

УДК 621.396

*А. Ф. МАСЛОВ, д-р техн. наук, К. П. НЕСТЕРОВ, А. Б. ЖОЛОБЕНКО*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА ИЗМЕРЕНИЯ  
ФАЗЫ СИГНАЛА НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ,  
РАБОТАЮЩЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ  
КОРРЕЛИРОВАННОЙ ПОМЕХИ**

---

Синтез квазиоптимального алгоритма обнаружения и измерения амплитуд и фаз сигналов на выходах элементов антенной решетки (АР), работающей в неоднородной среде, в присутствии собственных независимых шумов и коррелированных помех произведен в работе [1]. Анализ точности фильтрации в указанной работе не проводился.

Цель работы — получение количественных оценок точности фильтрации фазы сигнала и помехи в установившемся режиме ра-

боты алгоритма измерения в зависимости от отношений сигнал-шум (с-ш) и помеха-шум (п-ш) для различных значений дисперсий флюктуаций фаз на входах элементов антенной решетки и различных значений радиусов корреляций падающих фазовых фронтов сигнала и помехи путем цифрового моделирования на ЭВМ.

Для проведения цифрового моделирования выбрана линейная АР, содержащая пять эквидистантно расположенных элементов с периодом  $d = n \frac{\lambda}{2}$ , на выходах которых наблюдается полезный сигнал и помеха на фоне аддитивных белых шумов в каждом элементе:

$$y(\alpha, t) = A_c \cos(\omega_c t + \varphi(\alpha, t)) + A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n(\alpha, t)) + \xi(\alpha, t), \quad \alpha = \overline{0, 4}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — номер элемента АР;  $\xi(\alpha, t)$  — мешающие воздействия типа белый шум с характеристиками  $\langle \xi(\alpha, t) \rangle = 0$ ,

$$\langle \xi(\alpha, t) \xi(\beta, t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} N(\alpha, \beta) \delta(\tau), \quad N(\alpha, \beta) = N_0, \quad \alpha = \beta;$$

$$N(\alpha, \beta) = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

где  $N_0$  — спектральная плотность шумов в элементах решетки.

Индексы «с» и «п» относятся соответственно к параметрам сигнала и помехи. Параметры  $\omega_c$  и  $\omega_n$  являются несущими частотами полезного сигнала и помехи, которые полагаем известными.

Допустим, что амплитуды сигнала и помехи не флюктуируют. В разложении случайной фазы  $\varphi_{(\cdot)}(\alpha, t)$  в ряд по ортогональным дискретным многочленам Чебышева для равноотстоящих точек [3] со случайными коэффициентами  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$  возьмем число слагаемых равное числу элементов АР:

$$\varphi_{(\cdot)}(\alpha, t) = \sum_{j=0}^4 \psi_j^{(\cdot)}(t) P_j(\alpha), \quad \alpha = \overline{0, 4}. \quad (2)$$

Здесь  $P_j(\alpha) = \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^s C_j^s C_{j+s}^s}{4 \cdot 3 \dots (4-s+1)} (\alpha-1)^{|s|}$  — ортогональные многочлены Чебышева,  $(\alpha-1)^{|s|}$  — обобщенная степень,  $(\alpha-1)^{|0|} = 1$ .

Ошибка аппроксимации в этом случае равна нулю. Следовательно, точность фильтрации фазы сигнала и помехи будет определяться только квазиоптимальным алгоритмом измерения. В выражениях  $(\cdot)$  означает, что индексом может быть «с» и «п». Далее предполагаем, что  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$  представляют собой марковские гауссовские процессы, заданные дифференциальными уравнениями

$$\frac{d}{dt} \psi_j^{(\cdot)}(t) = -\beta_j^{(\cdot)} \psi_j^{(\cdot)}(t) + \xi_j^{(\cdot)}(t), \quad j = \overline{0, 4}, \quad (3)$$

где  $\xi_j^{(\cdot)}(t)$  — нормальные белые формирующие шумы с нулевыми средними и корреляционными функциями:

$$\langle \xi_j^{(\cdot)}(t) \xi_m^{(\cdot)}(t + \tau) \rangle = \frac{1}{2} N_{jm}^{(\cdot)} \delta(\tau), \quad j, m = \overline{0,4}.$$

Из (2) следует, что коэффициенты разложения  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$  зависят от фазы в элементах АР согласно выражению

$$\psi_j^{(\cdot)}(t) = \sum_{\alpha=0}^4 \varphi_{(\cdot)}(\alpha, t) P_j(\alpha), \quad j = \overline{0,4}. \quad (4)$$

Следовательно, элементы дисперсионной матрицы коэффициентов разложения  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$  с учетом равных дисперсий флюктуаций фазы в элементах АР определяются по формуле

$$D_{ij}^{(\cdot)} = D_{\varphi}^{(\cdot)} \left( \frac{1}{2} L_{ij}(0) + \sum_{\Delta n=1}^4 r^{(\cdot)}(\Delta n) L_{ij}(\Delta n) \right), \quad i, j = \overline{0,4}; \quad (5)$$

$$L_{ij}(\Delta n) = \sum_{\alpha=0}^4 (P_i(4 - \alpha) P_j(4 - \alpha - \Delta n) + P_i(4 - \alpha - \Delta n) P_j(4 - \alpha));$$

$$r^{(\cdot)}(\Delta n) = \exp \left( - \frac{|\Delta n|}{C_{\varphi}^{(\cdot)}} \right), \quad \Delta n = \alpha - \beta, \quad C_{\varphi}^{(\cdot)} = \frac{\rho_{\varphi}^{(\cdot)}}{d},$$

в которой  $\rho_{\varphi}^{(\cdot)}(t)$  — радиус корреляции фазового фронта сигнала и помехи;  $d$  — период решетки;  $D_{\varphi}^{(\cdot)}$  — дисперсия флюктуаций фазы сигнала и помехи в элементах АР. Таким образом, корреляционные связи между фазами в элементах решетки переходят в корреляционные связи между коэффициентами разложения.

Предполагаем, что полезный сигнал и помеха взаимно некоррелированы. Моделирование флюктуаций фазы сигнала и помехи в каждом элементе АР выполним по структурной схеме (рис. 1)

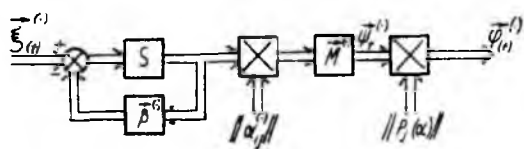


Рис. 1

На вход формирующего фильтра подается векторный белый шум  $\xi^{(\cdot)}(t)$  заданной интенсивности с некоррелированными компонентами. Требуемые корреляционные связи между коэффициентами разложения получаем путем умножения векторного случайного процесса с выхода формирующего фильтра на треугольную матрицу коэффициентов  $\alpha_{ij}^{(\cdot)}$ . На выходе усилителя с векторным коэффициентом усиления  $\overline{M}^{(\cdot)}$  получаем случайные коэффициенты разло-

жения фазы. Величины  $\alpha_{ij}^{(\cdot)}$ ,  $M_i^{(\cdot)}$  рассчитывают, решая систему алгебраических уравнений

$$D_{ij}^{(\cdot)} = M_i^{(\cdot)} M_j^{(\cdot)} \sum_{k=i}^4 \alpha_{ik} \alpha_{jk} D_{kk}^{(\cdot)}, \quad i < j \leq k \quad \text{при } \alpha_{ii}^{(\cdot)} = 1.$$

На выходе перемножителя векторов коэффициентов разложения фазы на матрицу значений ортогональных многочленов Чебышева в точках расположения элементов решетки получаем фазовые фронты сигнала и помехи с заданной дисперсией флюктуаций фазы в элементах АР и заданным радиусом корреляции.

С выходов элементов АР полезный сигнал, помеха и аддитивный белый шум подаются на систему оптимальной фильтрации. Уравнения для оценок коэффициентов разложения фазы сигнала и помехи без учета флюктуаций амплитуд в соответствии с [1] принимают вид

$$\frac{d}{dt} \hat{\psi}^{(\cdot)}(t) = -\beta_j^{(\cdot)} \hat{\psi}_j^{(\cdot)}(t) + \Phi_j^{(\cdot)}, \quad j = \overline{0,4}, \quad (6)$$

$$\text{где } \Phi_j^{(\cdot)} = \frac{2}{N_0} \sum_{\alpha=0}^4 (f^c(\alpha, t) \sum_{i=0}^4 K_{ii}^{(\cdot)c}(t) P_i(\alpha) + f^n(\alpha, t) \sum_{i=0}^4 K_{ii}^{(\cdot)n}(t) P_i(\alpha));$$

$$f^{(\cdot)}(\alpha, t) = \varepsilon(\alpha, t) \hat{A}_{(\cdot)} \sin(\omega_{(\cdot)} t + \varphi_{(\cdot)}(\alpha, t));$$

$$\varepsilon(\alpha, t) = y(\alpha, t) - \hat{A}_c \cos(\omega_c t + \hat{\varphi}_c(\alpha, t)) - \hat{A}_n \cos(\omega_n t + \hat{\varphi}_n(\alpha, t)).$$

Выполняя преобразования, пренебрегая вибрационными членами с удвоенной частотой, имеем

$$\begin{aligned} f^c(\alpha, t) = & \hat{A}_c (A_c \sin(\varphi_c(\alpha, t) - \hat{\varphi}_c(\alpha, t)) + A_n \sin(\Delta\omega t + \varphi_n(\alpha, t) - \\ & - \hat{\varphi}_n(\alpha, t)) - \hat{A}_n \sin(\Delta\omega t + \hat{\varphi}_n(\alpha, t) - \hat{\varphi}_c(\alpha, t)) - \xi(\alpha, t) \times \\ & \times \sin(\omega_c t + \hat{\varphi}_c(\alpha, t)); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f^n(\alpha, t) = & \hat{A}_n (A_n \sin(\varphi_n(\alpha, t) - \hat{\varphi}_n(\alpha, t)) + A_c \sin(-\Delta\omega t + \varphi_c(\alpha, t) - \\ & - \hat{\varphi}_n(\alpha, t)) - \hat{A}_c \sin(-\Delta\omega t + \hat{\varphi}_c(\alpha, t) - \hat{\varphi}_n(\alpha, t)) - \\ & - \xi(\alpha, t) \sin(\omega_n t + \hat{\varphi}_n(\alpha, t)), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Delta\omega = \omega_n - \omega_c$ ,  $\hat{A}_c$ ,  $\hat{A}_n$  — априорные значения амплитуды сигнала и помехи,  $K_{ii}^{cc}$ ,  $K_{ii}^{cn}$ ,  $K_{ii}^{nn}$  — апостериорные дисперсии ошибок оценивания коэффициентов разложения фаз сигнала и помехи. Начальные условия к уравнениям (6) следуют из апри-

орных распределений оцениваемых параметров  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$ . Оценки фаз получаются из выражений (2) подстановкой в них вместо  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$  величин  $\hat{\psi}_j^{(\cdot)}(t)$ .

Выражения для апостериорных дисперсий ошибок оценивания коэффициентов разложения фазы полезного сигнала и помехи [1] в рассматриваемом случае принимают вид

$$\frac{d}{dt} K_{ij}^{(\cdot)(\cdot)}(t) = \frac{1}{2} N_{ij}^{(\cdot)(\cdot)} - (\beta_i^{(\cdot)} + \beta_j^{(\cdot)}) K_{ij}^{(\cdot)(\cdot)}(t) + G_{ij}^{(\cdot)(\cdot)}, \quad i, j = \overline{0,4}. \quad (9)$$

Здесь

$$G_{ij}^{(\cdot)(\cdot)} = -\frac{1}{N_0} \left( \sum_{\alpha=0}^4 (g^c(\alpha, t) \sum_{\mu, \nu=0}^4 K_{i\mu}^{(\cdot)c} K_{j\nu}^{(\cdot)c} P_\mu(\alpha) P_\nu(\alpha) + \right. \\ \left. + g^p(\alpha, t) \sum_{\mu, \nu=0}^4 K_{i\mu}^{(\cdot)p} K_{j\nu}^{(\cdot)p} P_\mu(\alpha) P_\nu(\alpha) + \cos(\Delta\omega t + \hat{\varphi}_p(\alpha, t) - \hat{\varphi}_c(\alpha, t)) \right) \times \\ \times \sum_{\mu, \nu=0}^4 (K_{i\mu}^{(\cdot)c}(t) K_{j\nu}^{(\cdot)p}(t) + K_{i\mu}^{(\cdot)p}(t) K_{j\nu}^{(\cdot)c}(t)) P_\mu(\alpha) P_\nu(\alpha), \quad (10)$$

$$g^{(\cdot)}(\alpha, t) = \varepsilon(\alpha, t) \hat{A}_{(\cdot)} \cos(\omega_{(\cdot)} t + \hat{\varphi}_{(\cdot)}(\alpha, t)).$$

Чтобы получить систему уравнений для апостериорных дисперсий ошибок оценивания коэффициентов разложения фаз полезного сигнала и помехи в (9) вместо  $(\cdot)$  нужно подставить индексы «с» или «п» в соответствии с индексами «i» и «j». При таком соответствии очевидно, что  $K_{ij}^{(\cdot)(\cdot)}(t) = K_{ji}^{(\cdot)(\cdot)}(t)$ .

После преобразований в (10), пренебрегая вибрационными слагаемыми с удвоенной частотой, получаем

$$g^c(\alpha, t) = \hat{A}_c (A_c \cos(\varphi_c(\alpha, t) - \hat{\varphi}_c(\alpha, t)) + A_p \cos(\Delta\omega t + \varphi_p(\alpha, t) - \\ - \hat{\varphi}_c(\alpha, t)) - \hat{A}_p \cos(\Delta\omega t + \hat{\varphi}_p(\alpha, t) - \hat{\varphi}_c(\alpha, t)) + \\ + \xi(\alpha, t) \cos(\omega_c t + \hat{\varphi}_c(\alpha, t))); \quad (11)$$

$$g^p(\alpha, t) = \hat{A}_p (A_p \cos(\varphi_p(\alpha, t) - \hat{\varphi}_p(\alpha, t)) + A_c \cos(-\Delta\omega t + \varphi_c(\alpha, t) - \\ - \hat{\varphi}_p(\alpha, t)) - \hat{A}_c \cos(-\Delta\omega t + \hat{\varphi}_c(\alpha, t) - \hat{\varphi}_p(\alpha, t)) + \\ + \xi(\alpha, t) \cos(\omega_p t + \hat{\varphi}_p(\alpha, t))). \quad (12)$$

Цифровое моделирование дифференциальных уравнений (3), (6), (9) проводилось в соответствии с методикой, изложенной

в работе [2]. Рассчитывались флюктуационные характеристики апостериорных дисперсий ошибок оценивания коэффициентов разложения фазы сигнала и помехи, флюктуационные характеристики ошибок измерения фазы сигнала и помехи в элементах АР  $\Delta\varphi_{(\cdot)}(\alpha, t) = \varphi_{(\cdot)}(\alpha, t) - \hat{\varphi}_{(\cdot)}(\alpha, t)$ , а также средний КНД самофокусирующейся антенной решетки (СФАР). Расчеты проводились при отношениях с-ш и п-ш, равных  $q^{(\cdot)} = 2; 8; 32; 128$ ; флюктуациях фазы полезного сигнала и помехи в элементах АР  $\sigma_{\varphi}^{(\cdot)} =$

$= \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$  при относительных пространственных радиусах

корреляции  $C_{\varphi}^{(\cdot)} = 0; 1; 2,5; 5; \infty$ .  $C_{\varphi}^{(\cdot)} = 0$  означает, что фазовый фронт является  $\delta$ -коррелированным. Отношение с-ш соответствует определению, принятому в работе [1].

При реализации алгоритма оценивания фазы сигнала и помехи низкочастотные фильтры в каналах фильтрации коэффициентов разложения  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$ , операторы которых определяются видом моделей, принятых для  $\psi_j^{(\cdot)}(t)$ , и соответственно равны  $K_j^{(\cdot)}(D) = \frac{1}{D + \beta_j^{(\cdot)}}$

( $D = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования), не будут пропускать

сигналы с частотами большими некоторой фиксированной частоты  $\Omega$ , соответствующей полосе пропускания низкочастотного фильтра. В этом случае выражения (7), (8) в уравнениях оценивания фазы сигнала и помехи приобретают вид

$$f^{(\cdot)}(\alpha, t) = \hat{A}_{(\cdot)}(A_{(\cdot)} \sin(\varphi_{(\cdot)}(\alpha, t) - \hat{\varphi}_{(\cdot)}(\alpha, t)) - \xi(\alpha, t) \sin(\omega_{(\cdot)} t + \hat{\varphi}_{(\cdot)}(\alpha, t)). \quad (13)$$

Это означает, что для  $|\Delta\omega| > \Omega$  каналы фильтрации сигнала и помехи работают независимо друг от друга и точность оценивания фазы помехи практически не влияет на точность оценивания фазы сигнала и наоборот.

Получаем задачу фильтрации фазы сигнала на фоне аддитивного белого шума, описанную в работе [2]. Для этого случая исследовалось влияние пространственного радиуса корреляции фазового

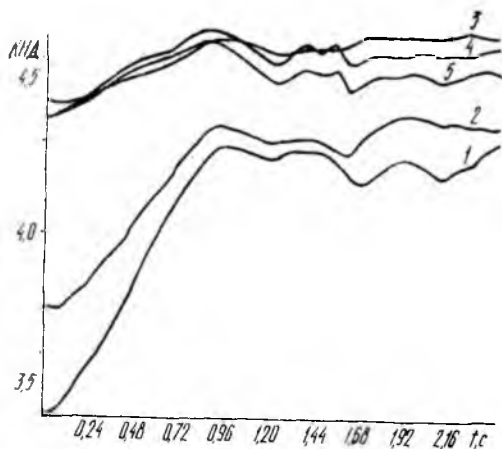


Рис. 2

фронта на качество фокусировки антенны в переходном и установившемся режимах работы системы фильтрации. На рис. 2 приведены графики среднего КНД СФАР при  $A_c = \hat{A}_c, \sigma_\varphi = \frac{\pi}{4}, q=8$ . Кривые 1...3 соответствуют случаю, когда предполагаемый относительный радиус корреляции входного фазового фронта равен истинному  $C_\varphi = 0; 1; 5$ . Их несовпадение приводит к некоторому ухудшению качества фокусировки. Кривые 4, 5 получены при условии, что истинный относительный радиус корреляции входного фазового фронта  $C_\varphi = 5$ ; а параметры системы фильтрации рассчитывались в предположении  $C_\varphi$ , равно 1 и 0 соответственно.

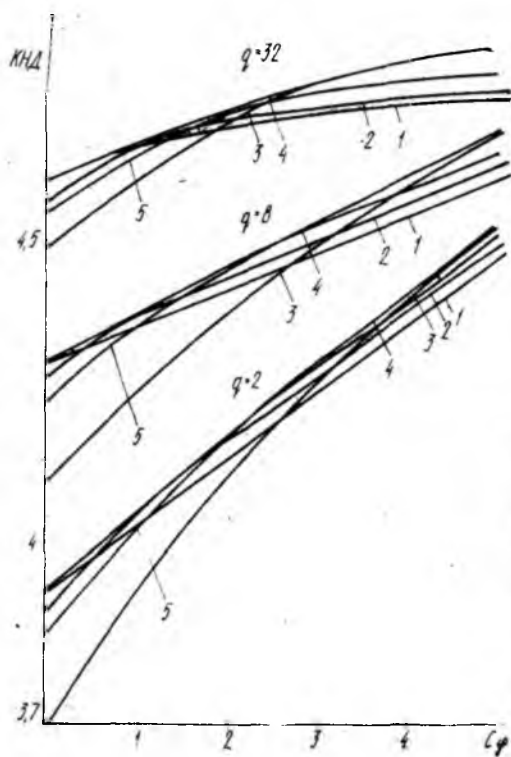


Рис. 3

Подробное влияние качества информации о пространственном радиусе корреляции на процесс фокусировки для различных значений

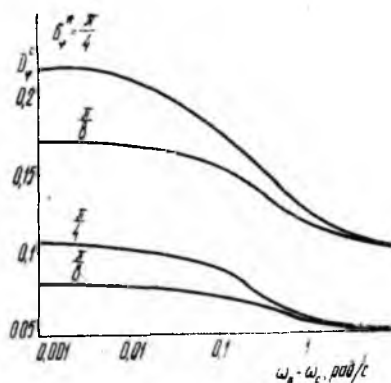


Рис. 4

отношения  $s$ —ш показано на рис. 3. По оси абсцисс откладывается истинный относительный радиус корреляции входного фазового фронта. Кривые 1 соответствуют предполагаемому  $C_\varphi = 0$ , 2 —  $C_\varphi = 1$ , 3 —  $C_\varphi = 5$ , 5 —  $C_\varphi = 2,5$ , кривыми 4 обозначены оптимальные огибающие, когда истинный радиус корреляции входного фазового фронта совпадает с предполагаемым.

Обозначим:  $\bar{x}$  — средний КНД СФАР в случае известного пространственного радиуса корреляции,  $\bar{x}^*(C_\varphi)$  — средний КНД для выбранного значения  $C_\varphi$ . Назовем величину  $\delta x(C_\varphi) = (\bar{x} - \bar{x}^*(C_\varphi)) / \bar{x}$  снижением КНД.

Из анализа семейств кривых видно, что при отсутствии точной информации о радиусе корреляции входного фазового фронта его

следует предполагать равным половине длины апертуры АР, что соответствует  $C_{\varphi} = 2,5$ . Здесь снижение КНД не превышает 1 %. Выбор радиуса корреляции фазового фронта равным величине апертуры АР ( $C_{\varphi} = 5$ ), так же как и предположение о его  $\delta$ -коррелированности ( $C_{\varphi} = 0$ ), может привести к снижению КНД примерно на 6 %.

Длительность переходных процессов в системе измерения фазы сигнала не зависит от величины радиуса корреляции фазового фронта, что подтверждается кривыми, представленными на рис. 2. Аналогичными расчетами установлено также, что при увеличении отношения с-ш длительность переходных процессов уменьшается, а дисперсия флюктуаций фазы в элементах АР не влияет на длительность переходных процессов.

Пусть помеха действует вместе с сигналом на одной или близких частотах  $|\Delta\omega| < \Omega$ . Тогда низкочастотные фильтры пропускают слагаемые, связывающие сигнал и помеху. Точность фильтрации фазы сигнала здесь зависит от параметров помехи, если помеха действует в области главного лепестка ДН, причем качество оценивания ухудшается по мере сближения источников сигнала и помехи.

На рис. 4 приведены графики зависимостей дисперсии ошибки оценивания фазы сигнала от разности несущих частот для различных дисперсий флюктуаций фаз сигнала и помехи в элементах АР при  $\delta$ -коррелированных фазовых фронтах и  $q^{(1)} = 32$ . Верхняя

пара графиков соответствует  $\sigma_{\varphi}^c = \frac{\pi}{4}$ , нижняя —  $\sigma_{\varphi}^c = \frac{\pi}{8}$ . Направления прихода фазовых фронтов сигнала и помехи выбраны совпадающими.

Таким образом, приведенные выше результаты анализа показывают, что наличие помехи ухудшает точность оценивания фазы сигнала только в пределах полосы пропускания низкочастотных фильтров в каналах фильтрации коэффициентов разложения фазы. Это влияние тем сильнее, чем ближе несущие частоты.

Для лучшей фокусировки СФАР при неопределенном радиусе корреляции фазового фронта для расчета параметров системы фильтрации следует выбирать его равным половине длины апертуры АР.

**Список литературы:** 1. Маслов А. Ф., Нестеров К. П. Квазиоптимальный алгоритм обнаружения сигнала и измерения его параметров на выходах элементов антенной решетки, работающей в неоднородной среде при наличии коррелированных помех // Радиотехника и электрон. 1986. № 4. С. 710—720. 2. Маслов А. Ф., Нестеров К. П., Жолобенко А. Б. Моделирование квазиоптимального алгоритма измерения амплитуд и фаз сигналов на выходах элементов антенной решетки // Радиотехника. 1986. Вып. 78. С. 80—87. 3. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М., 1979. 416 с. 4. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М., 1975. 704 с.

Поступила в редколлегию 27.06.86