

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 537.874.6

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА КОНУСЕ С ПРОДОЛЬНЫМИ ЩЕЛЯМИ

© 2001 г. В. А. Дорошенко, В. Ф. Кравченко

Поступила в редакцию 26.09.2000 г.

Рассмотрена краевая задача о рассеянии плоской электромагнитной волны на полубесконечном идеально проводящем конусе с периодически прорезанными продольными щелями. Ее решение проводится с использованием интегрального преобразования Конторовича–Лебедева и метода полупространства. В частных случаях полупрозрачного конуса, одной узкой конической ленты, конуса с узкой щелью получено аналитическое решение, на основе которого изучены структура и поляризация рассеянного поля, а также его поведение вблизи вершины конуса.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] приведены результаты исследования краевой задачи о возбуждении электрическим диполем конуса с продольными щелями. Однако для приложений в измерительной технике и радиолокации большой интерес представляет решение дифракционной задачи для такой структуры. В данной работе, являющейся продолжением [1], приведено решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на полубесконечном идеально проводящем конусе с периодически прорезанными продольными щелями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Пусть на тонкий идеально проводящий полубесконечный круговой конус с периодически прорезанными вдоль образующих N щелями падает распространяющаяся вдоль его оси однородная плоская электромагнитная волна (рисунок). Временная зависимость представлена в виде $\exp(-i\omega t)$. Во введенной сферической системе координат r, ϑ, φ коническая поверхность определяется уравнением $\vartheta = \gamma$. Период рассматриваемой структуры $l = 2\pi/N$ и ширина щелей d – величины двугранных углов, которые образованы плоскостями, проведенными через ось конуса и ребра соседних конических лент. Присутствие конуса с продольными щелями приводит к появлению вторичного поля $\vec{E}^{(d)}, \vec{H}^{(d)}$. Полное поле для $\vec{E}, \vec{H}$ имеет вид

$$\vec{E} = \vec{E}^{(in)} + \vec{E}^{(d)}, \quad \vec{H} = \vec{H}^{(in)} + \vec{H}^{(d)},$$

где $\vec{E}^{(in)}, \vec{H}^{(in)}$ – поле плоской волны (первичное поле), удовлетворяющее системе уравнений Максвелла вне конуса, граничному условию на лентах $\vec{E}_{tg}|_{\Sigma} = 0$, условиям излучения и конечности энер-

гии. Эти условия обеспечивают единственность решения поставленной краевой задачи дифракции. Выразим компоненты электромагнитного поля через электрический $V^{(1)}$ и магнитный $V^{(2)}$ потенциалы Дебая, а затем сведем исходную электродинамическую задачу к двум скалярным краевым задачам Дирихле и Неймана для потенциалов $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$. Потенциалы Дебая удовлетворяют однородному уравнению Гельмгольца вне конуса, граничному условию Дирихле (для $V^{(1)}$) или Неймана ($V^{(2)}$), условию излучения и условию вблизи нерегулярностей границы (вершина конуса, ребра лент). Согласно структуре полного поля

$$V^{(s)} = V_{in}^{(s)} + V_d^{(s)}, \quad s = 1, 2.$$

Для решения скалярных краевых задач используем интегральное преобразование Конторовича–Лебедева [1]

$$G(\tau) = \int_0^{+\infty} g(r) \exp\left(-\frac{\pi\tau}{2}\right) \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} dr, \quad (1)$$

$$g(r) = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \exp\left(-\frac{\pi\tau}{2}\right) G(r) \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau, \quad (2)$$

где $H_{i\tau}^{(1)}(kr)$ – функция Ханкеля 1-го рода, $k = \omega/c$ – волновое число.

Рассмотрим два случая поляризации первичного поля:

$$\begin{aligned} \text{А. } \vec{E}^{in} &= (E_x^{in}, 0, 0), \quad \vec{H}^{in} = (0, H_y^{in}, 0), \\ E_x^{in} &= H_y^{in} = \exp(ikz) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{E}^{in} &= (0, E_y^{in}, 0), \quad \vec{H}^{in} = (H_x^{in}, 0, 0), \\ H_x^{in} &= -E_y^{in} = \exp(ikz). \end{aligned}$$

Случай А

$E_x^{in} = H_y^{in} = \exp(ikz)$. Здесь потенциалы Дебая, соответствующие полю плоской волны, определяются, согласно [2], в виде

$$V_{in}^{(1)} = -\frac{\cos \varphi}{k^2 r \sin \vartheta} \times (\cos kr + i \cos \vartheta \sin kr - \exp(ikr \cos \vartheta)),$$

$$V_{in}^{(2)}(r, \vartheta, \varphi) = V_{in}^{(1)}\left(r, \vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Представим их интегралами Конторовича–Лебедева

$$\begin{aligned} V_{in}^{(1)} &= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \cos \varphi \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \exp\left(-\frac{\pi \tau}{2}\right) \times \\ &\times \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \vartheta) d\tau + i \cos \varphi \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \frac{\sin kr}{k^2 r}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \vartheta)$ – присоединенные функции Лежандра. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} V_{ind}^{(s)} &= \\ &= \sum_{m=-1; 1} \exp(im\varphi) \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} C_{m\tau}^{(s)} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \vartheta) d\tau, \\ V_{inc}^{(s)} &= \\ &= \frac{1}{2k^2 r} \sum_{m=-1; 1} \left(\frac{|m|}{m}\right)^{s-1} P_0^{-|m|}(\cos \vartheta) \exp(im\varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

$s = 1, 2,$

где

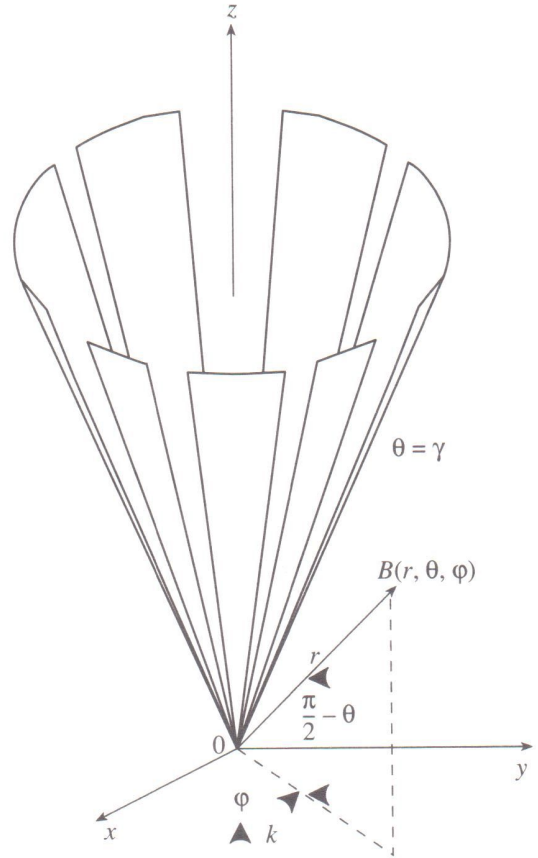
$$\begin{aligned} C_{m\tau}^{(s)} &= \left(-i\frac{|m|}{m}\right)^{s-1} \sqrt{\frac{\pi}{2k}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \times \\ &\times \tau \operatorname{th} \pi \tau \exp\left(-\frac{\pi \tau}{2}\right) \left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right)^{\alpha(m)}, \quad \alpha(m) = -\frac{1}{2} \left(\frac{|m|}{m} + 1\right). \end{aligned}$$

Здесь

$$V_{in}^{(s)} = V_{ind}^{(s)} + V_{inc}^{(s)}. \quad (6)$$

По аналогии с (3)–(6), потенциалы Дебая $V_d^{(s)}$, соответствующие вторичному полю, представим так

$$V_d^{(s)} = V_{dd}^{(s)} + V_{dc}^{(s)}, \quad (7)$$



Геометрия структуры.

$$\begin{aligned} V_{dd}^{(s)} &= \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} \sum_{m=-1; 1} C_{m\tau}^{(s)} \frac{d^{s-1}}{d\gamma^{s-1}} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma) U_{m\tau}^{(s)} d\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U_{m\tau}^{(s)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{m+nN}^{(s)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \vartheta)}{\frac{d^{s-1}}{d\gamma^{s-1}} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\pm \cos \gamma)} \times \\ &\times \exp(i(m+nN)\varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} V_{dc}^{(s)} &= \\ &= -\frac{i}{2k^2} \frac{\sin kr}{r} \frac{d^{s-1}}{d\gamma^{s-1}} \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}\right) \sum_{m=-1; 1} \left(-i\frac{|m|}{m}\right)^{s-1} U_m^{(s)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} U_m^{(s)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_{m+nN}^{(s)} \frac{P_0^{-|m+nN|}(\pm \cos \vartheta)}{\frac{d^{s-1}}{d\gamma^{s-1}} P_0^{-|m+nN|}(\pm \cos \gamma)} \times \\ &\times \exp(i(m+nN)\varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

где $x_p^{(s)}$ и $\xi_p^{(s)}$ – неизвестные коэффициенты, связанные соотношением

$$\xi_p^{(s)} = \lim_{i\tau \rightarrow 1/2} x_p^{(s)}. \quad (12)$$

Верхние знаки в (9), (11) соответствуют области $0 < \vartheta < \gamma$, а нижние $\gamma < \vartheta < \pi$.

Используя краевое условие на конических лентах и условие непрерывности поля в щелях, получаем систему функциональных уравнений относительно $x_n^{(s)}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(s)} \exp(inN\varphi) = \exp(im_0N\varphi), \quad (13)$$

$$\frac{\pi d}{l} < |N\varphi| \leq \pi,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(s)} [N(n+\nu)]^{\chi(s)} \frac{|n|}{n} (1 - \epsilon_n^{(s)}) \exp(inN\varphi) = 0, \quad (14)$$

$$|N\varphi| < \frac{\pi d}{l},$$

где

$$\begin{aligned} & [N(n+\nu)]^{\chi(s)} \frac{|n|}{n} (1 - \epsilon_n^{(s)}) = \\ & = \frac{(-1)^{(n+\nu)N+s-1} \operatorname{ch} \pi \tau \Gamma(1/2 + i\tau + (n+\nu)N)}{\pi \sin \gamma \Gamma(1/2 + i\tau - (n+i)N)} \times \\ & \times \frac{1}{\frac{d^{s-1}}{d\gamma^{s-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(\cos \gamma) \frac{d^{s-1}}{d\gamma^{s-1}} P_{-1/2+i\tau}^{(n+\nu)N}(-\cos \gamma)} \\ & (\chi(s) = (-1)^{s+1}), \end{aligned}$$

$m/N = m_0 + \nu$, $-1/2 \leq \nu < 1/2$, m_0 – ближайшее к m/N целое число, $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Для $\epsilon_n^{(s)}$ имеет место оценка при $N(n+\nu) \gg 1$

$$\epsilon_n = O\left(\frac{1}{N^2(n+\nu)^2}\right). \quad (15)$$

При использовании метода задачи Римана–Гильберта [1] функциональные уравнения (13), (14) сводятся к двум независимым бесконечным системам линейных алгебраических уравнений

(БСЛАУ) второго рода фредгольмовского типа относительно $x_n^{(s)}$. Приведем БСЛАУ для $x_n^{(2)}$:

$$\begin{aligned} B_v(u) x_0^{(2)} &= -\frac{|m_0|}{m} (1 - \epsilon_{m_0}^{(2)}) V^{m_0}(u) + \\ &+ \sum_{p=-\infty}^{\infty} (x_p^{(2)} - \delta_p^{m_0}) \frac{|p|}{p} \epsilon_p V^p(u), \end{aligned} \quad (16)$$

$$B_v(u) = \frac{1}{v} \frac{2P_{v-1}(-u)}{P_{v-1}(-u) + P_v(-u)},$$

$$\begin{aligned} x_0^{(2)} - \delta_0^{m_0} &= D_{m_0} V_{n-1}^{m_0-1}(u) + \sum_{p \neq 0} (x_p^{(2)} - \delta_p^{m_0}) \frac{|p|}{p} \epsilon_p^{(2)} \times \\ &\times V_{n-1}^{p-1}(u) + x_0^{(2)} [P_n(u) + \epsilon_0^{(2)} V_{n-1}^{-1}(u)], \quad n \neq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$D_{m_0} = -\frac{|m_0|}{m} (1 - \epsilon_{m_0}^{(2)}), \quad u = \cos \frac{\pi d}{l},$$

$$\delta_p^m = \begin{cases} 0, & m \neq p, \\ 1, & m = p, \end{cases}$$

а $V_{n-1}^{p-1}(u)$, $V^p(u)$, $V_{n-1}^{-1}(u)$ – известные функции [1].

Нетрудно показать, что матричные операторы двух БСЛАУ компактны в гильбертовом пространстве $\tilde{l}_2^{(s)}$ последовательностей $\{x_n^{(s)}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ со скалярным произведением

$$x^{(s)} \cdot y^{(s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|)^{\chi(s)} x_n^{(s)} y_n^{(s)}.$$

Эти системы имеют единственное решение, которое при любых соотношениях между шириной ленты и периодом для произвольных конечных значений параметров N , m , τ может быть получено методом редукции. Следует отметить, что коэффициенты $x_n^{(s)}$ не зависят от волнового числа, а это удобно для построения диаграмм направленности и изучения поведения поля вблизи острия конуса ($kr \ll 1$). В частных случаях конической структуры, когда число щелей велико, а их ширина или мала, или сравнима с периодом (полупрозрачный конус), узких щелей, узких конических лент нормы операторов систем меньше единицы, что позволяет использовать метод последовательных приближений для решения систем.

Случай Б

Здесь потенциалы Дебая $\tilde{V}_{in}^{(s)}$, соответствующие первичному полю, определяются следующими соотношениями:

$$\tilde{V}_{in}^{(1)}(r, \vartheta, \varphi) = -V_{in}^{(1)}\left(r, \vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\tilde{V}_{in}^{(2)}(r, \vartheta, \varphi) = V_{in}^{(1)}(r, \vartheta, \varphi),$$

где знаком тильды обозначен потенциал Дебая для случая Б.

Структуры потенциалов $\tilde{V}_d^{(s)}$ и их представление в виде интеграла Конторовича–Лебедева аналогичны (7)–(12), как и в случае А. Неизвестные коэффициенты Фурье в разложениях потенциалов $\tilde{V}_d^{(s)}$ в ряды по углу φ удовлетворяют таким же функциональным уравнениям и двум БСЛАУ, что и коэффициенты $x_n^{(s)}$ (13), (14), (16), (17).

2. АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

В случаях полупрозрачного конуса, одной узкой ленты, конуса с одной щелью решение двух БСЛАУ находим методом последовательных приближений и получаем аналитическое решение краевой задачи при двух разных условиях.

Случай А

Полупрозрачный конус. Рассмотрим два случая полупрозрачного конуса, которые определяются существованием пределов:

$$a) \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 1}} \left[-\frac{1}{N} \ln \cos \frac{\pi d}{2l} \right] = Q, \quad (18)$$

$$б) \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ d/l \rightarrow 0}} \left[-\frac{1}{N} \ln \sin \frac{\pi d}{2l} \right] = W. \quad (19)$$

а) При $Q \neq 0$ и $W = 0$ $V_d^{(2)} = 0$ и вторичное поле описывается потенциалом $V_d^{(1)}$, имеющим вид

$$\begin{aligned} V_d^{(1)} = & -\frac{1}{k} \cos \varphi \int_0^{+\infty} \frac{H_{it}^{(1)}(kr) (\tau^2 + 1/4)^2}{\sqrt{r} \sigma_{it}} C_{it}^{(1)} \times \\ & \times [P_{-1/2+it}^{-1}(\cos \gamma)]^2 P_{-1/2+it}^{-1}(-\cos \vartheta) d\tau - \\ & - \frac{i}{k^2} \frac{\cos \varphi}{1 + 2Q} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \frac{\sin kr}{r}, \quad \gamma < \vartheta < \pi, \quad (20) \\ \sigma_{it} = & (\tau^2 + 1/4) P_{-1/2+it}^{-1}(\cos \gamma) \times \\ & \times P_{-1/2+it}^{-1}(-\cos \gamma) + 2Q \frac{\operatorname{ch} \pi \tau}{\pi}. \end{aligned}$$

Аналогичное представление имеет место при $0 < \vartheta < \gamma$. На поверхности конуса компоненты электромагнитного поля удовлетворяют усредненным граничным условиям

$$E_r^+ = E_r^-,$$

$$\frac{ik}{\arcsin \gamma} E_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) (r \hat{H} \varphi),$$

$$\hat{H} = H^+ - H^-, \quad f^\pm = f|_{\vartheta = \gamma \pm 0},$$

которые с точностью до знака волнового числа совпадают с усредненными граничными условиями в случае возбуждения такого же типа полупрозрачного конуса электрическим радиальным диполем [1]. Переходя в (20) к интегрированию по мнимой оси, представим $V^{(1)}$ рядом вычетов по полюсам подынтегральной функции

$$V^{(1)} = -\frac{\pi i}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \cos \varphi \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\mu(\mu^2 - 1/4) I_\mu(kr)}{\cos \pi \mu \frac{d}{d\mu} \sigma_\mu} \times \quad (21)$$

$$\times [P_{-1/2+\mu}^{-1}(\cos \gamma)]^2 P_{-1/2+\mu}^{-1}(-\cos \vartheta) \Big|_{\mu = \tilde{\nu}_q},$$

$$\sigma_{\tilde{\nu}_q} = 0. \quad (22)$$

Отметим, что ряд (21) быстро сходится, когда точка наблюдения находится вблизи вершины ($kr \ll 1$), поэтому его удобно использовать для выяснения поведения поля вблизи острия. При $kr \gg 1$ ряд сходится медленно, а для анализа поля в дальней зоне целесообразно воспользоваться интегральным представлением (20).

В дальнейшем под спектром собственных значений краевой задачи будем понимать множество полюсов подынтегральной функции в интегральном представлении для потенциалов Дебая, соответствующих полному полю. Спектр задачи для полупрозрачного конуса (18) определяется корнями уравнения (22), наименьший из которых характеризует поведение поля у вершины. В некоторых частных случаях приведем асимптотики для $\tilde{\nu}_q$:

$$1) Q \ll 1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_q = & \alpha_q^{1+}(\gamma) + \\ & + \frac{2Q \cos \pi \mu}{\pi \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{d}{d\mu} \left[P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right]} \Big|_{\mu = \alpha_q^{1+}} + \\ & + O(Q^2), \end{aligned}$$

$$P_{-\frac{1}{2}+\alpha_q^{1+}}^{-1}(\cos \gamma) = 0, \quad P_{-\frac{1}{2}+\alpha_q^{1-}}^{-1}(-\cos \gamma) = 0;$$

2) $Q \gg 1$,

$$\tilde{v}_q = \frac{1}{2} + q + \frac{1}{2Q} q(q+1) [P_q^{-1}(\cos \gamma)]^2 + O(Q^{-2}),$$

$$q = 1, 2, \dots;$$

3) $\gamma \ll 1$,

$$\tilde{v}_q = \frac{1}{2} + q + \frac{q(q+1)}{4(1+2Q)} \gamma^2 + O\left(\gamma^4 \ln \frac{2}{\gamma}\right), \quad q = 1, 2, \dots$$

Компоненты полного электрического поля вблизи

острия ведут себя как $(kr)^{-\frac{3}{2}+\tilde{v}}$, где $\tilde{v} = \min \tilde{v}_q$. Наименьшим корнем в случаях 1)–3) является корень v_1 . Принимая во внимание, что при $\gamma \ll 1$ полное электрическое поле у вершины сплошного конуса ведет как $(kr)^{\gamma/2}$, заключаем, что в рассматриваемом случае полупрозрачного конуса ($\gamma \ll 1$) полное электрическое поле убывает медленнее, чем у сплошного по мере приближения к острию. Вторичное поле определяется только электрическим потенциалом Дебая ($H_r^d = 0$), вследствие чего оно является полем электрического типа (поперечно-магнитным полем). Поле плоской волны определяется двумя потенциалами (4)–(6), поэтому не принадлежит ни к электрическому, ни к магнитному типу. Таким образом, полупрозрачный конус (18) изменяет поляризацию поля плоской волны.

б) При $W \neq 0$ и $Q = 0$ компоненты вторичного поля выражаются через оба потенциала Дебая, причем электрический потенциал такой же, как у сплошного конуса и не испытывает влияния щелей, а магнитный определяется выражением

$$V_d^{(2)} = 2\omega \frac{i}{k} \sin \varphi \int_0^{+\infty} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr) C_{-1\tau}^{(2)}}{\sqrt{r}} \frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \times$$

$$\times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(-\cos \vartheta) d\tau + \frac{i}{k^2} \sin \varphi \frac{2W}{1+2W} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \frac{\sin kr}{r},$$

$$\gamma < \vartheta < \pi, \quad \Delta_{i\tau} = 2W -$$

$$- \frac{\operatorname{ch} \pi \tau}{\pi \sin \gamma} \frac{1}{\left(\tau^2 + \frac{1}{4}\right) \frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)}.$$

Аналогичное представление имеет место при $0 < \vartheta < \gamma$. Переходя к пределу в (23) при $W \rightarrow \infty$ (полупрозрачный конус превращается в сплошную), получаем выражение для магнитного потенциала Дебая применительно к сплошному конусу. Компоненты поля на поверхности полупрозрачного конуса удовлетворяют следующим усредненным граничным условиям:

$$E_\varphi^+ = E_\varphi^-,$$

$$-\frac{ik}{4W \sin \gamma} \tilde{H}_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2\right)(rE_\varphi).$$

Для анализа поведения поля вблизи острия представим $V^{(s)}$ в виде ряда по полюсам подынтегральной функции

$$V^{(1)} = \frac{\pi i}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \cos \varphi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu}{\cos \pi \mu} I_\mu(kr) \times$$

$$\times \frac{P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{d}{d\mu} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \vartheta) \bigg|_{\mu=\alpha_n^{1-}},$$

$$V^{(2)} = 2W \frac{\pi i}{k} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \sin \varphi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu}{\cos \pi \mu} \frac{I_\mu(kr)}{\frac{d}{d\mu} \Delta_\mu} \times$$

$$\times \frac{\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(\cos \gamma)}{\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \vartheta) \bigg|_{\mu=\tilde{\alpha}_n},$$

$$\gamma < \vartheta < \pi, \quad \Delta_{\tilde{\alpha}_n} = 0.$$

Исследуем для некоторых случаев корни уравнения (24), входящие в спектр краевой задачи и определяющие поведение поля вблизи острия:

1) $W \ll 1$,

$$\tilde{v}_n = \frac{1}{2} + n + 2W \sin^2 \gamma (-1)^n n(n+1) \frac{d}{d\gamma} P_n^{-1}(\cos \gamma) \times$$

$$\times \frac{d}{d\gamma} P_n^{-1}(-\cos \gamma) + O(W^2), \quad n = 1, 2, \dots;$$

2) $W \sin^2 \gamma \gg 1$,

$$\tilde{v}_n = \zeta_n^{1\pm}(\gamma) - \frac{1}{2W \sin^2 \gamma \pi \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{d}{d\mu} \left[\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma) \right]} \bigg|_{\mu=\zeta_n^{1\pm}} + O((W \sin^2 \gamma)^{-1}),$$

$$\left. \frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(\pm \cos \gamma) \right|_{\mu=\zeta_n^{1\pm}} = 0;$$

3) $\gamma \ll 1$,

$$\hat{v}_n = \frac{1}{2} + n - n(n+1) \frac{W}{1+2W} \frac{\gamma^2}{2} + O\left(\gamma^4 \ln \frac{2}{\gamma}\right),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

В 1)–3) магнитное поле вблизи острия ведет себя как $kr^{\hat{v}}$, где

$$\hat{v}_n = \begin{cases} -\frac{1}{4} W \sin^2 2\gamma, & W \ll 1, \\ -\frac{3}{2} + \hat{v}_1, & W \sin^2 \gamma \gg 1, \\ -\frac{W}{1+2W} \gamma^2, & \gamma \ll 1. \end{cases}$$

Учитывая, что у вершины сплошного конуса при $\gamma \ll 1$, магнитное поле имеет особенность порядка $(kr)^{\gamma^{1/2}}$, можно сделать вывод, что в случае полупрозрачного конуса (19) и $\gamma \ll 1$ особенность магнитного поля вблизи вершины слабее, чем у сплошного. Характер поведения электрического поля ($\gamma \ll 1$) у вершины асимптотически такой, как и в случае сплошного конуса.

Узкая коническая лента ($N=1$, $\beta=2\pi-d \ll 1$). Обозначим через β угловую ширину конической ленты. Вдали от ребер ленты асимптотическое разложение электрического потенциала по малому параметру β имеет вид

$$V_d^{(1)} = -\frac{1}{2 \ln \sin(\beta/4)} \frac{1}{k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp(in\varphi) \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} C_{-1\tau}^{(1)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \frac{1}{M_{i\tau}} \frac{(1-\delta_n^{(1)})}{M_{i\tau}} \times$$

$$\times \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^n(\pm \cos \vartheta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^n(\pm \cos \gamma)} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau + \frac{i \sin kr}{k^2 r} + O\left(\frac{\beta^2}{\ln \frac{1}{\beta}}\right),$$

где $1 - \delta_n^{(1)} = \frac{1}{1 - \epsilon_n^{(1)}}$, $A_{i\tau} = \frac{\pi}{\text{ch } \tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\cos \gamma) \times$

$\times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos \gamma)$,

$$M_{i\tau} = 1 - \frac{1}{2 \ln \sin \frac{\beta}{4}} \left[A_{i\tau} - \sum_{p \neq 0} \frac{1}{|p|} \delta_p^{(1)} \right].$$

В этом случае магнитный потенциал Дебая $V_d^{(2)}$ порядка $O\left(\beta^2 / \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)\right)$. Таким образом, главные члены в разложении компонент поля по параметру β соответствуют главному члену в разложении электрического потенциала Дебая (25). Спектр граничной задачи в этом случае определяется корнями уравнений

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi P_{-\frac{1}{2}+\mu}(\cos \gamma) P_{-\frac{1}{2}+\mu}(-\cos \gamma) - \cos \pi \mu \sum_{p \neq 0} \frac{1}{|p|} \delta_p^{(1)}} =$$

$$= \frac{1}{2 \ln \sin \frac{\beta}{4}},$$

$$\frac{\cos \pi \mu}{\pi \sin^2 \gamma \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(\cos \gamma) P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} =$$

$$= -\sin^2 \frac{\beta}{4},$$

$$\frac{\cos \pi \mu}{n \cos \pi \mu + \pi (-1)^{n+s} n^{\chi(s)+1} D_\mu^{(s)}} = -\sin^2 \frac{\beta}{4},$$

$$D_\mu^{(s)} = (\sin \gamma)^{1-\chi(s)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + n\right) d^{s-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - n\right) d \gamma^{s-1}} \times$$

$$\times P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-n}(\cos \gamma) \frac{d^{s-1}}{d \gamma^{s-1}} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-n}(-\cos \gamma).$$

Корни уравнений (27), (28) находятся вблизи нулей $\cos \pi \mu$, за исключением $\mu = 1/2$. Корни (26) имеют вид

$$\zeta_q = \frac{1}{2} + q - \frac{1}{2 \ln \sin \frac{\beta}{4}} \left\{ [P_q(\cos \gamma)]^2 + 2 \sum_{p=1}^q \frac{(q+p)!}{(q-p)!} \times \right.$$

$$\left. \times [P_q^{-q}(\cos \gamma)]^2 \right\} + O(\ln^{-2} \beta), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Минимальным собственным значением спектра является наименьший корень (29)

$$\zeta_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln \sin \frac{\beta}{4}} + O\left(\ln^{-2} \left(\sin \frac{\beta}{4}\right)\right),$$

который характеризует поведение электрического поля у вершины конической ленты. Так, ком-

понента E_θ вблизи вершины ведет себя следующим образом:

$$E_\theta \approx -\frac{1}{2 \ln \sin \frac{\beta}{4}} (kr)^{-\frac{3}{2} + \zeta_0} F(\theta, \varphi),$$

где

$$F(\vartheta, \varphi) = \hat{A} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \left[-1 + \operatorname{Re} \left(\frac{1 - b e^{i\varphi}}{\sqrt{\hat{b}^2 \exp(2i\varphi) + 2\hat{b} \exp(i\varphi) \cos \frac{\beta}{2} + 1}} \right) \right] \right\}, \quad (30)$$

$$\gamma < \vartheta < \pi,$$

$\hat{A}$ – известный коэффициент, $\hat{b} = \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Для $0 < \vartheta < \gamma$ в (29) следует заменить ϑ на $\pi - \vartheta$.

Конус с узкой щелью ($N = 1, d \ll 1$). Известно, что спектр граничной задачи для сплошного конуса, на который падает вдоль его оси плоская волна, состоит из нулей функций $P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)$ и

$\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)$. При этом наименьший из корней

этих функций характеризует поведение электрического и магнитного полей соответственно. Наличие узкой щели возмущает спектр для сплошного конуса и изменяет структуру вторичного поля. Приведем выражения для собственных значений в случае конуса с узкой щелью

$$v_n^{p\pm} = \alpha_n^{p\pm}(\gamma) - g_n^{p\pm} \sin^2 \frac{d}{4} + O(d^4),$$

$$g_n^{p\pm} = \frac{\Gamma(1/2 + \mu - p)}{\Gamma(1/2 + \mu + p)} \times \frac{(-1)^p \cos \pi \mu}{\pi \frac{d}{d\mu} \left[P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-p}(\cos \gamma) P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-p}(-\cos \gamma) \right]} \Bigg|_{\mu = \alpha_n^{p\pm}},$$

$$P_{-\frac{1}{2}+\alpha_n^{p\pm}}^{-p}(\pm \cos \gamma) = 0, \quad n, p = 0, 1, 2, \dots;$$

$$v_n^{q\pm} = \zeta_n^{q\pm}(\gamma) - b_n^{q\pm} \sin^2 \frac{d}{4} + O(d^4),$$

$$b_n^{p\pm} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - q\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu + q\right)} \times$$

$$\times \frac{(-1)^q \cos \pi \mu}{\pi \sin^2 \gamma \frac{d}{d\mu} \left[\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-q}(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-q}(-\cos \gamma) \right]} \Bigg|_{\mu = \zeta_n^{q\pm}},$$

$$\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\zeta_n^{p\pm}}^{-q}(\pm \cos \gamma) = 0, \quad q = 1, 2, \dots;$$

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \sin^2 \gamma \ln \sin \frac{d}{4}} + O(\ln^{-2} d). \quad (31)$$

Электрическое поле вблизи острия конуса с узкой щелью ведет себя как

$$(kr)^{-\frac{3}{2} + v_0^-}, \quad \gamma \leq \pi/2,$$

где

$$v_0^- = \alpha_0^- - h_0^- \sin^2 \frac{d}{4} + O(d^4),$$

$$\alpha_0^- = \alpha_0^{p-} \Big|_{p=0}, \quad 0 < \alpha_0^-(\gamma) \leq 3/2,$$

$$h_0^- = \frac{\cos \pi \alpha_0^-}{\pi P_{-\frac{1}{2}+\alpha_0^-}^{-1}(\cos \gamma) \frac{d}{d\mu} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-1}(-\cos \gamma)} \Bigg|_{\mu = \alpha_0^-} > 0.$$

Значения $\alpha_0^-(\gamma)$ приведены в [3]. Принимая во внимание, что у вершины сплошного конуса электрическое поле особенности не имеет, так как опреде-

ляется слагаемым порядка $(kr)^{-\frac{3}{2} + \alpha_0^{1-}}$, $3/2 < \alpha_0^{1-}(\gamma)$, можно сделать вывод: наличие узкой щели приводит к появлению особенности к электрического поля. Магнитное поле по мере приближения к

острию растет как $(kr)^{-\frac{3}{2} + \zeta_0^{1-}}$ (значения ζ_0^{1-} приведены в [3]). Компоненты магнитного поля вблизи вершины конуса с узкой щелью имеют особен-

ность порядка $(kr)^{-\frac{3}{2} + \xi}$. Это свидетельствует об усилении особенности магнитного поля (по сравнению со сплошным конусом).

В структуре рассеянного поля присутствуют слагаемые, соответствующие полю для сплошного конуса, и слагаемые, обусловленные наличием щели. Одним из последних является волна, соответствующая собственному значению ξ (31). В спектре собственных значений краевой задачи Ней-

мана для магнитного потенциала в случае сплошного конуса, помимо корней $\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+\mu}^{-n}(\pm \cos \gamma) = 0$, $n \geq 1$, присутствует значение $\mu = 1/2$, которое соответствует функции, не вносящей вклад в поле. При появлении узкой щели значение $\mu = 1/2$ возмущается щелью и соответствующая ему функция вносит в поле уже ненулевой вклад и характеризует особенность магнитного поля вблизи острия конуса. При падении на конус с узкой щелью плоской электромагнитной волны в структуре вторичного поля присутствует волна типа щелевой, которая соответствует значению ξ и определяет поведение магнитного поля вблизи острия.

Случай Б

Полупрозрачный конус. 1. $Q \neq 0, W = 0$:

$$\tilde{V}_d^{(1)}(r, \vartheta, \varphi) = -V_d^{(1)}\left(r, \vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\tilde{V}_d^{(2)} = 0,$$

2. $Q = 0, W \neq 0$. Потенциал $V_d^{(1)}$ такой же, как у сплошного конуса, а

$$\tilde{V}_d^{(2)}(r, \vartheta, \varphi) = V_d^{(2)}\left(r, \vartheta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Спектр краевой задачи и поведение поля вблизи вершины конуса такие, как и в случае А падения плоской волны.

Узкая коническая лента. Приведем асимптотическое выражение для $\tilde{V}_d^{(1)}$ вдали от ребер ленты

$$\begin{aligned} \tilde{V}_d^{(1)} = & \sin^2 \frac{\beta}{2} \left\{ -\frac{i}{k} \sum_{n \neq 0} (-1)^n \frac{|n|}{n} \exp(in\varphi) \int_0^{+\infty} \frac{C_{-1\tau}^{(1)}}{T_{i\tau}} \times \right. \\ & \times P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^n(-\cos \vartheta)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^n(-\cos \gamma)} \frac{H_{i\tau}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}} d\tau + \frac{2i}{k^2} \times \\ & \times \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \sin \varphi}{\tilde{b}^2 + 2\tilde{b} \cos \varphi + 1} \frac{\sin kr}{r} \left. \right\} + O\left(\frac{\beta^2}{\ln \frac{1}{\beta}}\right), \quad \gamma < \vartheta < \pi, \end{aligned}$$

где $T_{i\tau} = 1 - \delta_n^{(1)} \sin^2(\beta/2)$.

Для узкой ленты спектр определяется множеством корней уравнений (26)–(28). Характер поведения поля вблизи вершины не зависит от поляризации падающего поля и поэтому особенность у него при $kr \ll 1$ такая, как и в случае А (отличие в амплитудном множителе, содержащем параметр малости β).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе использования интегрального преобразования Конторовича–Лебедева в сочетании с методом полуобращения проведено аналитическое исследование краевой задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на идеально проводящем полубесконечном круговом конусе с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. В случаях, когда вектор напряженности электрического или магнитного поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси конуса, направлен по оси абсцисс декартовой системы координат, получено решение задачи для полупрозрачного конуса, одной узкой ленты и конуса с узкой щелью. Найден спектр собственных значений краевых задач Дирихле и Неймана для электрического и магнитного потенциалов Дебая. Показано, что спектр в случае конуса с узкой щелью представляет собой возмущенный щелью спектр собственных значений соответствующих краевых задач для сплошного конуса. В рассмотренных случаях конической поверхности исследованы поляризация и структура рассеянного поля. Так, в случаях полупрозрачного конуса его поляризация зависит от параметров заполнения конуса Q и W .

Анализ решения для конуса с узкой щелью показал, что в структуре рассеянного поля присутствует волна типа щелевой, которая по своим свойствам сходна с щелевой волной в цилиндрической щелевой линии. Определен характер поведения поля в окрестности нерегулярностей границы. При этом перпендикулярные ребру ленты компоненты поля имеют известную корневую особенность, а наличие узкой щели усиливает особенность поля вблизи острия конуса по сравнению со сплошным. Использованный подход к решению такой задачи может быть применен и для исследования структур с более сложной конической геометрией.

Результаты работы частично были доложены на 2-й Международной конференции “Актуальные проблемы в вычислительной физике” (24–29 июля, 2000, Дубна, Россия) [4].

Авторы выражают благодарность В.И. Пустовойту за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. // РЭ. 2000. Т. 45. № 7. С. 792.
2. Гошин Г.Г. Граничные задачи электродинамики в конических областях. Томск: Том. ун-т, 1987.
3. Vafiadis E., Sahalos J. // Proc. IEEE. 1984. V. 72. № 8. P. 1089.
4. Doroshenko V.A. // Second Intern. Conf.: Modern Trends in Computational Physics. July 24–29, 2000, Dubna (Russia). Book of Abstracts. P. 61.