6)$$

где  $\overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}')$  – тензорная функция Грина, которая зависит от координат точки  $\vec{r}'$ , по которой производят интегрирование, и точки наблюдения  $\vec{r}$ .

Значительный интерес представляют гармонически колеблющиеся поля. Они и будут предметом нашего анализа, поскольку, как известно, любую временную зависимость можно разложить на гармонические колебания.

Рассмотрим воздействие периодических или почти периодических сигналов. Присутствие нелинейности в анализируемой системе обеспечивает существование сигналов не только на частотах возбуждения  $\omega_k$  ( $k = 0, K, K+1$  – общее число различных частот внешних сигналов), но и целого ряда комбинационных составляющих. Таким образом, полный набор частот можно представить в виде  $\nu_n = m_{0n}\omega_0 + m_{1n}\omega_1 + \dots + m_{Kn}\omega_K$ ,  $m_{kn} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , а поля в системе выражаются как

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_{n=-N}^N \vec{H}(\vec{r}) e^{j\nu_n t} \quad (7)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{n=-N}^N \vec{E}(\vec{r}) e^{j\nu_n t} \quad (8)$$

Учитывая все вышесказанное, выразим комплексную амплитуду напряженности электрического поля:

$$\vec{E}(\vec{r}, \nu_n) = \frac{-j}{\nu_n \epsilon \epsilon_0} \left( \text{grad div} - \nu_n^2 \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \right) \int_V \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}', \nu_n) \vec{j}(\vec{r}', \nu_n) dV' \quad (9)$$

Поскольку рассеянные поля, исходя из граничных условий, обусловлены поверхностными токами на границе раздела сред, целесообразно заменить интегрирование в (9) по объему на интегрирование по поверхности сверхпроводника.

Выражение (9) подчиним нелинейным граничным условиям на поверхности сверхпроводящего тела с нелинейным поверхностным импедансом. Для этого НГУ необходимо перевести в пространственно-частотную область, применив преобразование Фурье.

После всех преобразований нелинейные интегральные уравнения будут записаны в виде:

$$\begin{aligned} \vec{n}(q) \times \vec{E}^{cm}(q, \omega_k) + \vec{n}(q) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{-j}{\nu_n \epsilon \epsilon_0} \left( \text{grad div} - \nu_n^2 \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \right) \int_S \overline{\vec{G}}(\vec{r}, \vec{r}', \nu_n) \vec{j}^3(\vec{r}', \nu_n) dS' \right) e^{j\nu_n t} = \\ = -\vec{Z} \cdot \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{j}^3(q, \nu_n) e^{j\nu_n t} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\vec{E}^{cm}(\vec{r}, \omega_k)$  – напряженность электрического поля падающей волны.

### 3 Описание алгоритма решения НИУ и анализ его сходимости

Учитывая, что в нашем случае рассматриваются микрополосковые структуры (то есть ширина проводника меньше его длины и много меньше длины волны) интегрирование по поверхности можно заменить интегрированием по длине проводника, задавшись функцией распределения тока по поперечному сечению проводника. Решение полученного интегрального уравнения возможно с использованием численных методов, в частности, метода Галеркина. Однако, в отличие от случая решения линейных интегральных уравнений, для аппроксимации искомого распределения тока вдоль проводника  $I(q, \nu_n)$  в линейном операторе (10) и в нелинейном будем использовать различные системы базисных функций. Следуя

алгоритму выбранного метода, заменив непрерывные функции уравнения (10) на их дискретные разложения по базисным функциям, после интегрирования получим:

$$\mathbf{Z}(v_n)\mathbf{I}(v_n) + \frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{N}[I(t)]e^{-iv_n t} dt = \begin{cases} \mathbf{U}(\omega_k), & \text{при } v_n = \omega_k \\ 0, & \text{при } v_n \neq \omega_k \end{cases}, \quad \forall q = \overline{1, N}. \quad (11)$$

Здесь:  $\mathbf{Z}(v_n)$  – матрица обобщенных импедансов;  $\mathbf{I}(v_n) = (I_1(v_n), I_2(v_n), \dots, I_M(v_n))^T$  – вектор, элементами которого являются коэффициенты аппроксимации искомого распределения тока;  $\mathfrak{N}[I(t)] = (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_M)^T$  – нелинейный оператор, характеризующий нелинейные свойства поверхностного импеданса;  $\mathbf{U}(\omega_k) = (U_1(\omega_k), U_2(\omega_k), \dots, U_M(\omega_k))^T$  – матрица-столбец, описывающая воздействие сторонних источников. Индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования. Соотношение (11) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитуд гармоник распределения тока вдоль проводников микрополосковой структуры. Данная система – это система уравнений гармонического баланса для нелинейной цепи, представляющей собой соединение нелинейного и линейного многополюсников (рис. 2,а)

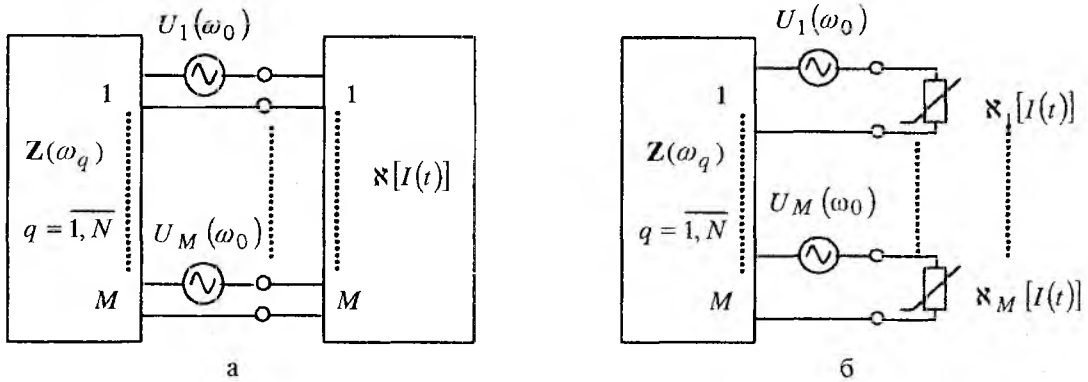


Рис. 2

Для аппроксимации распределения тока в линейной части интегрального уравнения использовались базисные функции в виде треугольников. При выборе базисных функций для аппроксимации распределения тока в нелинейной части интегрального уравнения одним из основных требований была эффективность вычисления оператора  $\mathfrak{N}[I(t)]$ . Чтобы обеспечить выполнение этого требования, необходимо выбрать такие базисные функции, чтобы на одном элементарном сегменте проводника (между двумя ближайшими разбиениями) ток определялся только одной такой функцией. Влияние аппроксимирующих функций соседних сегментов должно быть полностью исключено. Этого можно достичь, если использовать в качестве базисных кусочно-постоянные функции. В таком случае оператор  $\mathfrak{N}[I(t)]$  будет описывать нелинейный многополюсник, состоящий из отдельных, не связанных между собой двухполюсных нелинейных элементов (рис.2,б). Очевидно, что такой подход приводит к более простому виду уравнений гармонического баланса, однако, чтобы повысить эффективность их решения необходимо определить оптимальный шаг разбиения области решения и оценить степень сходимости.

Для установления характера сходимости решения системы нелинейных интегральных уравнений были проведены некоторые численные эксперименты посредством прямых измерений. Рассматривалась микрополосковая структура в виде передающей линии электрической длиной  $\lambda/2$ . Конструктивный блок включает в себя кристалл подложки толщиной 1 мм прямоугольной формы размером  $22,8 \times 9,8$  мм. Материал подложки был выбран с характеристиками, близкими по своим диэлектрическим свойствам к оксиду алюминия. Относительная диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь субстрата равны 10 и 0,0005 соответственно. Физическая длина микрополосковой линии с учетом ее электриче-

ской длины на частоте 2,5 ГГц составила 22,8 мм. Ширина проводника 0,98 мм была выбрана из соображений обеспечения характеристического сопротивления линии 50 Ом.

В ходе расчетов применены некоторые идеализации, которые не влияют на характер исследуемых зависимостей. Предполагается, что подложка экранирована снизу идеальным проводником. Поскольку толщина полоска – величина на несколько порядков меньшая любого из габаритных параметров линии, для упрощения расчетов было решено устремить ее к нулю.

Проведены расчеты в предположении, что нелинейность поверхностного импеданса сверхпроводника носит индуктивный характер и описывается зависимостью  $L(I) = L_0 + L_2 I^2$  ( $L_0$  и  $L_2$  – коэффициенты, характеризующие распределенную индуктивность и зависящие от нелинейных свойств ВТСП). Значения этих коэффициентов были получены в результате сопоставления результатов теоретического анализа и экспериментальных данных [4], а также при пересчете с учетом геометрии рассматриваемой структуры. В данном случае имеем  $L_0=0.43$  мкГн/м;  $L_2=0.13$  нГн/А<sup>2</sup>·м.

Существуют различные виды проявления нелинейности:

- интермодуляционные искажения (появление составляющих спектра с частотами, равными линейной комбинации двух или более частот возбуждения);
- генерация гармоник (возникновение составляющих с частотами, кратными частоте возбуждения);
- насыщение и снижение чувствительности (искажение слабого сигнала, когда мощный сигнал вводит в насыщение цепи усилителя);
- перекрестная модуляция (перенос модуляции с одного сигнала на другой);
- амплитудно-фазовые модуляционные преобразования (переход изменяющейся амплитуды в изменяющуюся фазу).

Хотя это абсолютно разные эффекты, причина их появления одна. Поэтому в данных исследованиях решено рассматривать только эффекты интермодуляционных искажений и генерацию высших гармоник.

Рассчитана амплитуда интермодуляционной составляющей 3-го порядка в спектре сигнала на выходе линии при двухчастотном воздействии. Питание линии осуществляется от источника с выходным сопротивлением 50 Ом, который обеспечивает на выходных зажимах две спектральные составляющие одинаковой амплитуды с частотами 2,5 ГГц и 2,50000001 ГГц в диапазоне мощностей -20 ... 10 дБм. Линия нагружена на согласованную нагрузку 50 Ом. Исследовался процесс сходимости решения НИУ при уменьшении шага интегрирования (увеличении количества разбиений). Результаты исследования представлены на рис. 3.

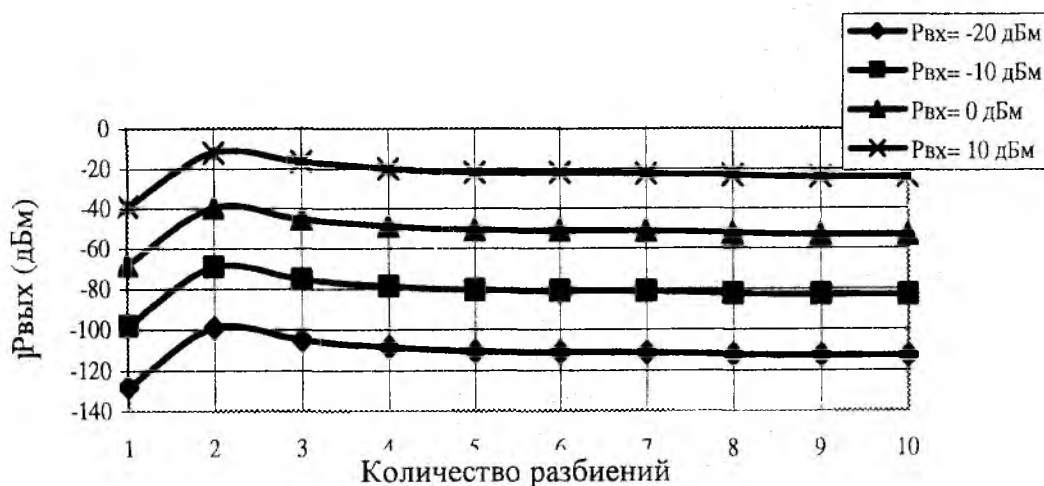


Рис. 3

Каждая из зависимостей, изображенных на графике, соответствует определенному уровню мощности входного сигнала. Как видно из рис. 3, процесс сходится довольно быстро и степень его сходимости не зависит от входной мощности.

Также исследовался процесс сходимости при одночастотном воздействии в указанном диапазоне входных мощностей. Рассчитана амплитуда 3-й гармоники на выходе микрополосковой линии. Питание линии осуществляется от источника с выходным сопротивлением 50 Ом на частоте 2,5 ГГц. Поскольку поведение полученных зависимостей аналогично тенденции, прослеживающейся на рис. 3, в данной работе мы не будем приводить их графики.

Интерес представляют также режимы работы рассматриваемого устройства с различным характером распределения амплитуды тока вдоль микрополосковой линии. В частности сравнивались режимы согласования, холостого хода и короткого замыкания при одно- и двухчастотном воздействии. Мощность сигнала на входе устройства – минус 20 дБм. Полученные зависимости для интермодуляционной составляющей, а также для амплитуды третьей гармоники при одночастотном воздействии представлены на рисунке 3 а и б соответственно.

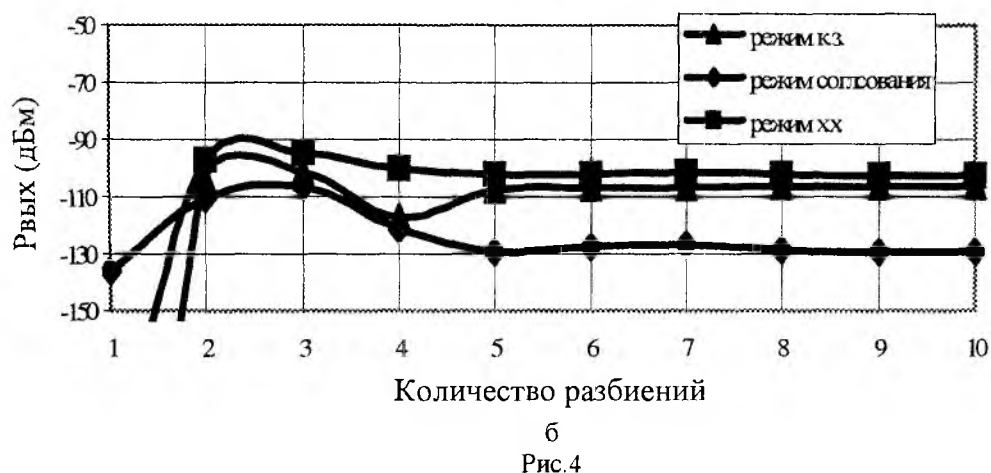
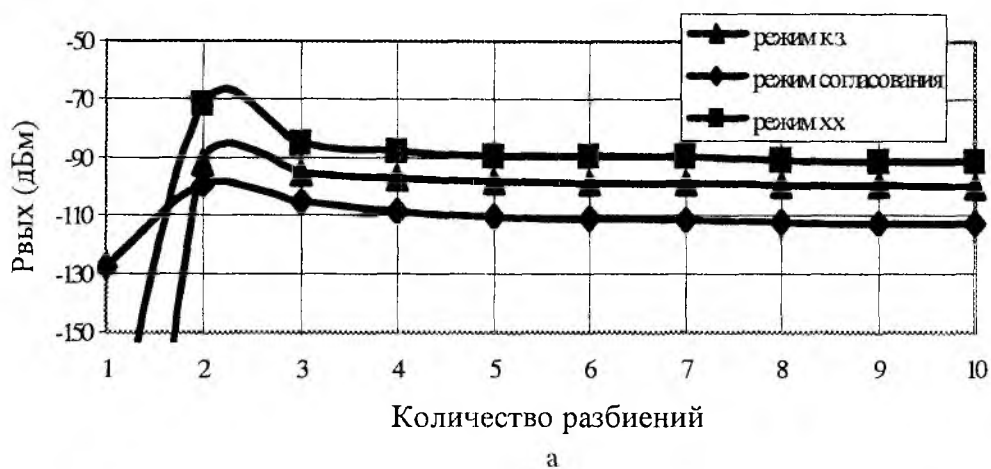


Рис. 4

Если принять в качестве критерия сходимости накопление ошибки интегрирования не более 0,5 дБ при различных шагах интегрирования по пространственным координатам, то из полученных зависимостей рис. 3, 4 можно сделать вывод, что устойчивость решения наблюдается уже при количестве разбиений равном восьми.

#### 4 Выводы

Нами показано, что нелинейные характеристики микрополосковых структур можно оценить численно. Показано, что расчет периодического режима микрополосковых устройств с ленточными проводниками, которые обладают нелинейными свойствами, может быть сведен

к решению системы одномерных НИУ, что позволяет разработать достаточно эффективные алгоритмы их анализа. Проведены численные эксперименты по исследованию сходимости алгоритма решения системы нелинейных интегральных уравнений, описывающих электродинамические структуры, поверхностный импеданс которых обладает нелинейным характером. Результаты экспериментов в ходе которых использовался данный метод также опубликованы в [4, 5].

**Список литературы:** 1. *Alex I. Braginski* Superconducting electronics coming to market // IEEE Trans. Applied Superconductivity. 1999. No2. P. 2825 – 2836. 2. *Orest G. Vendik, Irina B. Vendik, Tatyana B. Samoilova* Nonlinearity of superconducting transmission line and microstrip resonator // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1997. No 2. P. 173 – 178. 3. *T. Dham, D. J. Scalapino* Analysis and optimization of intermodulation in high-Tc superconducting microwave filter design // IEEE Trans. Applied Superconductivity. 1998. Vol. 8, NO 4. P.149 – 157. 4. *Лучанинов А.И., Шокало В. М., Журбенко В. В., Омаров М. А.* Аналіз нелінійних ефектів у над провідникових мікросмужкових резонаторах // Радіоелектроніка та телекомунікації. 2002. №440. С. 150 – 154. 5. *Лучанинов А. И., Журбенко В.В., Омаров М. А.* Моделирование нелинейных эффектов в микрополосковых линиях с высокотемпературной сверхпроводимостью // Радиозлектроника и информатика. 2001. №3. С. 20 – 23.

Харьковский национальный  
университет радиозлектроники

Поступила в редколлегию 07.05.2004