

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

В.А. Тихонов, В.М. Безрук

МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ
В СТАТИСТИЧЕСКОЙ РАДИОТЕХНИКЕ

Харьков 2020

УДК 621.396.2

*Рекомендовано науково-техничною радою
Харківського національного університету радіоелектроніки
(протокол № 3 від 20.11.2018 року)*

Тихонов В.А., Безрук В.М. Моделі лінійного передбачення в статичній радіотехніці: Монографія. – Харків: ХНУРЕ, 2020. – 492 с. – російською мовою.

ISBN

DOI:

Книга присвячена розвитку нових методів аналізу та обробці гауссових та негауссових випадкових сигналів за допомогою моделей лінійного передбачення. Розглянуті методи прикладного аналізу випадкових процесів дають змогу не лише повно видобувати інформацію з реальних процесів, але й раціонально її представляти та обробляти.

Книга вміщує як наукові, так і навчально-методичні матеріали, які будуть корисні студентам і аспірантам спеціальності 172 Телекомунікації та радіотехніка. Матеріал книги слід використовувати для поглибленого вивчення ряду навчальних дисциплін, а саме, «Теоретичні основи радіотехніки», «Радіоланцюги та сигнали», «Теорія електричного зв'язку», «Цифрова обробка сигналів», «Основи інфокомунікаційних технологій», «Математичні методи аналізу даних», «Основи наукових досліджень». Крім того матеріал книги може бути використаний магістрами та аспірантами при проведенні досліджень та підготовки атестаційних робіт за цією спеціальністю.

УДК 621.396.2

Рецензенти:

В.М. Карташов, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри МІРЕС, Харківський національний університет радіоелектроніки;

В.В. Бараннік, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри бойового використання та експлуатації АСУ, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба.

© Тихонов В.А.,
Безрук В.М., 2020

*Рекомендовано научно-техническим советом
Харьковского национального университета радиоэлектроники
(протокол № 3 от 20.11.2018 года)*

Тихонов В.А., Безрук В.М. Модели линейного предсказания в статистической радиотехнике: Монография. – Харьков: ХНУРЭ, 2020. – 492 с.

ISBN

DOI:

Книга посвящена развитию новых методов анализа и обработки гауссовых и негауссовых случайных сигналов с помощью моделей линейного предсказания. Рассмотренные методы прикладного анализа случайных процессов дают возможность не только достаточно полно извлекать информацию из реальных процессов, но и рационально ее представлять и обрабатывать.

Книга содержит как научные, так и учебно-методические материалы, которые будут полезны студентам и аспирантам специальности «Телекоммуникации и радиотехника». Материал книги следует использовать при углубленном изучении ряда учебных дисциплин, в частности, «Теоретические основы радиотехники», «Радиоцепи и сигналы», «Теория электрической связи», «Цифровая обработка сигналов», «Основы инфокоммуникационных технологий», «Математические методы анализа данных», «Основы научных исследований». Кроме того, материал книги может быть использован магистрами и аспирантами при проведении исследований и подготовке аттестационных работ по этой специальности.

Рецензенты:

В.М. Карташов, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедры МИРЭС, Харьковский национальный университет радиоэлектроники;

В.В. Баранник, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедры боевого применения и эксплуатации АСУ, Харьковский национальный университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба.

© Тихонов В.А.,
Безрук В.М., 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	10
1 МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	14
1.1 ВВЕДЕНИЕ	14
1.2 МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ.....	15
1.2.1 Принципы построения модели авторегрессии.....	15
1.2.2 Спектр процесса авторегрессии.....	20
1.2.3 Характеристическое уравнение модели авторегрессии.....	22
1.2.4 АР фильтры.....	24
1.2.5 Корреляционная функция процесса авторегрессии	28
1.3 МОДЕЛЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО	30
1.4 МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ – СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО	35
ЛИТЕРАТУРА.....	44
2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ	45
2.1 ВВЕДЕНИЕ	45
2.2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АР	46
2.2.1 Имитационный процесс с параметрами реального сигнала	46
2.2.2 Генерация случайных процессов с помощью модели авторегрессии	47
2.2.3 Низкочастотный случайный процесс АР с корреляционной функцией	50
2.2.4 Имитационный процесс АР второго порядка с корреляционной функцией.....	51
2.2.5 Имитационный процесс АР третьего порядка с корреляционной функцией	55
2.3 ИМИТАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ СС.....	55
2.4 ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ И ПРОЦЕССА СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО С ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ	57
ЛИТЕРАТУРА.....	63
3 МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	64
3.1 ВВЕДЕНИЕ	64
3.2 МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ – ПРОИНТЕГРИРОВАННОГО СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО.....	64
3.3 МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ СЕЗОННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ	70
3.4 ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ	71
3.5 ВЫБОР ПОРЯДКА МОДЕЛЕЙ АР И СС.....	73
ЛИТЕРАТУРА.....	76
4 ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ АРПСС	77
4.1 ВВЕДЕНИЕ	77
4.2 ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПО МОДЕЛИ АРПСС.....	77
4.3 ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ПЕРЕГОВОРОВ В СИСТЕМЕ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ.....	80
ЛИТЕРАТУРА.....	91
5 КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.....	92
5.1 ВВЕДЕНИЕ	92
5.2 КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ	92
5.3 КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЕЛИ АР УЗКОПОЛОСНЫХ СИГНАЛОВ	99
5.3.1 Квадратурная обработка узкополосных сигналов	99
5.3.2 Модель авторегрессии комплексной огибающей аналитического сигнала.....	102

5.3.3 Модель авторегрессии первого порядка комплексной огибающей узкополосного сигнала.....	106
5.3.4 Модель авторегрессии второго порядка комплексной огибающей узкополосного сигнала.....	110
5.3.5 Модель авторегрессии аналитического сигнала с детерминированной частотой.....	113
ЛИТЕРАТУРА.....	117
6 РЕШЕТЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ	118
6.1 ВВЕДЕНИЕ.....	118
6.2 АЛГОРИТМ ЛЕВИНСОНА–ДАРБИНА.....	118
6.3 СИНТЕЗ РЕШЕТЧАТОГО ФИЛЬТРА.....	126
6.4 ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕШЕТЧАТЫХ ФИЛЬТРОВ	131
6.5 ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ РЕШЕТЧАТЫХ ФИЛЬТРОВ	134
ЛИТЕРАТУРА.....	137
7 СЖАТИЕ РЕЧИ В СТАНДАРТЕ СОТОВОЙ СВЯЗИ GSM.....	138
7.1 ВВЕДЕНИЕ.....	138
7.2 КОДИРОВАНИЕ РЕЧИ МЕТОДОМ LPC–LTP–RPE	139
7.3 ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФОНЕМЫ В ПРОЦЕССЕ КОДИРОВАНИЯ РЕЧИ.....	151
7.4 СТРУКТУРА ДЕКОДЕРА РЕЧИ В СТАНДАРТЕ GSM.....	156
ЛИТЕРАТУРА.....	160
8 МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ	161
8.1 ВВЕДЕНИЕ.....	161
8.2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОВЫШЕННОЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ.....	162
8.3 ОБЩИЙ ВИД РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ РАСПОЗНАВАНИЯ ЗАДАННЫХ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ КЛАССА НЕИЗВЕСТНЫХ СИГНАЛОВ	163
8.4 ВЫБОР ПОРОГОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ В РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ЗАДАННЫХ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИЗВЕСТНЫХ СИГНАЛОВ	168
8.5 АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ.....	170
8.5.1 Особенности описания распознаваемых сигналов вероятностной моделью в виде AP модели.....	172
8.5.2 Парето-оптимальные алгоритмы распознавания сигналов на основе авторегрессионной модели.....	176
8.6 АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ ПО ОЦЕНКАМ ПАРАМЕТРОВ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ.....	178
8.7 ОСОБЕННОСТИ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ЗАДАННЫХ СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ КЛАССА НЕИЗВЕСТНЫХ СИГНАЛОВ	181
8.8 ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК АВТОРЕГРЕССИОННЫХ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ СИГНАЛОВ	182
ЛИТЕРАТУРА.....	189
9 РАДИОЛОКАЦИОННОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ МЕТЕООБЪЕКТОВ ПО ФЛУКТУАЦИЯМ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТРАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ	191
9.1 ВВЕДЕНИЕ.....	191
9.2 АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ МЕТЕООБЪЕКТОВ ПО ФЛУКТУАЦИЯМ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТРАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ.....	192
9.3 РАДИОЛОКАЦИОННЫЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ	193
9.4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ МЕТЕООБЪЕКТОВ	194
ЛИТЕРАТУРА.....	200

10 РАДИОЛОКАЦИОННОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПО ПАЧКЕ ОТРАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ШИРОКОПОЛОСНОМ ЗОНДИРОВАНИИ.....	201
10.1 ВВЕДЕНИЕ	201
10.2 КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД РАСПОЗНАВАНИЯ ОБЪЕКТОВ ПО ДАЛЬНОСТНО–ЧАСТОТНЫМ ПОРТРЕТАМ	201
10.3 МЕТОД РАДИОЛОКАЦИОННОГО РАСПОЗНАВАНИЯ ОБЪЕКТОВ ПО ПАЧКЕ ДАЛЬНОСТНЫХ ПОРТРЕТОВ НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНОЙ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ	204
ЛИТЕРАТУРА.....	207
11 АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ СТАДИЙ СНА ПО ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММАМ	208
11.1 ВВЕДЕНИЕ	208
11.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЭГ И АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ СТАДИЙ СНА	209
11.3 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСПОЗНАВАНИЯ СТАДИЙ СНА ПО ЭЭГ	211
ЛИТЕРАТУРА.....	216
12 СЕЛЕКЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ РАДИОСИГНАЛОВ ПРИ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ РАДИОКОНТРОЛЕ	217
12.1 ВВЕДЕНИЕ	217
12.2 ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАДИОСИГНАЛОВ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛЬЮ.....	217
12.3 ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЕЛЕКЦИИ И РАСПОЗНАВАНИЯ ЗАДАННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ	218
12.4 ОЦЕНИВАНИЕ РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ РАДИСИГНАЛОВ	219
ЛИТЕРАТУРА.....	225
13 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	226
13.1 ВВЕДЕНИЕ	226
13.2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ФУНКЦИИ.....	228
13.3 ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ.....	230
13.4 АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ.....	233
13.5 СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	239
13.6 СПЕКТРЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ.....	242
ЛИТЕРАТУРА.....	247
14 ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ	248
14.1 ВВЕДЕНИЕ	248
14.2 ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ	249
14.3 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ТРЕТЬЕГО РАНГА	250
14.4 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ЧЕТВЕРТОГО РАНГА	256
14.5 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО РАНГА	262
ЛИТЕРАТУРА.....	266
15 ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО	267
15.1 ВВЕДЕНИЕ	267
15.2 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ТРЕТЬЕГО РАНГА	267
15.3 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ЧЕТВЕРТОГО РАНГА	271
15.4 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ПРОИЗВОЛЬНОГО РАНГА.....	276
ЛИТЕРАТУРА.....	279
16 ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО	280
16.1 ВВЕДЕНИЕ	280
16.2 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ТРЕТЬЕГО РАНГА	280
16.3 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ЧЕТВЕРТОГО РАНГА.....	284

16.3.1 Модель ОАРСС четвертого ранга Z	284
16.4 ВЫБОР ПОРЯДКА И РАНГА ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ	287
ЛИТЕРАТУРА.....	291
17 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ.....	292
17.1 ВВЕДЕНИЕ	292
17.2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ АВТО-РЕГРЕССИОННЫМИ СИСТЕМАМИ	292
17.3 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ АВТОРЕГРЕССИОННЫМИ СИСТЕМАМИ	295
17.4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМАМИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО	298
17.5 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ СИСТЕМАМИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО.....	300
ЛИТЕРАТУРА.....	303
18 КУМУЛЯНТНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО.....	304
18.1 ВВЕДЕНИЕ	304
18.2 ОБОБЩЕННАЯ КУМУЛЯНТНАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ВТОРОГО РАНГА	305
18.3 ОБОБЩЕННАЯ КУМУЛЯНТНАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО ТРЕТЬЕГО РАНГА	309
ЛИТЕРАТУРА.....	315
19 КОМПЛЕКСНАЯ ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ.....	316
19.1 ВВЕДЕНИЕ	316
19.2 СВОЙСТВА МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПРОЦЕССА.....	316
19.3 ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ КОМПЛЕКСНОГО ПРОЦЕССА	318
19.4 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ КОМПЛЕКСНЫХ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ	320
19.5 ГЕНЕРАЦИЯ ОДНОМОДОВЫХ КОМПЛЕКСНЫХ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЗАДАНЫМ ПАРАМЕТРАМ СПЕКТРА ВЫСШЕГО ПОРЯДКА.....	321
19.6 ГЕНЕРИРОВАНИЕ ДВУМОДОВЫХ КОМПЛЕКСНЫХ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПО ЗАДАНЫМ ПАРАМЕТРАМ СПЕКТРА ВЫСШЕГО ПОРЯДКА.....	323
ЛИТЕРАТУРА.....	327
20 ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ.....	328
20.1 ВВЕДЕНИЕ	328
20.2 ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	328
20.3 ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ.....	334
20.4 ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕГАУССОВА БЕЛОГО ШУМА В ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ	337
20.5 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА	338
20.6 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА	341
ЛИТЕРАТУРА.....	344
21 СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ.....	345
21.1 ВВЕДЕНИЕ	345
21.2 ОЦЕНИВАНИЕ СПЕКТРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО	346
21.3 СПЕКТРЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ	349
21.4 ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЗАДАНЫМИ ФОРМАМИ СПЕКТРОВ	351
21.5 ГЕНЕРАЦИЯ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ОБОБЩЕННОЙ АВТОРЕГРЕССИИ С ЗАДАНЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ	353
1. Низкочастотный случайный негауссов процесс ОАР с пиком на нулевой частоте	354

2. Одномодовый случайный негауссов процесс ОАР второго порядка с заданными частотой пика f_1 и шириной полосы Δf_1	356
3. Двухмодовый случайный процесс ОАР третьего порядка.....	360
4. Двухмодовый случайный процесс ОАР четвертого порядка.....	361
ЛИТЕРАТУРА.....	366
22 СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО.....	367
22.1 ВВЕДЕНИЕ.....	367
22.2 СПЕКТРЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО	367
22.3 ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА ОБОБЩЕННОГО СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО С ЗАДАНЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ	369
ЛИТЕРАТУРА.....	373
23 ОЦЕНКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА И КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ.....	374
23.1 ВВЕДЕНИЕ	374
23.2 АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕССА.....	375
23.3 ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА СИГНАЛОВ ПРИ НАЛИЧИИ АДДИТИВНОГО БЕЛОГО ШУМА	383
23.4 ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ НАЛИЧИИ АДДИТИВНЫХ ПОМЕХ ИЛИ БЕЛОГО ШУМА	385
23.5 ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СПЕКТРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НЕГАУССОВА СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ ШИРОКОПОЛОСНОЙ ГАУССОВОЙ КОРРЕЛИРОВАННОЙ ПОМЕХИ.....	387
23.6 ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ НЕГАУССОВА ПРОЦЕССА НА ФОНЕ ГАУССОВА БЕЛОГО ШУМА	391
ЛИТЕРАТУРА.....	395
24 СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.....	397
24.1 ВВЕДЕНИЕ	397
24.2 ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ОБОБЩЕННЫХ ФИЛЬТРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ НА ФОНЕ НЕГАУССОВЫХ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ	398
24.3 ВИНЕРОВСКИЙ КОМПЕНСАТОР НЕГАУССОВЫХ ПОМЕХ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИК ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА	405
24.4 ОБОБЩЕННЫЙ РЕШЕТЧАТЫЙ ФИЛЬТР	410
ЛИТЕРАТУРА.....	417
25 РАСПОЗНАВАНИЕ СИГНАЛОВ ПО МОДЕЛЯМ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ.....	419
25.1 ВВЕДЕНИЕ.....	419
25.2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТАТИСТИК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЗАДАЧЕ РАСПОЗНАВАНИЯ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ	420
25.3 РАСПОЗНАВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ АДДИТИВНЫХ ПОМЕХ	426
25.4 РАСПОЗНАВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ФИЛЬТРОВ	429
ЛИТЕРАТУРА.....	435
26 РАСПОЗНАВАНИЕ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ.....	436
26.1 ВВЕДЕНИЕ	436
26.2 АНАЛИЗ СВОЙСТВ СИГНАЛОВ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ.....	436
26.3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ В КАЧЕСТВЕ ВЕКТОРА ПРИЗНАКОВ КОЭФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЕЙ АР И ОАР.....	438
26.4 УСТРОЙСТВА РАСПОЗНАВАНИЯ НА ОСНОВЕ ОБЕЛЯЮЩИХ ФИЛЬТРОВ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ	443
ЛИТЕРАТУРА.....	450

27 ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ И СТАТИСТИК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В КАНАЛАХ СВЯЗИ	451
27.1 ВВЕДЕНИЕ	451
27.2 МОДЕЛИРОВАНИЕ КАНАЛОВ СВЯЗИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ	451
27.3 КОРРЕКТОРЫ КАНАЛОВ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ	455
27.4 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА АДАПТАЦИИ КОРРЕКТОРА МЕЖСИМВОЛЬНЫХ ИСКАЖЕНИЙ.....	466
27.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРРЕКЦИИ МЕЖСИМВОЛЬНЫХ ИСКАЖЕНИЙ СИСТЕМЫ SDSL	469
ЛИТЕРАТУРА.....	472
28 ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ , ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ	474
28.1 ВВЕДЕНИЕ	474
28.2 ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ	475
28.3 СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ.....	481
28.4 МАТРИЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ВНЕШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ	484
28.5 ВЕКТОРНАЯ ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ ТРЕТЬЕГО РАНГА	487
ЛИТЕРАТУРА.....	490
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	491

ВВЕДЕНИЕ

Современное развитие статистических методов в радиотехнике опирается на прикладные и теоретические исследования цифрового анализа и обработки случайных сигналов. Быстрые темпы внедрения вычислительной техники и методов обработки данных на базе процессоров коренным образом изменили не только аппаратуру обработки информационных сигналов, но и сами методы их обработки. На основе вычислительной техники был осуществлен переход от технических способов преобразования сигналов к математической обработке на основе статистических моделей.

В связи с этим актуальной задачей становится совершенствование методов статистического анализа и создание новых способов обработки данных. Книга посвящена развитию новых методов анализа случайных сигналов в радиотехнике с помощью моделей линейного предсказания.

Рассмотренные методы прикладного анализа случайных процессов дают возможность не только достаточно полно извлекать информацию из реальных процессов, но и рационально ее представлять и обрабатывать.

Существующие модели линейного предсказания используют только корреляционные характеристики. Полной характеристикой негауссовых процессов являются наборы кумулянтных или моментных функций всех порядков. Наибольший практический интерес представляют, как правило, кумулянтные или моментные функции второго, третьего и четвёртого порядков. Даже такое ограниченное использование статистических характеристик негауссовых процессов требует достаточно большего объёма вычислений и необходимости работы с многомерными массивами.

Поэтому использование параметров моделей линейного предсказания, рассчитанных по моментным или кумулянтным функциям, существенно уменьшает информационные массивы статистических характеристик, а в ряде интересных задач позволяет ограничиваться одномерным представлением. При этом информация, содержащаяся в моментных и кумулянтных функциях, концентрируется в ограниченном количестве коэффициентов моделей линейного предсказания. Кроме этого, модели линейного предсказания обладают конструктивными свойствами, позволяющими создавать на их базе эффективные способы и устройства анализа и обработки случайных процессов. Необходимо отметить, что все полученные выражения для обобщённых моделей органично вырождаются в обычные модели линейного предсказания при переходе от моментов и кумулянтов высших порядков к корреляционным функциям, которые являются кумулянтами второго порядка.

Материал книги условно можно разделить на две части. В первой части (разделы 1–12) рассматриваются модели линейного предсказания гауссовых и негауссовых сигналов в рамках корреляционной теории.

Во второй части книги (разделы 13–28) теория линейного предсказания обобщается на статистики высших порядков, и использует негауссовы

характеристики случайных сигналов. Для упрощения использования изложенных материалов рассмотрены отдельно действительные и комплексные модели линейного предсказания, стационарные и нестационарные модели. Изложение теоретического материала подкрепляется многочисленными примерами их практического использования при решении различных задач анализа и обработки сигналов.

В разделе 1 изложены основные соотношения теории линейного предсказания стационарных сигналов. Во втором разделе представлены алгоритмы генерации случайных сигналов на основе моделей линейного предсказания. В разделах 3 и 4 изложены нестационарные модели линейного предсказания и рассмотрены примеры прогноза данных в системе мобильной связи. Комплексные модели авторегрессии, изложенные в разделе 5, представлены как обработка действительной и мнимой части комплексного сигнала, а также комплексного сигнала в целом. Важную роль в линейном предсказании играют решетчатые структуры, теория которых изложена в шестом разделе. На примере метода сжатия речи в системе мобильной связи стандарта GSM, продемонстрировано применение решетчатых фильтров для анализа и синтеза речевых сигналов.

В разделе 8 синтезированы алгоритмы распознавания случайных сигналов для нетрадиционных постановок, в частности, для случая появления, наряду с заданными в вероятностном смысле сигналами, неизвестных сигналов, а также для многокритериальной постановки, когда при синтезе учитывается совокупность показателей качества эффективности и затрат. В разделах приводятся результаты исследования методов распознавания сигналов на основе АР моделей при решении разных типов практических задач распознавания, в частности, распознавания метеообъектов в радиометеорологии (раздел 9), радиолокационного распознавания объектов (раздел 10), селекции и распознавания заданных радиоизлучений в автоматизированном радиоконтроле (раздел 11), автоматизированного распознавания стадий сна в медицинской диагностике (раздел 12).

Прежде чем излагать негауссовы обобщенные модели линейного предсказания, авторы считают целесообразным изложить используемые далее элементы теории случайных процессов высших порядков (раздел 13). В разделах 14–16 представлены основы негауссовых моделей авторегрессии, скользящего среднего и авторегрессии – скользящего среднего негауссовых сигналов. К этим моделям также можно прийти, рассматривая задачу преобразования моментных функций в линейных системах, описываемых моделями авторегрессии и скользящего среднего (раздел 17). Для построения обобщенных моделей линейного предсказания также можно использовать кумулянтные функции. Это показано в восемнадцатой главе на примере модели авторегрессии–скользящего среднего.

Определенные сложности возникают при построении комплексных обобщенных моделей линейного предсказания. На примере обобщенной

модели авторегрессии, описанной в разделе 19, авторы излагают подход к построению таких комплексных моделей.

В разделах 20–22 изложены основы параметрического метода спектрального анализа высших порядков. Показано, что операторный анализ моделей линейного предсказания также позволяет получить выражения для параметрических оценок спектров высших порядков.

В разделе 23 приведены несколько примеров использования спектров высших порядков для анализа негауссовых сигналов. Отметим, что решать такие задачи, оставаясь в рамках корреляционной теории, невозможно.

Статистические характеристики высших порядков позволяют синтезировать обобщенный винеровский и решетчатый фильтр (раздел 24).

Новые возможности обобщенных моделей линейного предсказания в задачах распознавания негауссовых сигналов и гауссовых сигналов на фоне негауссовых помех рассмотрены в разделах 25 и 26.

Примеры использования обобщенных моделей линейного предсказания в телекоммуникациях представлены в разделе 27.

В алгебрах векторов и матриц используются различные способы их попарного умножения. Статистики высших порядков, например, моментные функции, используют произведения трех, четырех и выше векторов. Поэтому, в разделе 28 предпринята попытка обобщить некоторые произведения векторов и матриц на произвольное число сомножителей. В этом разделе также приведен пример построения обобщенной модели авторегрессии в векторном виде с использованием обобщенной алгебры произведения векторов и матриц. Материал книги представляет интерес для широкого круга специалистов: исследователей и преподавателей, начинающих учёных и профессионалов, а также студентов, которые занимаются статистической обработкой данных, гауссовых и негауссовых случайных сигналов, решают задачи моделирования и прогнозирования, спектрального анализа второго и высших порядков, работающих в области распознавания образов и защиты от помех.

По мнению авторов, в отечественной литературе отсутствуют книги, в которых достаточно доступно и подробно рассматривается применение моделей линейного предсказания в статистической радиотехнике.

Поэтому в книгу включены не только материалы, представляющие научно-практический интерес, но и учебно-методические материалы, позволяющие освоить основы теории линейного предсказания, понять ее связь с традиционными методами статистической радиотехники при построении математических моделей случайных сигналов, а также при анализе и обработке сигналов.

Материал книги следует использовать при углубленном изучении студентами ряда учебных дисциплин, в частности, «Теоретические основы радиотехники», «Радиоцепи и сигналы», «Теория электрической связи», «Цифровая обработка сигналов», «Основы инфокоммуникационных технологий», «Математические методы анализа данных», «Основы научных исследований», а также при проведении исследований и подготовке

аттестационных работ магистрами и аспирантами по специальности «Телекоммуникации и радиотехника».

Авторы выражают благодарность Н.И. Кравченко, К.В. Нетребенко, И.В. Савченко.

1 МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1 Введение

В разделе рассматриваются стационарные в широком смысле действительные случайные процессы, у которых два первых момента и корреляционная функция не меняются во времени. Представленные ниже модели можно использовать и для процессов стационарных в узком смысле. Такие процессы описываются независимыми от времени функциями распределения, плотностями вероятности, моментными и кумулянтными функциями некоторых порядков [1].

Принципы построения моделей линейного предсказания включают:

1. Выбор типа модели и соответствующего разностного уравнения модели по априорной или апостериорной информации, а также из условий решаемой задачи.
2. Определение условия оптимальности модели.
3. Получение уравнений для расчета параметров модели.
4. Оценивание порядка модели.
5. Нахождение выражений для параметрической оценки СПМ.
6. Проверка, удовлетворяет ли полученная модель условию стационарности или обратимости процесса.
7. Синтез формирующего или обеляющего фильтров, определение характеристик фильтров.
8. В случае необходимости оценивание и идентификация моделей.

При построении классических моделей линейного предсказания, за исключением некоторых случаев, например, когда оговаривается тип распределения процесса, ограничений на плотность распределения моделируемых процессов не накладывается. Так как параметры моделей определяются по корреляционным функциям, классические модели рассматриваются в рамках корреляционной теории.

Кроме традиционно излагаемых в подобной литературе элементов теории авторегрессии (АР), скользящего среднего (СС) и авторегрессии – скользящего среднего (АРСС) случайных процессов [2], в этом разделе разработаны методы генерации стационарных случайных процессов линейного предсказания с задаваемыми параметрами спектральной плотности мощности СПМ. Генерация случайных процессов осуществляется с помощью формирующих фильтров, на вход которых подается порождающий процесс типа белого шума. Показана связь параметров АР, СС и АРСС моделей и характеристик процесса, таких как центральная частота и ширина полосы по уровню 0,5 СПМ. Разностные уравнения моделей позволяют генерировать случайные процессы, содержащие один и более максимумов в СПМ. Представленная методика получения случайных процессов использовались

в дальнейшем при имитационном моделировании гауссовых и негауссовых случайных процессов.

1.2 Модель авторегрессии

1.2.1 Принципы построения модели авторегрессии

Модель АР рационально использовать для узкополосных случайных процессов. В основу модели АР положена корреляция отсчета случайного процесса в текущий момент времени с некоторым конечным или бесконечным числом отсчетов в предыдущие моменты времени. Корреляционные связи позволяют осуществить регрессию текущего отсчета на предшествующие. Такой вид регрессии называется авторегрессией. Будем полагать, что коррелированный случайный процесс $x[t]$, стационарный с нулевым средним. В уравнении АР текущий отсчет представляется взвешенной суммой предыдущих отсчетов с некоторыми коэффициентами веса [2]

$$x[t] = \sum_{j=1}^p \Phi[j]x[t-j] + a[t], \quad (1.1)$$

где $\Phi[j]$ – коэффициенты АР, $a[t]$ – некоррелированные случайные отсчеты, p – порядок модели АР. Модель (1.1) оптимальна, если

$$E\{a[t]a[t-i]\} = 0, \quad i > 0, \quad (1.2)$$

где $E\{\}$ обозначает статистическое усреднение. Условие оптимальности позволяет получить уравнения и определить критерии для определения параметров модели – коэффициентов АР и порядка модели.

Величина

$$\tilde{x}[t] = \sum_{j=1}^p \Phi[j]x[t-j] \quad (1.3)$$

называется предсказанием случайной величины. Разность между текущим значением отсчета и его предсказанием называется ошибкой предсказания

$$a[t] = x[t] - \tilde{x}[t]. \quad (1.4)$$

Величина $a[t]$ характеризует максимальную точность предсказания текущего отсчета, а ее статистические свойства определяют выбор порядка модели АР.

Модель АР, описываемая выражением (1.1), имеет несколько интерпретаций. (1.1) это линейное стохастическое разностное уравнение,

описывающее изменение случайной функции $x[t]$, при случайном воздействии $a[t]$. Разностное уравнение является дискретным представлением непрерывного дифференциального уравнения. Естественно, что коэффициенты разностного и соответствующего дифференциального уравнения не совпадают, но их можно связать, приравняв коэффициенты при соответствующих отсчетах модели. Случайный процесс, описываемый разностным уравнением (1.1), обычно задан. Поэтому решается обратная задача, сводящаяся к нахождению параметров разностного уравнения при известной случайной функции $x[t]$.

Уравнение (1.1) можно рассматривать как выход $x[t]$ линейной системы с обратной связью, состоящей из p звеньев, на вход которой подается белый шум $a[t]$. Параметры системы совпадают с параметрами модели АР. Они достаточно просто рассчитываются по корреляционной функции и дисперсии выхода. Разностное уравнение (1.1) описывает формирующий фильтр, на вход которого подается гауссов или негауссов белый шум. В качестве параметров фильтра используются коэффициенты модели АР, рассчитанные для реального процесса. Параметры фильтра можно также рассчитать по заданным характеристикам СПМ.

Если входом системы считать коррелированный процесс, а выходом является белый шум, выражение (1.1) может описывать систему в виде обесцвечивающего фильтра. Используя параметры модели, можно определить передаточную функцию системы, ее импульсную характеристику и переходную функцию. На основе амплитудно-частотной характеристики системы получают выражение для параметрической спектральной оценки.

Уравнение (1.1) также интерпретируется как линейное предсказание текущего отсчета случайного процесса $x[t]$ по известным p предшествующим отсчетам $x[t - j]$. Коэффициенты веса находятся с учетом корреляционных статистических связей между отсчетами процесса. Предсказание является оптимальным, так как коэффициенты веса определяются из условия минимума дисперсии ошибки предсказания $a[t]$. В рамках статистик второго порядка минимум дисперсии ошибок предсказания эквивалентен их некоррелированности [1]. Найденные таким образом коэффициенты учитывают всю информацию о статистических связях процесса, так как ошибка предсказания некоррелированная и не содержит неучтенной информации. Такая интерпретация важна в задаче линейного прогнозирования случайных процессов.

К моделям линейного предсказания можно прийти, используя метод наименьших квадратов (МНК). Метод минимизирует сумму квадратов отклонений наблюдаемого случайного процесса от, соответствующих по времени, рассчитанных значений регрессионного линейного уравнения. Минимизация осуществляется путем дифференцирования по коэффициентам регрессии и приравнивания производных к нулю. Для модели АР уравнение регрессии записывается в виде авторегрессии (1.3), а отклонения являются

ошибками предсказания (1.4). Уравнения для оптимальных по МНК оценок получают из выражения

$$\frac{dE\{a^2[t]\}}{d\Phi[j]} = \frac{dE\{(x[t] - \tilde{x}[t])^2\}}{d\Phi[j]} = \frac{dE\{(x[t] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]x[t-j])^2\}}{d\Phi[j]} = 0. \quad (1.5)$$

В литературе по линейному предсказанию чаще используется другой способ получения уравнений для расчета оптимальных коэффициентов АР, использующий условие статистической независимости ошибок предсказания. Это условие оптимальности можно использовать при построении моделей линейного предсказания на основе статистик высших порядков. МНК имеет ограничение только на статистики второго порядка.

Получим уравнения для расчета оптимальных оценок коэффициентов АР. Из (1.1) видно, что построение АР модели случайного процесса сводится к нахождению коэффициентов АР и определению порядка p . Умножив правую и левую части (1.1) на $x[t-i]$ и усреднив, можно получить систему $p+1$ уравнений

$$R[i] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]R[j-i] = 0, \quad i=1, \dots, p, \quad (1.6, a)$$

$$R[0] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]R[j] = D_a, \quad i=0, \quad (1.6, б)$$

где $R[i] = E\{x[t]x[t-i]\}$ – значения функции корреляции случайного процесса, D_a – дисперсия ошибок предсказания модели АР, $R[0]$ – дисперсия случайного процесса $x[t]$. Набор уравнений (1.6, а) и (1.6, б) называется полной системой уравнений Юла-Уокера. Решением этой системы являются коэффициенты АР и дисперсия ошибок предсказания. При выводе уравнений (1.6, а) было учтено условие оптимальности (1.2), из которого следует, что

$$E\{a[t]x[t-i]\} = 0, \quad i > 0.$$

Уравнения (1.6, а, б) можно также получить по МНК. Используя (1.5), имеем

$$E\{(x[t] - \sum_{j=1}^p \Phi[j]x[t-j])x[t-i]\} = 0.$$

После перемножения и усреднения, приходим к уравнениям Юла–Уокера (1.6, а, б).

Представим систему уравнений (1.6, а, б) в матричном виде

$$\vec{R} = R_p \vec{\Phi}, \quad (1.7, а)$$

где

$$\vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi[1] \\ \Phi[2] \\ \dots \\ \Phi[p] \end{bmatrix}, R_p = \begin{bmatrix} R[0] & R[1] & \dots & R[p-1] \\ R[1] & R[0] & \dots & R[p-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R[p-1] & R[p-2] & \dots & R[0] \end{bmatrix}, \vec{R} = \begin{bmatrix} R[1] \\ R[2] \\ \dots \\ R[p] \end{bmatrix}. \quad (1.7, б)$$

Корреляционная матрица R_p имеет теплицеву структуру, у которой элементы, расположенные на диагоналях, идентичны.

Решение матричного уравнения методом Юла-Уокера (1.6, а) можно записать так

$$\vec{\Phi} = R_p^{-1} \vec{R}. \quad (1.8)$$

Классический метод вычисления коэффициентов АР при длинных реализациях дает, как правило, устойчивые решения. Однако в силу разных причин, например, наличия погрешностей в измерениях, при коротких реализациях, решения уравнения (1.8) могут быть неустойчивыми. В этом случае малые изменения значений функции корреляции, приводят к большим изменениям коэффициентов АР. При коротких реализациях метод Юла–Уокера дает неточную оценку параметров, что приводит к снижению разрешающей способности параметрических спектральных оценок. Кроме этого, с ростом порядка модели существенно растет объем вычислений, связанных с обращением корреляционной матрицы. В связи с этим часто применяются более точные решения уравнения (1.7, а), позволяющие сократить количество операций использованием рекуррентных алгоритмов [3].

Порядок процесса АР определяется с использованием различных критериев, как правило, основанных на минимизации некоторой теоретико-информационной функции. Для определения порядка модели пользуются методами Бартлетта, Акайке, Парзена и др. Порядок модели можно находить из условия не убывания дисперсии ошибки предсказания при дальнейшем повышении порядка. Довольно эффективным методом определения порядка модели АР является метод, основанный на проверке близости корреляционной функции случайного процесса на выходе обесцараженного АР фильтра к корреляционной δ -функции белого шума. Способы оценки порядка моделей линейного предсказания будут описаны в разделе 3.

Как видно из (1.6, а), уравнение не изменится, если вместо $R[i]$ использовать нормированные значения функции корреляции $r[i] = R[i] / R[0]$, которые будем называть коэффициентами корреляции. Очевидно, что при этом параметры модели АР останутся прежними. Это важное свойство инвариантности параметров модели к мощности процесса полезно при решении ряда задач статистической радиотехники. Выражение (1.6, б) определяет мощность процесса через параметры модели и мощность ошибки предсказания.

Как следует из (1.7, а, б), для первого порядка модели АР

$$\Phi[1] = r[1].$$

Для модели АР второго порядка коэффициенты АР равны

$$\Phi[1] = r[1](1 - r^2[2]) / (1 - r^2[1]),$$

$$\Phi[2] = (r[2] - r^2[1]) / (1 - r^2[1]).$$

Процессы АР можно характеризовать конечным числом значений функции, определяемой по корреляционной функции процесса. Такая функция носит название частной автокорреляционной функции. Ее можно выразить через p коэффициентов АР, равных последним коэффициентам АР для порядков от единицы до p . Значения частной автокорреляционной функции полагаются равными

$$K[j] = \Phi[j, j], 1 \leq j \leq p. \quad (1.9)$$

Можно показать, что первые три значения частной автокорреляционной функции описываются выражениями вида

$$K[1] = \Phi[1,1] = r[1],$$

$$K[2] = \Phi[2,2] = (r[2] - r^2[1]) / (1 - r^2[1]),$$

$$K[3] = \Phi[3,3] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & R[1] & R[1] \\ R[1] & 1 & R[2] \\ R[2] & R[2] & R[3] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & R[1] & R[2] \\ R[1] & 1 & R[1] \\ R[2] & R[1] & 1 \end{vmatrix}},$$

где первый индекс в квадратных скобках указывает на порядок модели, а второй является номером коэффициента АР. Достоинством частной автокорреляционной функции (1.9), по сравнению с автокорреляционной функцией, является ее конечная длина. Она может быть значительно меньше

длины корреляционной функции, но при этом отражать практически всю информацию о случайном процессе в рамках корреляционной теории.

Как показал Бартлетт [2], значение выборочной частной автокорреляционной функции при сдвиге $(p+1)$ можно полагать равным нулю, если оно удовлетворяет неравенству $\Phi[p+1, p+1] \leq 1/\sqrt{N}$, где N – длина реализации, по которой производилась оценка значений функции корреляции. Таким образом производится оценка порядка p модели АР по методу Бартлетта.

1.2.2 Спектр процесса авторегрессии

Модель АР случайного процесса наиболее часто, среди других моделей линейного предсказания, используется для параметрического спектрального оценивания. Это связано, во-первых, с тем, что узкополосные процессы широко распространены в природе и технике. Во-вторых, параметры модели АР проще вычислять. В-третьих, большинство разработанных методов оценивания касаются именно вычисления коэффициентов АР.

Для вывода формулы АР параметрического спектрального оценивания, будем рассматривать процесс АР как реакцию $x[t]$ формирующего фильтра, на вход которого подаются некоррелированные отсчеты $a[t]$. z -преобразование передаточной функции АР фильтра имеет вид

$$H(z) = 1/\Phi(z),$$

где оператор АР

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]z^{-i}. \quad (1.10)$$

z -преобразования корреляционной функции выходного и входного процессов в линейной системе связаны соотношением [3]

$$P(z) = |H(z)|^2 P_a(z) = P_a[z] / |\Phi(z)|^2. \quad (1.11)$$

Чтобы найти СПМ выходного АР процесса, необходимо в (1.11) сделать замену $z = e^{j2\pi fT}$ и положить, что для белого шума $P_a[z] = D_a$ есть постоянная величина. Тогда из (1.11), с учетом (1.10) следует

$$P(f) = D_a / \left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]e^{-j2\pi fiT} \right|^2. \quad (1.12)$$

К этому выражению можно прийти, если учитывать, что СПМ входа и выхода линейной системы связаны соотношением

$$P(f) = |H(f)|^2 P_a(f) = D_a / |\Phi(f)|^2,$$

где $|H(f)|^2 = |\Phi(f)|^{-2}$ – квадрат амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) системы, описываемой моделью АР. Из (1.12) следует, что истинные процессы АР должны иметь узкополосную форму СПМ. Многие реальные узкополосные процессы достаточно хорошо оцениваются параметрическими СПМ. Точность параметрических оценок СПМ существенно зависит от того, насколько хорошо процесс описывается моделью линейного предсказания.

Выражение (1.12) широко используется в параметрическом методе спектрального оценивания случайных процессов. В качестве параметров, полностью характеризующих спектральную оценку случайного процесса, выступают коэффициенты АР и порядок модели. Параметрическое спектральное оценивание обладает рядом достоинств по сравнению с традиционными методами спектрального оценивания. К ним относятся: более высокое спектральное разрешение при использовании коротких выборок, отсутствие боковых лепестков, наличие простой формулы для вычисления. Недостатком параметрического спектрального анализа является требование адекватности модели и процесса, чувствительность к выбору порядка модели. Если порядок модели меньше истинного, то форма спектра будет грубым приближением истинного спектра. При этом также снижается разрешающая способность оценки, а слабые компоненты спектра могут быть не выявлены. При завышенном порядке модели появляются лишние моды спектра, раздваиваются спектральные пики.

С помощью модели АР можно получать спектральные оценки процессов со сложной формой СПМ. Для этого может быть придется использовать модели АР бесконечного порядка. На основе модели АР легко синтезируются оптимальные фильтры подавления, согласованные не только по частоте и полосе спектра, но и по форме спектра случайного процесса. Достоинством формулы (1.12) является возможность представления СПМ в виде аналитического выражения. С помощью операций над этим выражением, например, можно найти формулы для определения частоты максимумов и минимумов СПМ.

Чтобы определить положение максимума или минимума АР оценки СПМ, нужно взять производную от (1.12) по f и приравнять ее к нулю. Корни полученного уравнения определяют положение экстремумов функции СПМ. При $p = 2$ можно показать, что

$$\cos \omega_m T = -\Phi[1](1 - \Phi[2]) / 4\Phi[2], \quad (1.13)$$

где ω_m – частота, на которой находится максимум параметрической оценки СПМ.

1.2.3 Характеристическое уравнение модели авторегрессии

Модель АР, описываемая уравнением (1.1), может быть представлена в операторной форме

$$\Phi(z)x[t] = a[t], \quad (1.14)$$

где оператор АР $\Phi(z)$ (1.10) удобно представить в виде

$$\Phi(z) = 1 - \Phi[1]z^{-1} - \dots - \Phi[p]z^{-p}.$$

Действие оператора сдвига z^{-i} на текущий отсчет описывается следующим образом

$$z^{-i}x[t] = x[t-i].$$

Из условия устойчивости формирующего АР фильтра с рациональной передаточной функцией (1.8), следует условие стационарности АР процесса. Для определения стационарности случайного АР процесса используется характеристическое уравнение

$$\Phi(c) = c^p - \Phi[1]c^{p-1} - \dots - \Phi[p] = 0. \quad (1.15)$$

Если корни характеристического уравнения (1.15) $c[i]$ лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости, то процесс АР удовлетворяет условию стационарности. Характеристическое уравнение (1.15), иногда представляется также в виде

$$1 - \Phi[1]c^{-1} - \dots - \Phi[p]c^{-p} = 0. \quad (1.16)$$

Тогда условие стационарности заключается в том, что корни характеристического уравнения (1.16) должны лежать вне единичного круга на комплексной плоскости.

Найдем выражения, связывающие коэффициенты АР и параметры СПМ [6]. Для этого будем рассматривать (1.1) как разностное уравнение, описывающее систему с несколькими собственными частотами и соответствующими декрементами затухания. Решения разностного уравнения выражаются через корни характеристического уравнения, которое в данном случае совпадает с уравнением (1.15). Представим характеристическое уравнение (1.15) в виде

$$\prod_{i=1}^p (c - c[i]) = 0. \quad (1.17)$$

Из (1.17) и (1.15) следует, что характеристическое уравнение можно записать следующим образом:

$$c^P - \Phi[1]c^{P-1} - \dots - \Phi[P] = \prod_{i=1}^P (c - c[i]) = 0. \quad (1.18)$$

Сравнивая в (1.18) коэффициенты при одинаковых степенях c , найдем связь между коэффициентами АР и корнями $c[i]$. Приведем соответствующие формулы для $p = 1 \div 4$:

$$\Phi[1,1] = c[1,1]; \quad (1.19, а)$$

$$\Phi[2,1] = c[2,1] + c[2,2];$$

$$\Phi[2,2] = -c[2,1]c[2,2]; \quad (1.19, б)$$

$$\Phi[3,1] = c[3,1] + c[3,2] + c[3,3];$$

$$\Phi[3,2] = -(c[3,1]c[3,2] + c[3,1]c[3,3] + c[3,2]c[3,3]);$$

$$\Phi[3,3] = c[3,1]c[3,2]c[3,3]; \quad (1.19, в)$$

$$\Phi[4,1] = c[4,1] + c[4,2] + c[4,3] + c[4,4];$$

$$\Phi[4,2] = -(c[4,3]c[4,4] + c[4,2]c[4,3] + c[4,1]c[4,3] + c[4,4]c[4,1] + c[4,2]c[4,3] + c[4,2]c[4,4]);$$

$$\Phi[4,3] = c[4,1]c[4,3]c[4,4] + c[4,2]c[4,3]c[4,4] + c[4,1]c[4,2]c[4,3] + c[4,1]c[4,2]c[4,4];$$

$$\Phi[4,4] = -c[4,1]c[4,2]c[4,3]c[4,4]. \quad (1.19, г)$$

Первый индекс в (1.19), в квадратных скобках, указывает на соответствующий порядок модели. Полученные формулы оказываются весьма полезными для определения коэффициентов АР по заданным характеристикам пиков СПМ случайного процесса.

Отметим, что корни характеристического уравнения полностью описывают модель АР. Свойства модели зависят от параметров, через которые

они выражаются. Если корни действительные, то их можно представить в виде экспоненциальной функции [6]

$$c[i] = e^{-h_i T},$$

где h_i – коэффициент демпфирования равный $h_i = \pi \Delta f_i$, где Δf_i – ширина полосы i -го пика СПМ. Тогда действительные корни характеристического уравнения зависят от ширины полосы выражением вида

$$c[i] = e^{-\pi \Delta f_i T}. \quad (1.20)$$

Комплексные корни характеристического уравнения описываются выражениями

$$c[i] = e^{-\pi \Delta f_i T - j 2\pi f_{hi} T}, c[i+1] = e^{-\pi \Delta f_i T + j 2\pi f_{hi} T}, \quad (1.21)$$

где $f_{hi} = \omega_{hi} / 2\pi$ – собственная частота модели АР с поправкой на демпфирование, соответствующая i -тому пику СПМ. В зависимости от порядка модели, подставляя (1.20) или (1.21) в формулы (1.19), можно определить коэффициенты АР. Ниже показано, что рассчитанные таким образом коэффициенты АР, можно использовать для генерации процессов АР с заданными характеристиками СПМ.

1.2.4 АР фильтры

Достоинством модели АР является ее конструктивность, заключающаяся в возможности синтеза довольно простым образом алгоритмов обработки случайных процессов. На рис. 1.1 представлен АР фильтр предсказания, алгоритм действия которого описывается выражением (1.4). Он состоит из линий задержки, усилителей с коэффициентами усиления $-\Phi[j]$, $1 \leq j \leq p$ и сумматора. Ошибки предсказания на выходе этого фильтра будут отчетами белого шума, а точнее некоррелированным процессом. Дисперсия ошибки предсказания на выходе фильтра будет иметь минимальное значение, если коэффициенты АР найдены из уравнения (1.4, а).

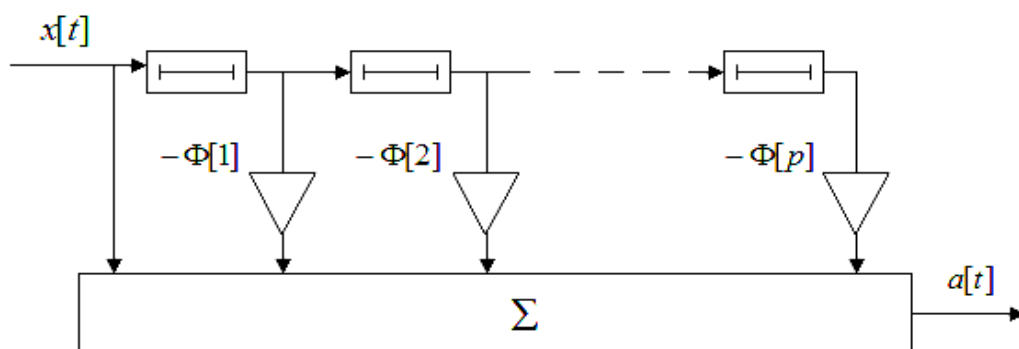


Рисунок 1.1 – АР фильтр предсказания

АР фильтр предсказания выполняет функцию обеляющего фильтра. На вход фильтра подается коррелированный сигнал, а на выходе получают белый шум. Приведем основные характеристики АР фильтров предсказания. Системную функцию обеляющего АР фильтра можно получить из разностного уравнения АР в операторном виде (1.14)

$$a[t] = H(z)x[t] = [1 - \Phi(z)]x[t],$$

откуда видно, что системная функция нерекурсивного обеляющего АР фильтра тождественна оператору АР

$$H(z) = \Phi(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]z^i. \quad (1.22)$$

Для обеляющего фильтра справедливо также выражение свертки

$$a[t] = h(z)x[t] = \Phi(z)x[t], \quad (1.23)$$

где оператор импульсной характеристики задается формулой

$$h(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi[i]z^{-i} = h[i]z^{-i}, \quad h[0] = 1.$$

Из (1.23) следует, что для обеляющего АР фильтра справедливо

$$h[i] = \Phi[i]. \quad (1.24)$$

Таким образом обеляющий фильтр имеет конечную импульсную характеристику, а ее значения равны коэффициентам АР. АЧХ или

передаточную функцию фильтра можно получить из (1.22) путем замены $z = \exp(j2\pi ft)$

$$|H(f)|^2 = \left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] z^{-j2\pi f iT} \right|^2. \quad (1.25)$$

Сравнивая (1.25) и (1.12), приходим к выводу, что передаточная функция обеляющего фильтра обратна форме СПМ процесса $x[t]$.

Передаточная функция (1.25) содержит только нули, что характерно для широкополосных режекторных фильтров. Обеляющий фильтр всегда устойчив, так как не содержит обратных связей. Выполнение этого условия гарантирует минимально-фазовость и каузальность фильтра. Напомним, что к минимально-фазовым фильтрам относят фильтры с нелинейной фазо-частотной характеристикой, которые минимизируют групповую задержку на всех частотах для данной АЧХ путем искажения фазы. У каузального фильтра выход зависит только от текущего и предыдущих значений входа. В случае, когда условие стационарности не выполняется, устойчивую АЧХ можно получить методом спектральной факторизации [3].

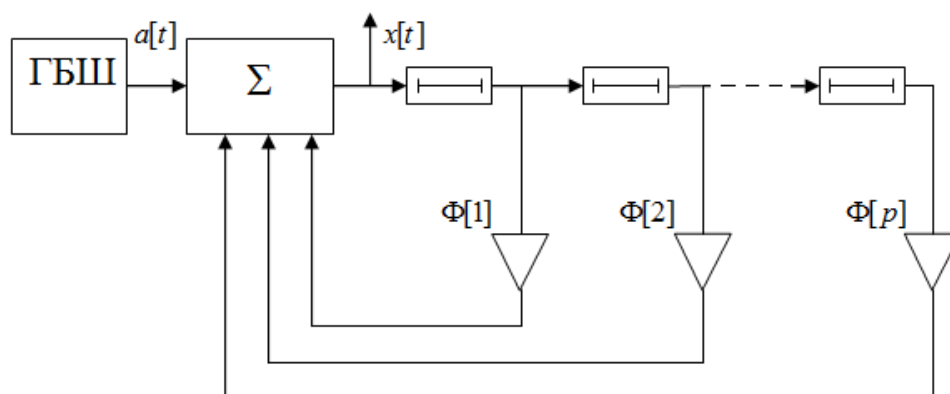


Рисунок 1.2 – Генератор процесса АР

В задачах статистического моделирования часто возникает необходимость генерации случайного процесса с заданной корреляционной функцией или с заданной формой и характеристиками СПМ. Для этих целей эффективно использовать генератор процесса АР, показанный на рис. 1.2. Генерация случайного процесса осуществляется методом порождающего случайного процесса. Порождающий процесс в виде белого шума, не обязательно с гауссовой функцией распределения, пропускается через формирующий фильтр, параметры которого определяются соответствующей моделью АР.

В операторной форме формирующий рекурсивный фильтр описывается уравнениями

$$x[t] = H(z)a[t] = \frac{a[t]}{\Phi(z)}. \quad (1.26)$$

Системная функция фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{\Phi(z)}. \quad (1.27)$$

Уравнение свертки формирующего фильтра записывается в форме

$$x[t] = h(z)a[t]. \quad (1.28)$$

Из (1.26) и (1.28) следует выражение для импульсной характеристики

$$h(z) = \frac{1}{\Phi(z)}$$

или

$$h(z)\Phi(z) = 1. \quad (1.29)$$

Используя (1.29), можно получить значения импульсной характеристики формирующего фильтра для некоторого порядка p . Для этого необходимо приравнять коэффициенты в левой и правой частях (1.26) при одинаковых степенях z . Например, при $p = 1$ имеем

$$h[0] = 1, h[1] = \Phi[1], h[2] = \Phi^2[1], \dots, h[i] = \Phi^i[1],$$

где $\Phi[1]$ – коэффициент АР модели первого порядка. Таким образом фильтр имеет бесконечную импульсную характеристику. Передаточная функция с помощью (1.27) задается формулой

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]e^{-j2\pi fiT} \right|^2}. \quad (1.30)$$

Из (1.30) видно, что передаточная функция формирует из равномерной СПМ белого шума, подаваемого на вход фильтра, неравномерную СПМ

случайного процесса. Форма СПМ процесса АР совпадает с формой передаточной функцией формирующего фильтра (1.30).

Передаточная функция (1.30) содержит полюсы, что предполагает узкополосность фильтра. Формирующий фильтр устойчив, если для коэффициентов АР выполняется условие стационарности (1.15). Выполнение этого условия гарантирует минимально-фазовость и каузальность фильтра. Напомним, что к минимально-фазовым фильтрам относят фильтры с нелинейной фазо-частотной характеристикой, которые минимизируют групповую задержку на всех частотах для данной АЧХ путем искажения фазы. У каузального фильтра выход зависит только от текущего и предыдущих значений отсчетов входа. В случае, когда условие стационарности не выполняется, устойчивую АЧХ можно получить методом спектральной факторизации [3]. Заметим, что, если для модели АР условие стационарности не выполняется, это не оказывает влияние на точность параметрической спектральной оценки и устойчивость работы обеляющего фильтра.

1.2.5 Корреляционная функция процесса авторегрессии

При решении ряда задач статистической радиотехники большой интерес представляет не только СПМ процесса, а и его корреляционная функция. Поэтому желательно найти аналитическое выражение для корреляционной функции АР процесса. С этой целью необходимо решить обратную задачу для разностного уравнения Юла-Уокера, когда коэффициенты $\Phi[i]$ уравнения Юла-Уокера заданы.

Рекуррентное выражение (1.6, а) представляет собой разностное уравнение вида

$$r[k] = \Phi[1]r[k-1] + \Phi[2]r[k-2] + \dots + \Phi[p]r[k-p] \quad (1.31)$$

с общим решением [2]

$$r[k] = A[1]c^{|k|}[1] + A[2]c^{|k|}[2] + \dots + A[p]c^{|k|}[p], \quad (1.32)$$

где $c[i]$ – корни характеристического уравнения, $A[i]$ – постоянные, значения которых определяются начальными условиями для $r[i]$. Например, при $p=1$, из (1.32) следует

$$r[k] = A[1]c^{|k|}[1], \quad (1.33)$$

где $A[1]=1$, т.к. при $k=0$, из (1.32) получаем $r[0]=1$.

Тогда (1.33) преобразуется к виду

$$r[k] = c^{|k|}[1] \text{ .} \quad (1.34)$$

При $p = 2$, $k = 0$, $k = 1$, используя (1.31) и (1.32), получим

$$1 = A[1] + A[2], \quad (1.35, a)$$

$$\Phi[1]/(1-\Phi[2]) = A[1]c[1] + A[2]c[2]. \quad (1.35, \delta)$$

Решив систему уравнений (1.35, а, б) относительно $A[1]$ и $A[2]$, а затем применив соотношения (1.19), находим выражение для корреляционной функции модели АР второго порядка

$$r[k] = [c^{k+1}[2](1 - c^2[1]) - c^{k+1}[1](1 - c^2[2])] / [(c[2] - c[1])(1 + c[1]c[2])].$$

Очевидно, что в случае произвольного порядка, можно также получить в явном виде выражения для коэффициентов корреляции через $\Phi[i]$, т.е. $r[i] = F[i](\Phi[1], \Phi[2], \dots, \Phi[i])$. Тогда, используя (1.32), можно получить систему уравнений, подобную (1.32)

[illegible]

Используя выражения (1.36) для p -го порядка, функции $F[i](\Phi[1], \Phi[2], \dots, \Phi[i])$ можно выразить через корни $c[i]$ и получить выражения для корреляционной функции через корни характеристического уравнения (1.15).

При $p=1$ из (1.34) следует выражение для корреляционной функции в виде затухающей экспоненты

$$r[k] = e^{-khT} = e^{-k\Delta\omega T/2}.$$

В случае комплексных корней корреляционная функция модели AP второго порядка описывается выражением [2]

$$r[k] = [\text{sgn}(\Phi[1])]^k (-\Phi^{k/2}[2]) \sin(\omega_h kT + \varphi) / \sin \varphi,$$

где ω_h и φ определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\cos \omega_h T &= \Phi[1]/(2\sqrt{-\Phi[2]}), \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \omega_h (1 - \Phi[2])/(1 + \Phi[2]).\end{aligned}$$

Угол φ указывает на сдвиг фазы на выходе формирующего фильтра относительно входа. Для произвольного порядка корреляционная функция процесса АР состоит из взвешенной суммы действительных и комплексных экспонент.

Собственная частота формирующего фильтра может быть определена как

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_h^2 - (\Delta\omega/2)^2}. \quad (1.37)$$

Установим связь между собственной частотой с учетом затухания ω_h и частотой пика СПМ модели АР ω_m . Подставляя в (1.13) выражения (1.19) получим

$$\cos \omega_m T = \cos \omega_h T [1 + \exp(-\Delta\omega T)]/[2 \exp(-\Delta\omega T/2)]. \quad (1.38)$$

Может также оказаться полезным выражение, следующее из (1.38)

$$\cos \omega_h T = 2 \cos \omega_m T \cdot \exp(-\Delta\omega T/2)/[1 + \exp(-\Delta\omega T)]. \quad (1.39)$$

Из (1.39) и (1.37) следует, что при $\Delta\omega \rightarrow 0$ имеем $\omega_h = \omega_m = \omega_0$.

1.3 Модель скользящего среднего

Модель АР, рассмотренная выше, не может рационально описывать некоторые виды случайных процессов. Случайные процессы со значительной шириной СПМ описываются моделью СС. В основе модели СС лежит разностное уравнение [2]

$$x[t] = - \sum_{i=1}^q Q[i]a[t-i] + a[t], \quad (1.40)$$

где $Q[i]$ – коэффициенты, а q – порядок модели СС. Чтобы получить уравнения, связывающие коэффициенты СС и значения функции корреляции, перемножим левые и правые части (1.40) и уравнения

$$x[t-j] = -\sum_{i=1}^q Q[i]a[t-i-j] + a[t-j],$$

а затем возьмем математическое ожидание. В результате несложных преобразований получим:

$$R[0] = \left(\sum_{i=1}^q Q^2[i] + 1 \right) D_a, j = 0, \quad (1.41, a)$$

$$R[j] = \begin{cases} (-Q[j] + Q[1]Q[j+1] + \dots + Q[q-j]Q[q])D_a, j = 1, 2, \dots, q \\ 0, j > q \end{cases}. \quad (1.41, б)$$

Подставив (1.41, а) в (1.41, б), преобразуем систему уравнений (1.41, б) к удобному виду

$$r[j] = \begin{cases} \frac{-Q[j] + Q[1]Q[j+1] + \dots + Q[q-j]Q[q]}{1 + \sum_{i=1}^q Q^2[i]}, 1 \leq j \leq q, \\ 0, j > q. \end{cases} \quad (1.42)$$

Как видно из (1.42), полученная система нелинейных уравнений не позволяет выразить в явном виде коэффициенты СС через $r[j]$. Поэтому решение в общем случае находится численными методами. В самом простом случае, когда модель СС имеет первый порядок, коэффициенты СС ищутся путем решения квадратного алгебраического уравнения

$$Q^2[1] + \frac{Q[1]}{r[1]} + 1 = 0.$$

При $q = 2$ система уравнений имеет вид

$$r[1] = \frac{-Q[1] + Q[1]Q[2]}{1 + Q^2[1] + Q^2[2]},$$

$$r[2] = \frac{-Q[2]}{1 + Q^2[1] + Q^2[2]}.$$

Используя оператор СС, разностное уравнение (1.40) можно записать в виде

$$x[t] = Q(z)a[t],$$

где оператор СС описывается выражением

$$Q(z) = 1 - \sum_{i=1}^q Q[i]z^{-i}.$$

Выражение для спектра процесса СС может быть получено способом, описанным для модели АР. Параметрическая оценка СПМ процесса СС определяется формулой

$$P(f) = \left| 1 - \sum_{i=1}^q Q[i]e^{-j2\pi fiT} \right|^2 D_a. \quad (1.43)$$

Эта формула применяется для параметрического спектрального анализа широкополосных случайных процессов.

Модель СС позволяет синтезировать обеляющий (точнее сказать декоррелирующий) фильтр. Выходной некоррелированный случайный процесс на выходе этого фильтра описывается рекуррентным соотношением

$$a[t] = x[t] + \sum_{i=1}^q Q[i]a[t-i].$$

Блок-схема такого фильтра представлена на рис. 1.3. Условие обратимости процесса СС формулируется с использованием характеристического уравнения

$$c^p - Q[1]c^{p-1} - \dots - Q[p] = 0. \quad (1.44)$$

Обеляющий фильтр на основе модели СС содержит обратные связи и поэтому не всегда устойчив (обратим). Для обратимости процесса СС необходимо, чтобы корни характеристического уравнения (1.44) лежали внутри единичного круга на комплексной плоскости. В случае, когда используется характеристическое уравнение вида

$$1 - Q[1]c^{-1} - \dots - Q[p]c^{-p} = 0,$$

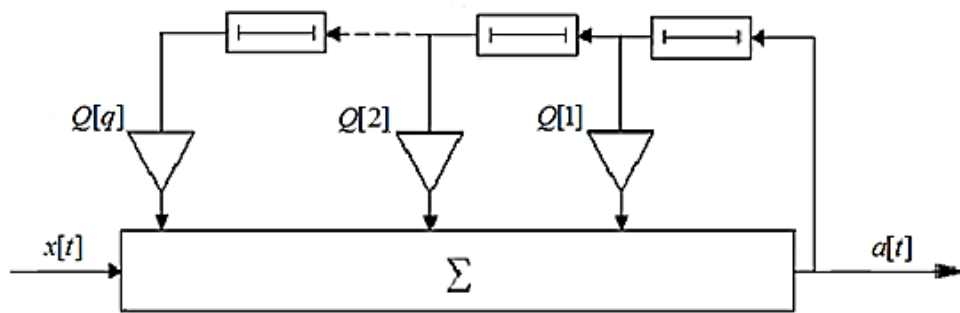


Рисунок 1.3 – Обеляющий фильтр на основе модели СС

для выполнения условия обратимости корни уравнения должны лежать вне единичного круга на комплексной плоскости.

Операторное уравнение рекурсивного обеляющего СС фильтра имеет вид

$$a[t] = H(z)x[t] = \frac{x[t]}{Q(z)}, \quad (1.45)$$

из которого следует выражение для системной функции

$$H(z) = \frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^q Q[k]z^{-k}}. \quad (1.46)$$

Импульсная характеристика позволяет представить уравнение (1.45) в форме свертки

$$a[t] = h(z)x[t] = \frac{x[t]}{Q(z)}.$$

Тогда оператор импульсной характеристики удовлетворяет соотношению

$$h(z) = \frac{1}{Q(z)}.$$

или

$$h(z)Q(z) = 1. \quad (1.47)$$

Для получения формул, по которым можно вычислить значения импульсной характеристики обеляющего СС фильтра, необходимо приравнять

коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях (1.47). Например, для модели СС второго порядка имеем

$$h(z)(1 - Q[1]z^{-1} - Q[2]z^{-2}) = 1.$$

Отсюда получаем следующие выражения для значений импульсной характеристики:

$$\begin{aligned} h[1] &= Q[1], h[2] = Q[1]h[1] + Q[2], h[3] = Q[1]h[2] + Q[2]h[1], \dots \\ h[i] &= Q[1]h[i-1] + Q[2]h[i-2], i \geq 3. \end{aligned}$$

Таким образом, обеляющий СС фильтр имеет бесконечную импульсную характеристику.

Полюсная передаточная функция обеляющего фильтра задается выражением, следующим из (1.46)

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{\left| 1 - \sum_{k=1}^q Q[k]z^{-j2\pi fT} \right|^2}. \quad (1.48)$$

Передаточная функция (1.48) соответствует широкополосному обеляющему фильтру СС.

Широкополосные случайные процессы можно получить с помощью соответствующего формирующего фильтра. Генератор процесса СС показан на рис. 1.4.

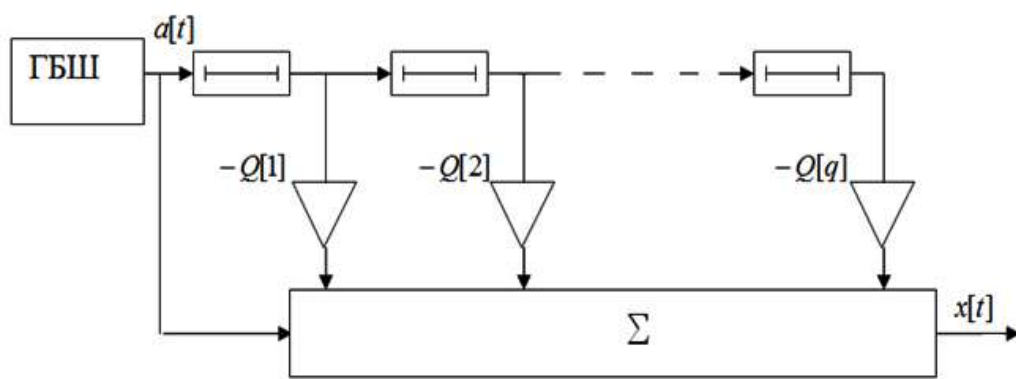


Рисунок 1.4 – Генератор процесса СС

Формирующий нерекурсивный фильтр СС описывается разностным уравнением

$$x[t] = H(z)a[t] = Q(z)a[t]. \quad (1.49)$$

Системная функция фильтра тождественна оператору СС

$$H(z) = Q(z) = 1 - \sum_{k=1}^q Q[k]z^{-k}. \quad (1.50)$$

Уравнение (1.49) можно представить в форме свертки

$$x[t] = h(z)a[t]. \quad (1.51)$$

Учитывая (1.49) и (1.51), получаем выражение для оператора импульсной функции

$$h(z) = Q(z).$$

Отсюда значения импульсной функции равны

$$h[0] = 1, h[1] = Q[1], h[2] = Q[2], \dots, h[q] = Q[q].$$

Таким образом фильтр имеет конечную импульсную функцию.

Передаточную функцию формирующего фильтра можно получить, используя (1.50),

$$|H(f)|^2 = \left| 1 - \sum_{i=1}^q Q[i]e^{-j2\pi f iT} \right|^2.$$

Она содержит только нули, что характерно для широкополосного фильтра.

1.4 Модель авторегрессии – скользящего среднего

Наиболее полной параметрической моделью линейного предсказания стационарных случайных процессов является смешанная модель АРСС. Объединение в одной модели свойств АР и СС процессов позволяет получить параметрическую модель случайного процесса с более низким порядком, чем это можно сделать с помощью моделей АР или СС. Это свойство лежит в основе теоремы декомпозиции Уолда [2]. Теорема декомпозиции утверждает, что любой стационарный процесс АРСС с конечной дисперсией можно представить единственными моделями АР или СС, возможно бесконечного

порядка. Моделью АРСС описываются процессы со смешанным спектром, содержащие узкополосные и широкополосные составляющие.

В операторном виде модель АРСС (p, q) описывается выражением [3]

$$\Phi(z)x[t] = Q(z)a[t], \quad (1.52, a)$$

где операторы $\Phi(z)$ и $Q(z)$ являются операторами моделей АР и СС p -го и q -го порядков, соответственно. Разностное уравнение модели АРСС (1.52) удобно записать в виде

$$\begin{aligned} x[t] = & \Phi[1]x[t-1] + \Phi[2]x[t-2] + \dots + \Phi[p]x[t-p] - Q[1]a[t-1] - \\ & - Q[2]a[t-2] - \dots - Q[q]a[t-q] + a[t]. \end{aligned} \quad (1.52, б)$$

Для нахождения параметров модели используется система уравнений, связывающая значения корреляционной функции процесса АРСС и неизвестные параметры модели. Умножив левую и правую части (1.52, б) на $x[t-j]$ и взяв математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned} R[j] = & \Phi[1]R[j-1] + \Phi[2]R[j-2] + \dots + \Phi[p]R[j-p] + \dots + R_{xa}[j] - \\ & - Q[1]R_{xa}[j-1] - \dots - Q[q]R_{xa}[j-q], \end{aligned} \quad (1.53)$$

где $R_{xa}[j]$ – взаимная корреляционная функция процессов $x[t-j]$ и $a[t]$, равная

$$R_{xa}[j] = E\{x[t-j]a[t]\}. \quad (1.54)$$

Как следует из (1.54), взаимная корреляционная функция удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} R_{xa}[j] &= 0, \quad j > 0, \\ R_{xa}[j] &\neq 0, \quad j \leq 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

С учетом (1.53) из (1.55) следует, что

$$R[j] = \Phi[1]R[j-1] + \Phi[2]R[j-2] + \dots + \Phi[p]R[j-p], \quad j \geq q+1,$$

или

$$r[j] = \Phi[1]r[j-1] + \Phi[2]r[j-2] + \dots + \Phi[p]r[j-p], \quad j \geq q+1.$$

Выражение для дисперсии процесса АРСС можно найти из (1.54), при $j=0$

$$R[0] = \Phi[1]R[1] + \Phi[2]R[2] + \dots + \Phi[p]R[p] - Q[1]R_{xa}[-1] - Q[2]R_{xa}[-2] - \dots - Q[q]R_{xa}[-q] + D_a. \quad (1.56)$$

Тогда выражение для коэффициентов корреляции процесса АРСС принимает вид

$$r[j] = \frac{\Phi[1]R[j-1] + \dots + \Phi[p]R[j-p] + R_{xa}[j] - Q[1]R_{xa}[j-1] - \dots - Q[q]R_{xa}[j-q]}{\Phi[1]R[1] + \Phi[2]R[2] + \dots + \Phi[p]R[p] - Q[1]R_{xa}[-1] - \dots - Q[q]R_{xa}[-q] + D_a}.$$

Можно показать, что СПМ модели АРСС определяется выражением

$$P(f) = \frac{\left| 1 - \sum_{k=1}^q Q[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2} D_a. \quad (1.57)$$

Как видно из (1.57), процессы АРСС описываются полюсно–нулевой СПМ. Спектр такого процесса содержит узкополосные пики, определяемые моделью АР, и широкополосные максимумы, определяемые моделью СС.

В качестве примера рассмотрим модель АРСС (1,1), которая описывается разностным уравнением

$$x[t] = \Phi[1]x[t-1] - Q[1]a[t-1] + a[t]. \quad (1.58)$$

Из (1.53) и (1.56) следуют выражения для дисперсии и корреляционной функции

$$\begin{aligned} R[0] &= \Phi[1]R[1] - Q[1]R_{xa}[-1] + D_a, \\ R[1] &= \Phi[1]R[0] - Q[1]D_a, \\ R[k] &= \Phi[1]R[k-1], \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Значение $R_{xa}[-1]$ можно найти, умножив уравнение (1.58) на $a[t-1]$ и взяв математическое ожидание

$$R_{xa}[-1] = (\Phi[1] - Q[1])D_a. \quad (1.60)$$

Подставляя (1.60) в (1.59), после преобразований получим

$$\begin{aligned} R[0] &= \frac{1 + Q^2[1] - 2\Phi[1]Q[1]}{1 - \Phi^2[1]} D_a, \\ R[1] &= \frac{(1 - \Phi[1]Q[1])(\Phi[1] - Q[1])}{1 - \Phi^2[1]} D_a, \\ R[k] &= \Phi[1]R[k-1], \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Для коэффициентов корреляции система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned} r[1] &= \frac{(1 - \Phi[1]Q[1])(\Phi[1] - Q[1])}{1 + Q^2[1] - 2\Phi[1]Q[1]}, \\ r[2] &= \Phi[1]r[1]. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Система уравнений (1.61) нелинейная, но в этом простом случае ее можно точно решить относительно неизвестных $\Phi[1]$ и $Q[1]$.

Рассмотрим модель АРСС (2,1), которая описывается уравнением

$$x[t] = \Phi[1]x[t-1] + \Phi[2]x[t-2] - Q[1]a[t-1] + a[t]. \tag{1.62}$$

Система уравнений для значений корреляционной функции имеет вид

$$\begin{aligned} R[0] &= \Phi[1]R[1] + \Phi[2]R[2] - Q[1]R_{xa}[-1] + D_a, \\ R[1] &= \Phi[1]R[0] + \Phi[2]R[1] - Q[1]D_a, \\ R[2] &= \Phi[1]R[1] + \Phi[2]R[0], \\ R[k] &= \Phi[1]R[k-1] + \Phi[2]R[k-2], \quad k \geq 3. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Взаимную корреляционную функцию $R_{xa}[-1]$ можно найти, умножив (1.62) на $a[t-1]$ и взяв математическое ожидание.

После ряда преобразований система уравнений (1.64) представляется следующим образом:

$$R[0] = \frac{2Q[1]\Phi[1] + (1 + Q^2[1])(\Phi[2] - 1)}{1 - \Phi^2[1] - \Phi[2](1 + \Phi^2[1])} D_a,$$

$$R[1] = \Phi[1]R[0] + \Phi[2]R[1] - Q[1]R[0] \frac{1 - \Phi^2[1] - \Phi[2](1 + \Phi^2[1])}{2Q[1]\Phi[1] + (1 + Q^2[1])(\Phi[2] - 1)},$$

$$R[2] = \Phi[1]R[1] + \Phi[2]R[0],$$

(1.64)

$$R[k] = \Phi[1]R[k-1] + \Phi[2]R[k-2], k \geq 3.$$

Как видно из (1.64), даже простые модели АРСС описываются довольно сложной системой уравнений, включающей нелинейные уравнения. Чтобы найти коэффициенты АР и СС, используются численные методы. Если процедура решения системы нелинейных уравнений нежелательна, то можно использовать аппроксимацию АРСС моделью АР высокого порядка [3].

Условие стационарности процесса АРСС совпадает с условием стационарности процесса АР, а его обратимость – с условием обратимости СС процесса.

Уравнение (1.52, б) задает модель в несколько ограниченной форме, когда стационарный процесс должен иметь нулевое математическое ожидание. Для того чтобы сделать математическое ожидание ненулевым, можно ввести в модель АРСС константу

$$\tilde{x}[t] = \mu + \Phi[1]\tilde{x}[t-1] + \dots + \Phi[p]\tilde{x}[t-p] + a[t] - Q[1]a[t-1] - \dots - Q[q]a[t-q].$$

Если процесс $\tilde{x}[t]$ стационарен и $E\{a[t]\} = 0$, то

$$E\{\tilde{x}[t]\} = \frac{\mu}{1 - \Phi[1] - \dots - \Phi[p]}.$$

Альтернативно можно задать $\tilde{x}[t]$ как

$$\tilde{x}[t] = \beta + w[t],$$

где ошибка $w[t]$ является стационарным процессом АРСС с нулевым средним

$$w[t] = \Phi[1]w[t-1] + \dots + \Phi[p]w[t-p] + a[t] - Q[1]a[t-1] - \dots - Q_q a[t-q]. \quad (1.65)$$

При этом $E\{\tilde{x}[t]\} = \beta$. Для стационарных процессов эти два подхода являются эквивалентными. К уравнению (1.52, б) можно перейти путем центрирования процесса

$$x[t] = \tilde{x}[t] - E\{x[t]\}.$$

Модель АРСС можно развить, рассматривая регрессию

$$x[t] = y[t]\alpha + w[t],$$

где α – коэффициент регрессии с ошибкой $w[t]$ в виде процесса (1.65). В этой регрессии $y[t]$ не должны быть коррелированы с процессом $w[t]$ и его лагами. Составляющая $y[t]$ может включать детерминированные тренды, сезонные переменные, фиктивные переменные и т.п.

Модель АРСС может использоваться для синтеза обеляющего фильтра. Обеляющий фильтр показан на рис. 1.5. Разностное операторное уравнение обеляющего рекурсивного АРСС фильтра определяется выражением

$$a[t] = H(z)x[t] = \frac{\Phi(z)}{Q(z)} x[t]. \quad (1.66)$$

Отсюда можно найти выражение для системной функции фильтра

$$H(z) = \frac{\Phi(z)}{Q(z)}. \quad (1.67)$$

Выход обеляющего АРСС фильтра выражается с помощью оператора импульсной характеристики

$$a[t] = h(z)x[t]. \quad (1.68)$$

Соотношения (1.66) и (1.68) приводят к выражению

$$h(z) = \frac{\Phi(z)}{Q(z)},$$

которое удобно представить в виде

$$h(z)Q(z) = \Phi(z). \quad (1.69)$$

Значения импульсной характеристики можно найти по формулам, полученным приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях z .

Например, при $p=1$, $q=1$, из (1.69) имеем

$$\begin{aligned}
 h[0] &= 1, \\
 h[1] &= A[1] + A[2]Q, \\
 h[2] &= A[1] + A[2]Q^2, \\
 &\dots \\
 h[i] &= A[1] + A[2]Q^i,
 \end{aligned}
 \tag{1.70}$$

где коэффициенты $A[1]$ и $A[2]$ выражаются через коэффициенты АР и СС

$$A[1] = \frac{1 - \Phi}{1 - Q}, \quad A[2] = \frac{Q - \Phi}{1 - Q}.$$

Из (1.70) следует, что импульсная характеристика обеляющего АРСС фильтра бесконечная.

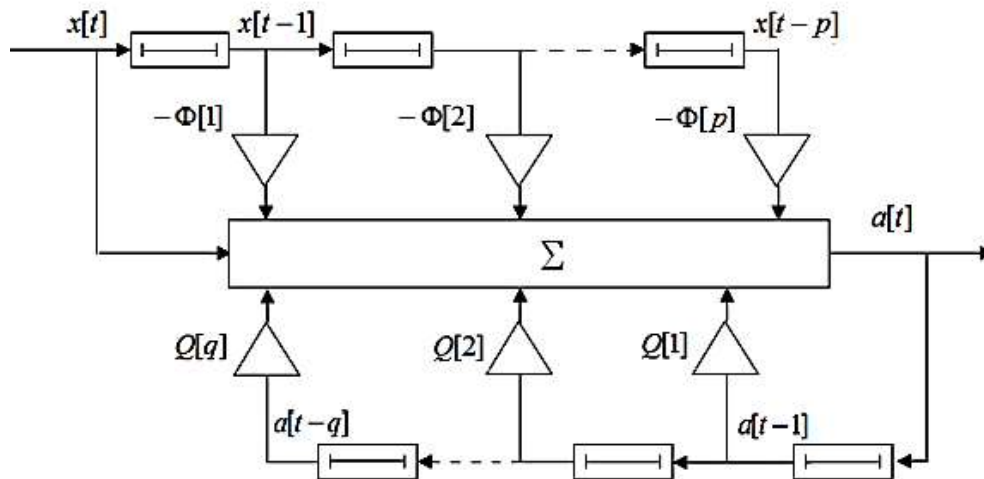


Рисунок 1.5 – Обеляющий фильтр на основе модели АРСС

Выражение для передаточной функции обеляющего фильтра легко найти из (1.67)

$$|H(f)|^2 = \frac{|\Phi(f)|^2}{|Q(f)|^2} = \frac{\left| 1 - \sum_{i=1}^P \Phi[i] e^{-j2\pi f iT} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{k=1}^P Q[k] e^{-j2\pi f kT} \right|^2}.
 \tag{1.71}$$

Передаточная функция (1.71) имеет нули и полюса, которые характеризуют широкополосные и узкополосные составляющие фильтра. Фильтр устойчив, если корни характеристического уравнения (1.44) лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

Генератор процесса АРСС в виде формирующего фильтра показан на рис.1.6. С его помощью можно получить имитационные процессы, содержащие узкополосную и широкополосную компоненты в СПМ. В качестве порождающего процесса используется белый шум.

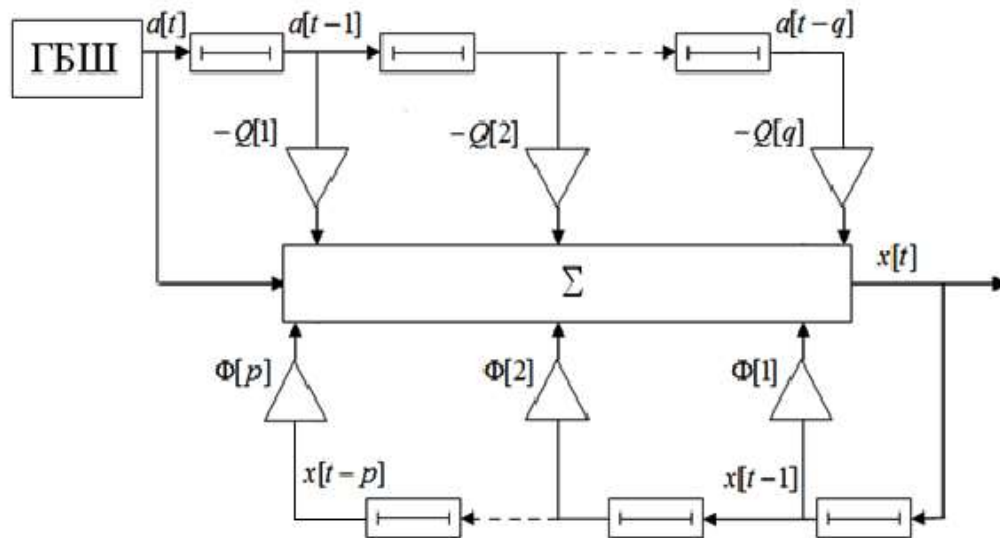


Рисунок 1.6 – Генератор процесса АРСС

Формирующий фильтр АРСС описывается разностным уравнением в операторной форме

$$x[t] = H(z)a[t] = \frac{Q(z)}{\Phi(z)} a[t]. \quad (1.72)$$

Отсюда следует, что его системная функция представляется в виде

$$H(z) = \frac{Q(z)}{\Phi(z)}. \quad (1.73)$$

Выход фильтра можно получить, используя уравнение свертки

$$x[t] = h(z)a[t]. \quad (1.74)$$

Из (1.72) и (1.74) находим выражение для оператора импульсной характеристики

$$h(z) = \frac{Q(z)}{\Phi(z)},$$

которое можно представить также в форме

$$h(z)\Phi(z) = Q(z). \quad (1.75)$$

Из (1.75) легко получить формулы для расчета значений импульсной характеристики. Например, при $p=1$, $q=1$ имеем

$$\begin{aligned} h[0] &= 1, \\ h[1] &= A[1] + A[2]\Phi, \\ h[2] &= A[1] + A[2]\Phi^2 \\ &\dots \\ h[i] &= A[1] + A[2]\Phi^i, \end{aligned}$$

где коэффициенты $A[1]$ и $A[2]$ вычисляются по формулам

$$A[1] = \frac{1-Q}{1-\Phi}, \quad A[2] = \frac{Q-\Phi}{1-\Phi}.$$

Отсюда следует, что формирующий фильтр АРСС имеет бесконечную импульсную характеристику. Передаточную функцию фильтра находим из (1.73)

$$|H(f)|^2 = \frac{|Q(f)|^2}{|\Phi(f)|^2} = \frac{\left| 1 - \sum_{k=1}^q Q[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^P \Phi[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2}.$$

Передаточная функция формирующего фильтра содержит узкополосные и широкополосные составляющие. Фильтр устойчив, если корни характеристического уравнения (1.15) лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
3. Марпл–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
4. Бендат Д., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
5. Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.В. Генерирование узкополосных имитационных случайных процессов // Радиоэлектроника и информатика. – 1999. – №4. – С. 83–85.
6. Кармалита В.А. Цифровая обработка случайных колебаний. – М: Машиностроение, 1986. – 80 с.

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

2.1 Введение

Модели линейного предсказания могут применяться для решения двух важных задач. Первая состоит в получении параметров линейной системы, с помощью которой был сформирован процесс линейного предсказания. По сути это обратная задача, когда по известной функции (здесь случайному процессу) рассчитываются коэффициенты разностного уравнения линейной системы. Вторая задача состоит в генерации реализаций случайных процессов по заданным параметрам системы линейного предсказания. Таким способом применением модели линейного предсказания методом формирующего фильтра решают прямую задачу, когда при известном воздействии и заданных параметрах системы определяется решение в виде выходного случайного процесса.

Обычно в научной литературе основное внимание обращается на решение первой задачи. Между тем, широкое применение методов статистического моделирования требует, как правило, предварительного получения имитационных процессов и их обработки. Используемые для этих целей методы [1, 2] недостаточно практичны и довольно ограничены. В известной литературе не раскрывают достаточно полно возможности моделей линейного предсказания в имитационном моделировании.

Конструктивные свойства модели АР, СС и АРСС дают возможность сравнительно простыми способами получить имитационные случайные процессы с заданными статистическими характеристиками. В качестве таких характеристик можно использовать ширину полосы и центральную частоту СПМ, частоту осцилляций и коэффициент демпфирования корреляционной функции имитируемого процесса. Кроме этого, можно получать случайные процессы с заданными видами корреляционной функции и СПМ. Причем, корреляционная функция и СПМ могут быть заданы как последовательностью чисел, так и в виде некоторых функций.

Изложенные методы генерации случайных процессов с заданными спектральными или корреляционными характеристиками, позволяют довольно точно генерировать требуемые имитационные процессы. Полученные с помощью формирующих фильтров истинные процессы линейного предсказания особенно полезны в тех случаях, когда разрабатываются или применяются способы анализа и обработки случайных сигналов, основанные на методах линейного предсказания. Приведенные примеры использования АР и СС моделей для генерирования имитационных и реальных процессов также иллюстрирует изложенный в первом разделе материал.

Ниже представлены четыре способа генерации процессов линейного предсказания с использованием метода формирующего фильтра. Их отличие

состоит в способе получения коэффициентов усиления формирующих фильтров, равных коэффициентам соответствующих моделей.

В первом способе для синтеза формирующего фильтра используются параметры модели линейного предсказания реального процесса. Хотя этот способ наиболее приближен к реальной обработке случайных процессов, он недостаточно гибок. Он не всегда подходит для задач, когда для исследования необходимо варьировать вид моделей, их порядок, форму СПМ или корреляционной функции.

Во втором способе коэффициенты формирующего фильтра рассчитываются по значениям выбранной функции корреляции случайного процесса. Параметры и виды корреляционной функции могут варьироваться в довольно широких пределах. Если вид корреляционной функции совпадает с одним из допустимых для моделей линейного предсказания АР, СС или АРСС, то полученный процесс будет иметь заданную корреляционную функцию. В том случае, когда коэффициенты формирующего фильтра рассчитываются по произвольной корреляционной функции, сгенерированный процесс линейного предсказания будет иметь корреляционную функцию, аппроксимирующую заданную.

В третьем способе для расчета коэффициентов формирующего фильтра используются соотношения типа (1.19). При этом способе для расчета коэффициентов формирующего фильтра используются соотношения связывающие коэффициенты АР и частоты пиков и их ширину полосы по уровню 0,5. При этом можно изменять порядок модели, форму СПМ и количество пиков. Наиболее точно таким способом генерируются узкополосные случайные процессы.

В четвертом способе коэффициенты формирующего фильтра рассчитываются по известным численным значениям СПМ. Этот способ применяется для получения имитационного процесса, когда информация о процессе представлена в частотной области. СПМ может быть представлена в виде функции или последовательности спектральных отсчетов.

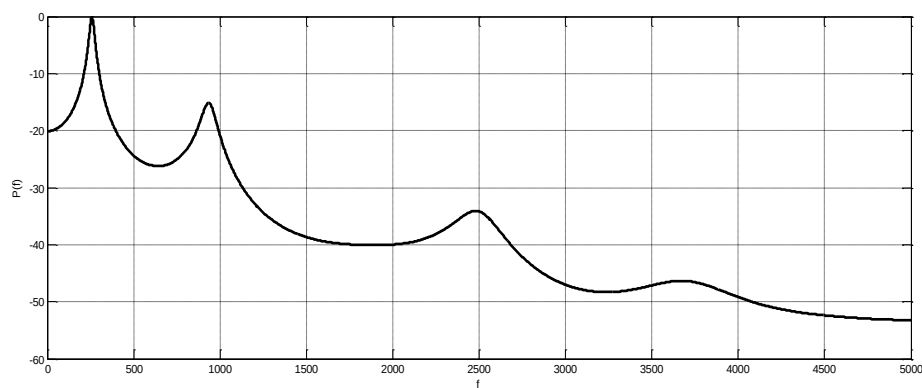
Ниже рассмотрены все четыре способа генерации имитационных случайных процессов. Методом статистического моделирования показаны примеры использования этих способов.

2.2 Моделирование процессов АР

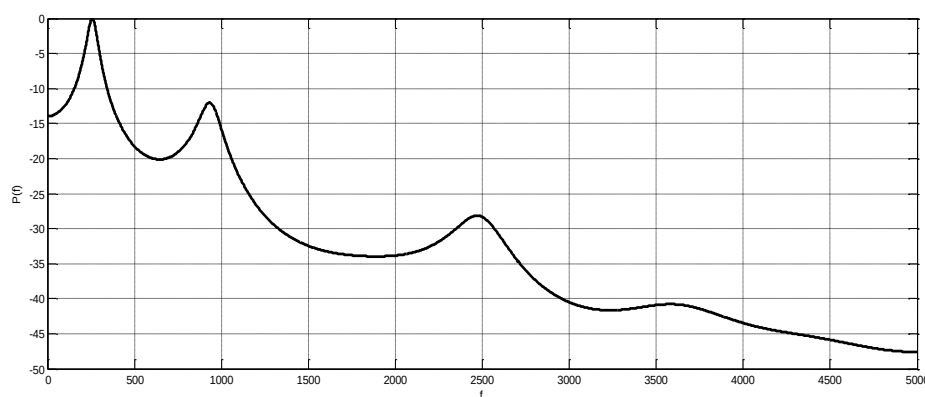
2.2.1 Имитационный процесс с параметрами реального сигнала

Построим модель АР звукового сигнала фонемы Е. Интервал дискретизации отсчетов составлял $T = 10^{-4}$. Оценки коэффициентов модели АР для $p = 12$ были получены по выборке длиной 1024 отсчетов с помощью системы уравнений Юла–Уокера (1.6, а). Параметрическая СПМ сигнала показана на рис. 2.1, а. Полученные оценки коэффициентов АР использовались для генерации имитационного процесса с использованием алгоритма формирующего фильтра (рис. 1.2). В качестве порождающего

процесса использовался нормальный белый шум. Параметрическая СПМ имитационного сигнала показана на рис. 2.1, б. Как видно из графиков СПМ, представленных на рис. 2.1, имитационный сигнал имеет СПМ близкую по форме к СПМ реального процесса.



а)



б)

Рисунок 2.1 – АР (12) оценки СПМ: а – фонема Е;
б – имитационный сигнал

2.2.2 Генерация случайных процессов с помощью модели авторегрессии

При генерации процесса АР следует учитывать, что наличие обратной связи в формирующем фильтре приводит к появлению переходного процесса у генерируемого сигнала. Переходной характеристикой $W[t]$ называется реакция системы (при нулевых начальных условиях) на единичный ступенчатый сигнал (единичный скачок)

$$1[t] = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Выражение для переходной характеристики АР формирующего фильтра имеет вид

$$W[t] = H(z)1[t] = \frac{1[t]}{\Phi(z)}. \quad (2.1)$$

Из этого выражения следует, что переходную функцию фильтра легко получить, подав на его вход единичный скачок.

Дискретная дельта-функция $\delta[t]$ определяется равенствами

$$\delta[t] = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$$

Импульсная характеристика АР формирующего фильтра может быть получена по формуле

$$h[t] = H(z)\delta[t] = \frac{\delta[t]}{\Phi(z)}. \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что импульсная характеристика является выходом фильтра, на вход которого подается дискретная дельта-функция. Импульсная и переходная характеристики связаны выражениями

$$h(t) = \frac{dW(t)}{dt}, W(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau.$$

Дискретная переходная характеристика связана с импульсной характеристикой равенствами вида [3]

$$\begin{aligned} W[0] &= h[0], \\ W[1] &= h[0] + h[1], \\ W[2] &= h[0] + h[1] + h[2], \\ &\dots \\ W[i] &= h[0] + h[1] + \dots + h[i]. \end{aligned}$$

По определению предельное значение переходной функции $W[t]$ при $t \rightarrow \infty$ есть статический коэффициент усиления

$$k = \lim_{t \rightarrow \infty} W[t].$$

Для формирующих фильтров линейного предсказания статический коэффициент усиления равен

$$k = \frac{1 - Q[1] - \dots - Q[q]}{1 - \Phi[1] - \dots - \Phi[p]}.$$

Отсюда следует, что для АР формирующего фильтра статический коэффициент усиления определяется соотношением

$$k = \frac{1}{1 - \Phi[1] - \dots - \Phi[p]}.$$
 (2.3)

Момент времени, с которого процесс можно считать стационарным, определяется временем установления процесса. Найдем интервал установления процесса АР. Переходной процесс формирующего фильтра описывается рекуррентным уравнением

$$x_n[t] = \sum_{i=1}^p \Phi[i] x_n[t-i].$$
 (2.4)

Решение уравнения (2.4) определяется корнями характеристического уравнения (1.15)

$$x_n[t] = \sum_{i=1}^p A[i] c[i]^t.$$
 (2.5)

Будем полагать процесс $x_n[t]$ практически затухшим на интервале t_0 , если

$$x_n[t_0] = 0.01 x_n[0].$$
 (2.6)

Учитывая (2.5), условие затухания переходного процесса (2.6) сводится к выражению [4]

$$A[i] |c[i]|_m^{t_0} = 0.01 A[i],$$
 (2.7)

где $|c[i]|_m^{t_0}$ – наибольший модуль из всех m модулей корней характеристического уравнения. С ростом t , остальные слагаемые в (2.6) будут затухать быстрее. Из (2.7) легко получить интервал установления стационарности процесса АР

$$t_0 = -2 / \lg |c[i]|_m. \quad (2.8)$$

Например, если при получении имитационного случайного процесса использовались оценки коэффициентов АР $\Phi[1]=1.378$ и $\Phi[2]=-0.678$, то корни характеристического уравнения равнялись $c[1,2]=0.689 \pm j0.451$. Рассчитанный по формуле (2.8) интервал установления стационарности составил 24 отсчета. Для получения стационарного имитационного процесса необходимо первые 24 отсчета исключить.

Для того чтобы имитационный случайный процесс был процессом АР с определенным порядком модели, необходимо, чтобы его корреляционная функция имела вид (1.31). В этом случае коэффициенты АР можно рассчитать по формулам (1.19). Рассмотрим некоторые примеры определения параметров генераторов АР процесса, когда заданы характеристики корреляционной функции или СПМ.

2.2.3 Низкочастотный случайный процесс АР с корреляционной функцией

$$r[k] = e^{-k\pi\Delta f T}. \quad (2.9)$$

Корреляционная функция (2.9) совпадает с корреляционной функцией модели АР первого порядка (1.31). Подставляя (2.9) в (1.6, а) и учитывая (1.19) для $p=1$, получаем

$$\Phi[1] = r[1] = \exp(-\pi\Delta f T). \quad (2.10)$$

На рис. 2.2 показана СПМ модели АР для $\Delta f = 2$ при $T = 0.01$ с рассчитанным по (2.10) коэффициентом АР $\Phi = 0.939$. Как видно из графика, показанного на рис. 2.2, СПМ модели АР характеризует низкочастотный случайный процесс с нулевой центральной частотой и заданной шириной полосы по уровню -3 дБ.

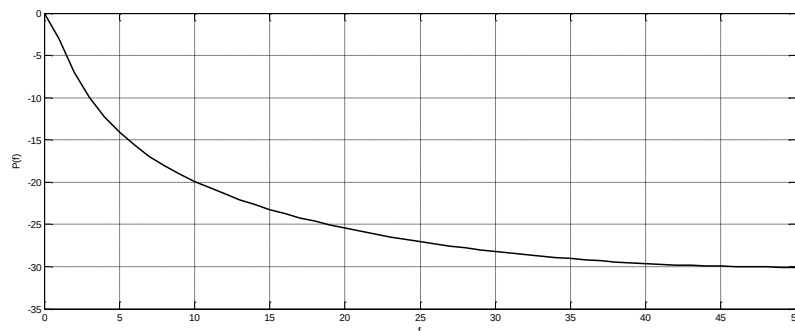


Рисунок 2.2 – СПМ модели АР(1) для $\Delta f = 2$.

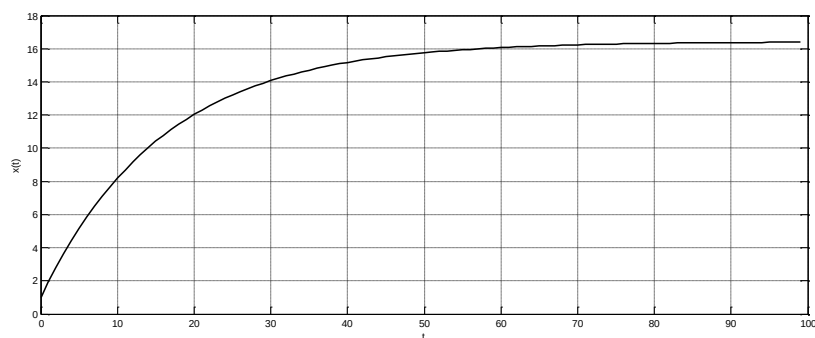


Рисунок 2.3 – Переходная характеристика фильтра модели АР (1)
для $\Delta f = 2$

Переходная характеристика фильтра, рассчитанная согласно (2.1), показана на рис. 2.3. Рассчитанное по (2.8), время переходного процесса составило 73 отсчета, что соответствует интервалу роста кривой на графике. Статический коэффициент усиления, полученный по формуле (2.3), составил 16,4.

2.2.4 Имитационный процесс АР второго порядка с корреляционной функцией

$$r[k] = A[1]\exp[(-\pi\Delta f + j2\pi f)kT] + A[2]\exp[(-\pi\Delta f - j2\pi f)kT]. \quad (2.11)$$

Если постоянные коэффициенты $A[1]$ и $A[2]$ выбираются таким образом, чтобы они удовлетворяли (1.35), то такой процесс описывается уравнением АР второго порядка. С учетом (1.19) для $p=2$ и (1.21) коэффициенты АР оказываются равными

$$\begin{aligned} \Phi[1] &= 2\cos 2\pi fT \exp(-\pi\Delta fT), \\ \Phi[2] &= \exp(-2\pi\Delta fT). \end{aligned}$$

Характеристики формирующего АР фильтра существенно зависят от ширины полосы его АЧХ. Покажем это на примере генерации процессов АР второго порядка с различными ширинами полос спектра. В табл. 2.1 приведены коэффициенты, рассчитанные для двух моделей АР, с одинаковыми частотами максимумов и существенно различными значениями ширин полос СПМ.

Таблица 2.1 Коэффициенты АР генератора процесса АР второго порядка

f	Δf	$\Phi[1]$	$\Phi[2]$
20	1	0.599	-0.939
20	20	0.330	-0.285

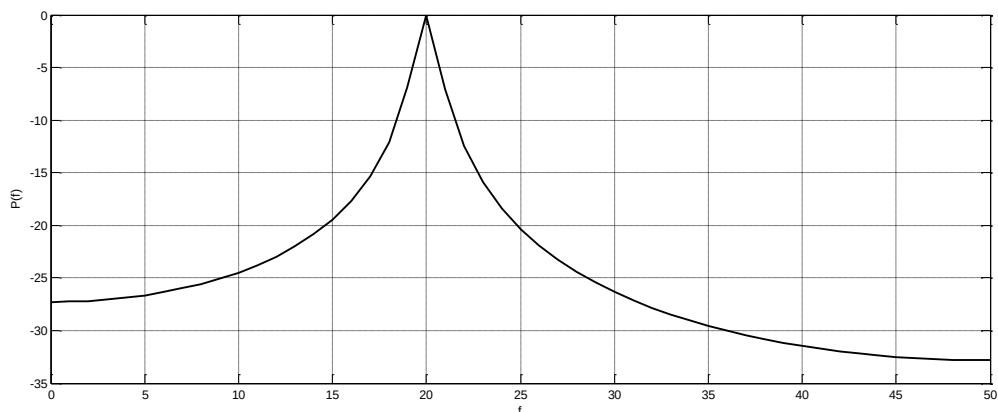


Рисунок 2.4 – СПМ модели АР (2) для параметров СПМ: $f = 20$, $\Delta f = 1$

Теоретическая параметрическая СПМ, рассчитанная по коэффициентам АР первой модели (табл. 2.1), показана на рис. 2.4. Переходная характеристика формирующего фильтра для этой модели, полученная согласно (2.2), представлена на рис. 2.5. Время переходного процесса, вычисленное по формуле (2.8), составило 146 отсчетов, что соответствует графику на рис. 2.5. Если при анализе переходной процесс не представляет интереса, то для получения стационарного процесса необходимо отбросить как минимум 146 отсчетов от начала выборки. Затухающая импульсная характеристика, полученная с использованием соотношения (2.2), изображена на рис. 2.6. Для такого узкополосного фильтра длина импульсной характеристики значительна и соответствует длине переходного процесса.

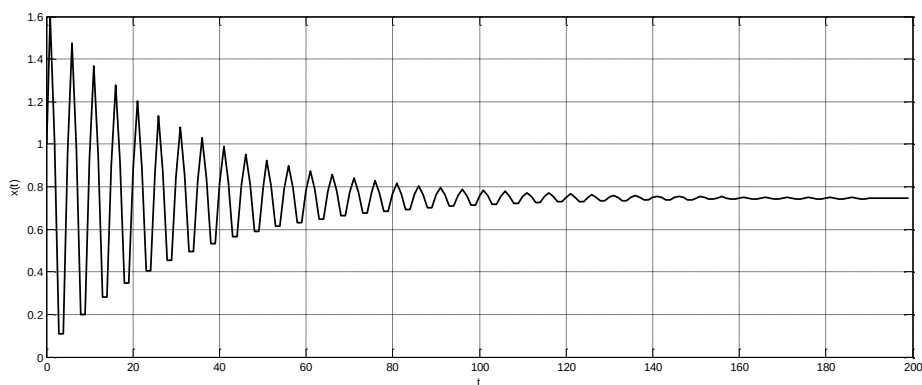


Рисунок 2.5 – Переходная характеристика фильтра модели АР (2) для параметров СПМ: $f = 20$, $\Delta f = 1$.

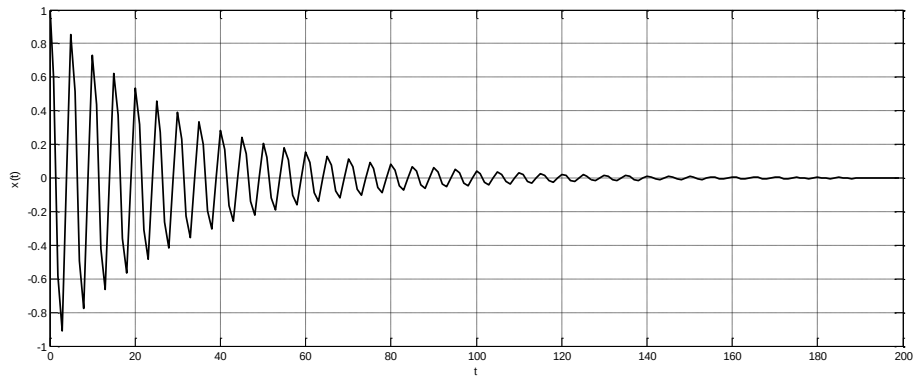


Рисунок 2.6 – Импульсная характеристика фильтра модели АР (2) для параметров СПМ: $f = 20$, $\Delta f = 1$

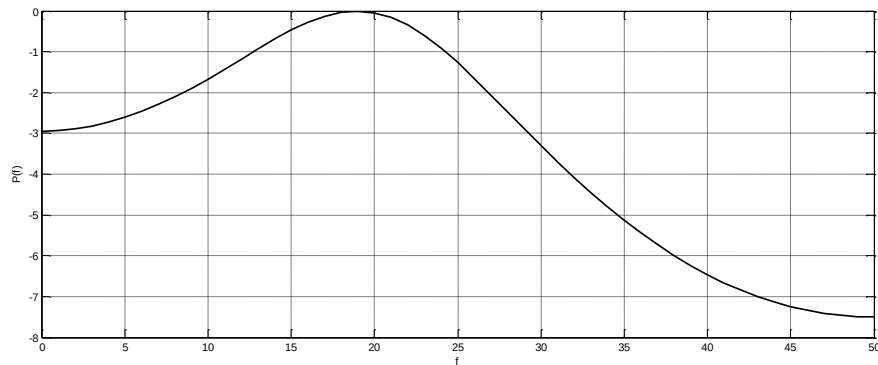


Рисунок 2.7 – СПМ модели АР(2) для параметров СПМ: $f = 20$, $\Delta f = 20$

На рис. 2.7 показана теоретическая параметрическая СПМ, рассчитанная по коэффициентам АР второй модели (см. табл. 2.1). Переходная характеристика формирующего фильтра для этой модели, полученная согласно (2.1), представлена на рис. 2.8. Время переходного процесса, вычисленное согласно (2.8), составило 7 отсчетов, что совпадает с данными графика на рис. 2.8. Для получения стационарного процесса необходимо отбросить как минимум 7 отсчетов от начала выборки. Затухающая импульсная характеристика, полученная с использованием соотношения (2.2), изображена на рис. 2.9. Для такого широкополосного формирующего фильтра длина импульсной характеристики невелика и соответствует длине переходного процесса, показанного на рис. 2.8. Частота положения пиков, рассчитанная согласно (1.17), составляла 20 для первого процесса и 18.9 для второго процесса. Значения частот пиков соответствует положениям пиков на графиках (рис. 2.5) и (рис. 2.8).

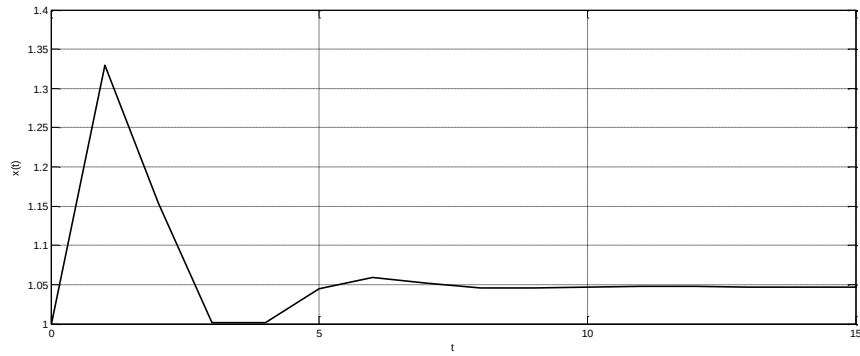


Рисунок 2.8 – Переходная характеристика фильтра модели АР (2) для параметров СПМ: $f = 20$, $\Delta f = 20$

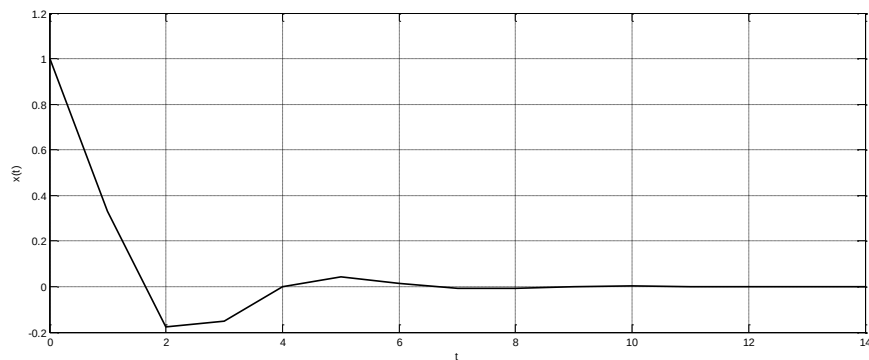


Рисунок 2.9 – Импульсная характеристика фильтра модели АР (2) для параметров СПМ: $f = 20$, $\Delta f = 20$

Сравним теоретическую и выборочную параметрическую СПМ имитационного процесса на примере модели АР второго порядка. При расчете коэффициентов модели АР второго порядка задавались следующие характеристики СПМ: $f_1 = 20$, $\Delta f_1 = 5$, при $T = 0.01$. Используя формулы (1.19) для $p = 2$, были рассчитаны значения коэффициентов АР: $\Phi[1] = 0.53$; $\Phi[2] = -0.73$. Теоретическая СПМ генерируемого процесса для длины выборки $N = 1000$ представлена сплошной линией на рис. 2.10. По найденным коэффициентам сгенерирован АР процесс и получены выборочные оценки коэффициентов АР по значениям корреляционной функции, используя (1.6, а). Затем вычислялась выборочная параметрическая оценка СПМ по (1.12). Оценка СПМ случайного АР процесса приведена пунктирной линией на рис. 2.10.

2.2.5 Имитационный процесс АР третьего порядка с корреляционной функцией

$$r[k] = A[1]\exp[(-\pi\Delta f + j2\pi f)kT] + A[2]\exp[(-\pi\Delta f - j2\pi f)kT] + \\ + A[3]\exp(-\pi\Delta f kT) \quad (2.12)$$

В (2.12) $A[i]$ – постоянные, значения которых определяются начальными условиями для $r[i]$. Рассмотрим пример генерации имитационного процесса АР третьего порядка со следующими параметрами СПМ: $f_1 = 0, \Delta f_1 = 5, f_2 = 30, \Delta f_2 = 5$. Значения рассчитанных по (1.19) коэффициентов АР формирующего фильтра составляли: $\Phi[1] = 0.326, \Phi[2] = -0.280, \Phi[3] = 0.624$. На рис. 2.11 приведена теоретическая и выборочная оценка СПМ генерируемого процесса АР. Анализ графиков показывает, что отклонения между задаваемой СПМ и его оценкой незначительны. Продемонстрированный метод генерации коррелированных случайных процессов АР особенно полезен в тех случаях, когда необходимо обрабатывать процессы АР с заданным порядком и формой спектра, а также некоторыми видами корреляционной функции.

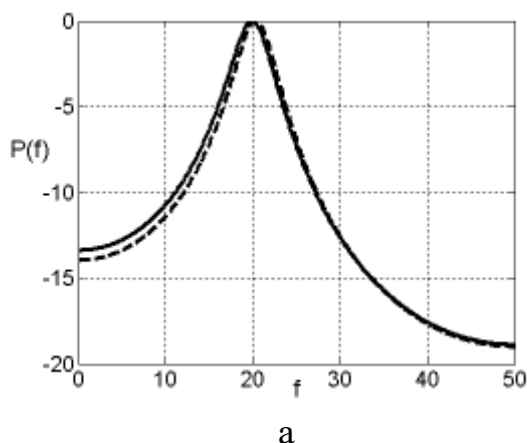


Рисунок 2.10 – СПМ модели АР (2) с параметрами спектра: $f_1 = 20, \Delta f_1 = 5$

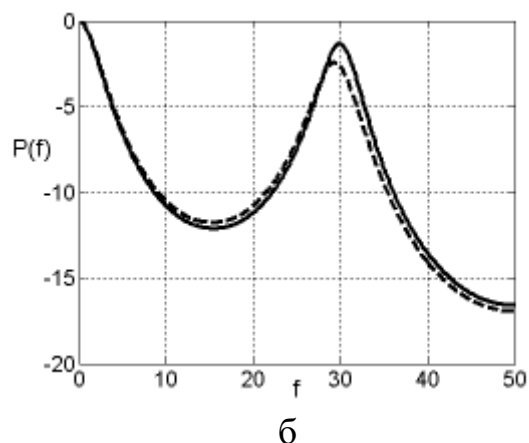


Рисунок 2.11 – СПМ моделей АР (3) с параметрами спектра: $f_1 = 0, \Delta f_1 = 5, f_2 = 30, \Delta f_2 = 5$

2.3 Имитационные процессы СС

Для получения широкополосных случайных процессов можно использовать генератор процесса СС, представленный на рис. 1.4.

Задача генерации имитационных процессов СС сильно упрощается, если коэффициенты СС известны, например, рассчитаны ранее по оценкам корреляционной функции реальных процессов. Однако часто необходимо получить

реализации случайных процессов СС с заданными параметрами СПМ. Такой простой связи между параметрами СС и СПМ, как это было для модели АР, в данном случае получить нельзя. Решение разностного уравнения СС (1.40) не определяется через корни характеристического уравнения вида (1.20), (1.21). Однако эту проблему можно в значительной мере решить, если воспользоваться свойством обратимости спектров моделей АР и СС [5].

Если предположить, что коэффициенты СС равны коэффициентам АР, то из (1.12) и (1.43) видно, что $P_{CC}(f) = P_{AP}(f)^{-1}$. Тогда частоты пиков в АР спектре будут совпадать с частотами минимумов в СС спектре, а ширина полосы спектра АР по уровню 0,5 будет соответствовать ширине полосы минимума СС спектра. Такую связь спектральных плотностей моделей СС и АР можно использовать для расчета коэффициентов СС по заданным характеристикам спектра [6]. Чтобы вычислить коэффициенты СС, необходимо задать частоты минимумов и ширину полос минимумов спектров модели СС и рассчитать корни характеристического уравнения (1.15). Подставляя найденные таким способом корни в (1.19), вычисляют коэффициенты АР и полагают их равными коэффициентам СС.

В качестве примера для моделирования имитационного использовалась модель СС четвертого порядка с параметрами минимумов СПМ: $f_1 = 10, \Delta f_1 = 5, f_2 = 30, \Delta f_2 = 5$. Для этих параметров по (1.19) рассчитывались коэффициенты АР и затем приравнивались к коэффициентам СС. В результате получаем: $Q[1] = 0.85, Q[2] = -0.73, Q[3] = 0.62, Q[4] = -0.53$.

На рис. 2.12 представлена выборка процесса СС четвертого порядка с указанными параметрами.

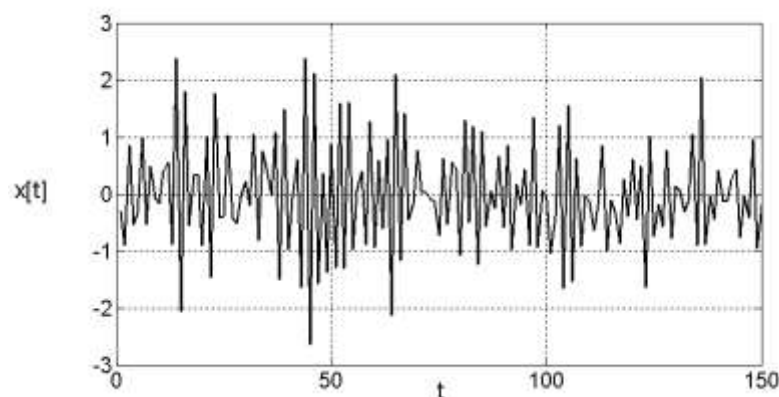


Рисунок 2.12 – Выборка процесса СС четвертого порядка с параметрами СПМ: $f_1 = 10, \Delta f_1 = 5, f_2 = 30, \Delta f_2 = 5$

По выборке процесса СС длиной 500 отсчетов оценивались коэффициенты СС по модели АР высокого порядка, используя метод, описанный в [7]. График нормированной корреляционной функции имитационного процесса показан на рис. 2.13, а. Оценки СПМ модели СС,

полученные по выборочным коэффициентам СС показаны на рис. 2.13, б. Как видно из графиков, оценка СПМ довольно близки к теоретической СПМ процесса СС. Анализ графиков показывает, что широкополосные процессы можно получить с помощью модели СС, коэффициенты которой рассчитаны по заданным характеристикам СПМ.

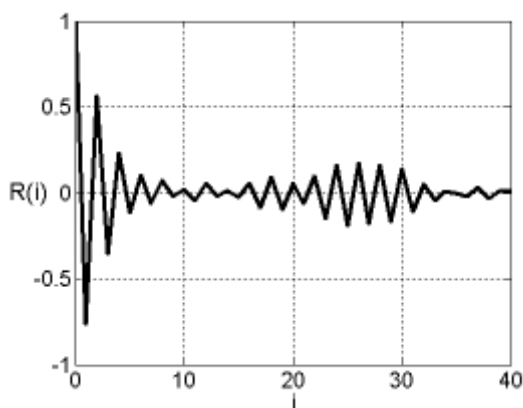


Рисунок 2.13, а – График нормированной корреляционной функции имитационного процесса

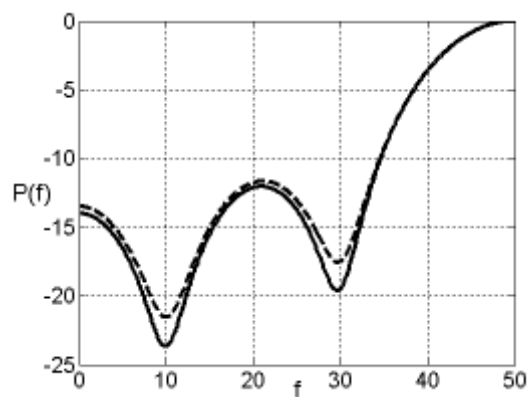


Рисунок 2.13, б – Оценки СПМ модели СС, полученные по выборочным коэффициентам СС

2.4 Генерация случайного процесса авторегрессии и процесса скользящего среднего с заданным спектром

Ниже приведен способ расчета параметров моделей АР и СС по заданной функции СПМ случайного процесса [9] или АЧХ линейной системы. Получены системы уравнений для расчета параметров моделей. Проанализирована возможность применения такого метода оценки параметров моделей для некоторых форм СПМ.

Оценивание параметров модели линейного предсказания по заданным спектральным отсчетам в научной литературе не рассматривалось. Вместе с тем, при решении ряда задач необходимо оценить параметры моделей АР или СС, если известны отсчеты СПМ процесса или заданы значения АЧХ некоторой линейной системы. Найденные таким образом параметры моделей можно использовать для построения моделей линейного предсказания, а также для синтеза формирующих или обеляющих фильтров, генерации выборок случайных процессов с заданной формой спектров.

Получим систему уравнений для расчета параметров моделей АР и СС по значениям СПМ. Из формул для параметрической оценки СПМ процессов АР и СС видно, что параметры моделей АР и СС входят в одинаковые выражения под знаком модуля

$$P(f) = D_a / \left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2 \quad (2.13)$$

и

$$P(f) = D_a \left| 1 - \sum_{i=1}^q Q[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2. \quad (2.14)$$

Поэтому удобно вывести необходимые уравнения совместно для этих моделей.

Будем полагать, что значения СПМ $P(f)$ известны. Тогда из (2.13) и (2.14) получаем уравнение

$$\left[1 - \sum_{i=1}^m G_i \cos(2\pi f i T) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^m G_i \sin(2\pi f i T) \right]^2 = \frac{D_a}{K(f)}, \quad (2.15)$$

где $G_i = \Phi[i]$, $K(f) = P(f)$, $K(f) = P(f)$ и $m = p$ для модели АР; $G_i = Q[i]$, $K(f) = 1/P(f)$ и $m = q$ для модели СС. В уравнении (2.15) дискретная переменная f известна, а неизвестными являются параметры G_i . Вид полученного уравнения (2.15) одинаков для моделей АР и СС.

Уравнение (2.15) путем несложных преобразований можно представить следующим образом:

$$1 + \sum_{i=1}^m G_i^2 + \sum_{n=1}^m \left[\cos(2\pi f n T) \left(-2G_n + \sum_{i=1}^{m-n} 2G_i G_{i+n} \right) \right] = \frac{D_a}{K(f)}. \quad (2.16)$$

С использованием обозначений

$$1 + \sum_{i=1}^m G_i^2 = X_0, \quad (2.17, а)$$

$$-2G_n + \sum_{i=1}^{m-n} 2G_i G_{i+n} = X_n, \quad (2.17, б)$$

уравнение (2.16) преобразуется к виду

$$X_0 + \sum_{n=1}^m X_n \cos(2\pi f n T) = \frac{D_a}{K(f)}. \quad (2.18)$$

Естественно полагать, что функция от спектральных отсчетов $K(f)$, стоящая справа в (2.18), аппроксимируется линейной функцией с неизвестными коэффициентами X_0, X_n в левой части (2.18). Тогда оценки параметров X_0, X_n можно найти методом наименьших квадратов, который позволяет получить систему $m+1$ уравнений

$$\sum_{f=1}^N [X_0 + X_1 \cos(2\pi f T) + \dots + X_m \cos(2\pi f m T)] = \sum_{f=1}^N \frac{D_a}{K(f)},$$

$$\sum_{f=1}^N [X_0 \cos(2\pi f T) + X_1 \cos^2(2\pi f T) + \dots + X_m \cos(2\pi f m T) \cos(2\pi f T)] = \sum_{f=1}^N \frac{D_a \cos 2\pi f T}{K(f)}, \quad (2.19)$$

$$\sum_{f=1}^N [X_0 \cos(2\pi f m T) + X_1 \cos(2\pi f T) \cos(2\pi f m T) + X_m \cos^2(2\pi f m T)] = \sum_{f=1}^N \frac{D_a \cos(2\pi f m T)}{K(f)},$$

где N – количество спектральных отсчетов $K(f)$, используемых для оценки параметров моделей. Спектральные отсчеты лежат в интервале от минимальной частоты f_{min} до максимальной частоты f_{max} . Интервал выбирается таким образом, чтобы в него попали основные особенности спектра, а получаемые решения удовлетворяли необходимой точности СПМ модели.

Найденные из (2.19) коэффициенты регрессии X_n подставляются в (2.17). Нелинейная система уравнений (2.17) имеет несколько решений в виде векторов параметров моделей. Из всех решений выбирается только действительные решения, по которым находятся параметрические оценки СПМ. В качестве параметров модели выбирается вектор, компонентами которого являются коэффициенты АР или СС, дающий наилучшее совпадение найденной по нему оценки СПМ с известным значением СПМ. Ниже рассмотрены два примера получения оценок параметров моделей АР и СС с разными формами СПМ.

Пример 1. Оценка параметров моделей АР и СС по двухмодовому спектру, описываемому выражением

$$P(f) = \frac{K_1 \Delta f_1}{\sqrt{\Delta f_1^2 + (f - f_1)^2}} + \frac{K_2 \Delta f_2}{\sqrt{\Delta f_2^2 + (f - f_2)^2}},$$

где $f_i, \Delta f_i, K_i$ – частота, ширина полосы и спектральная мощность i -го пика соответственно. Параметры СПМ задавались следующими: $K_1 \Delta f_1 = 1$; $\Delta f_1 = \sqrt{5}$; $f_1 = 40$; $K_2 \Delta f_2 = 1$; $\Delta f_2 = \sqrt{20}$; $f_2 = 80$.

При нахождении коэффициентов модели АР использовались параметры: $D_a = 1$, минимальная частота $f_{min} = 0$, максимальная частота $f_{max} = 100$, $N = 100$. Порядок модели АР выбирался как минимум в два раза больше количества пиков СПМ, расположенных на ненулевой частоте. Подходящие параметры модели АР были найдены при $p = 5$.

Решая систему уравнений (2.19), а затем подставляя найденные параметры в (2.17), для данного примера были получены 8 решений, из которых было выбрано одно, наиболее точно аппроксимирующее заданную СПМ (рис. 2.14). Как видно из рис. 2.14, моделируемая СПМ содержит довольно узкие пики. Так как спектральные оценки модели СС имеют широкие пики, то аппроксимация СПМ этой моделью дала худшие результаты (рис. 2.15). Наиболее подходящая модель СС рассчитывалась при следующих параметрах: $D_a = 0.01$, $f_{min} = 0$, $f_{max} = 100$, $N = 100$, $q = 5$. В результате были получены 7 решений, из которых выбиралось наиболее приемлемое по аппроксимации СПМ. Как и следовало ожидать, СПМ с довольно острыми пиками лучше описывается моделью АР.

Пример 2. Оценка параметров моделей АР и СС по одномодовой СПМ, описываемой выражением

$$P(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta f_1} e^{-\frac{(f-f_1)^2}{2\Delta f_1^2}}. \quad (2.20)$$

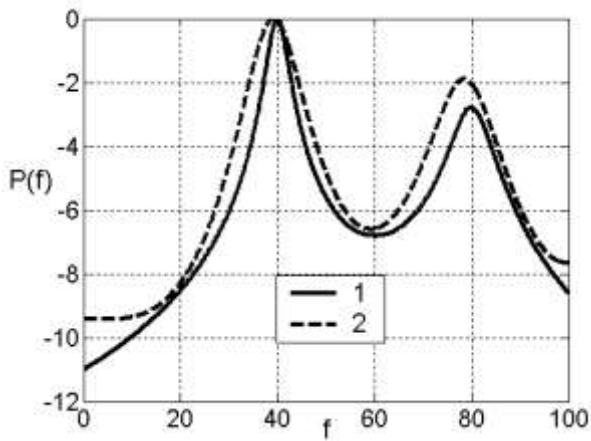


Рисунок 2.14 – Аппроксимация узкополосной СПМ моделью АР:
1 – моделируемая СПМ;
2 – аппроксимирующая СПМ

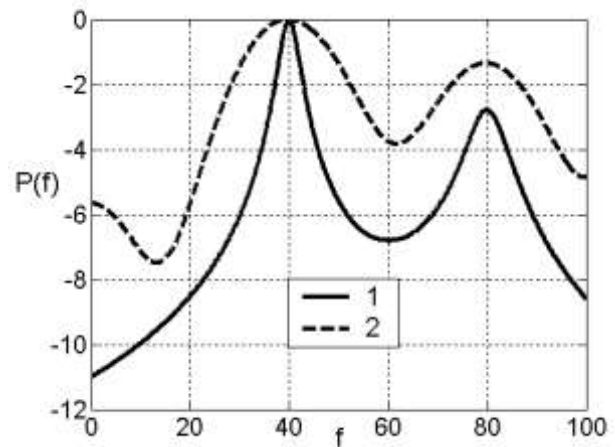


Рисунок 2.15 – Аппроксимация узкополосной СПМ моделью СС:
1 – моделируемая СПМ;
2 – аппроксимирующая СПМ

Характеристики СПМ выбирались следующими: $\Delta f_1 = 20$, $f_1 = 60$. При построении модели АР использовались параметры: $D_a = 0.01$, $f_{min} = 15$, $f_{max} = 100$, $N = 100$, $p = 3$. Наиболее подходящее решение дало оценку СПМ, представленную на рис. 2.16. Оценка коэффициентов модели СС по СПМ вида (2.20) проводилась при следующих параметрах: $D_a = 0.001$, $f_{min} = 0$, $f_{max} = 100$, $N = 100$, $p = 3$. Было получено 4 решения. На рис. 2.17 приведен спектр для вектора параметров, давшего минимальную ошибку аппроксимации. Сравнение графиков на рис. 2.16 и рис. 2.17 показывает, что, как и следовало ожидать, для широкополосных СПМ наилучшую аппроксимацию дает модель СС.

Найденные параметры модели АР могут не удовлетворять условию стационарности модели АР. Поэтому такие параметры можно использовать для расчета коэффициентов формирующих фильтров, используя процедуру инверсного переноса корней [7].

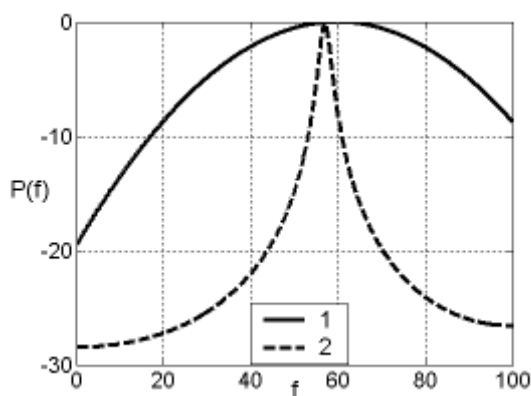


Рисунок 2.16 – Аппроксимация широкополосной СПМ моделью АР:
1 – моделируемая СПМ;
2 – аппроксимирующая СПМ

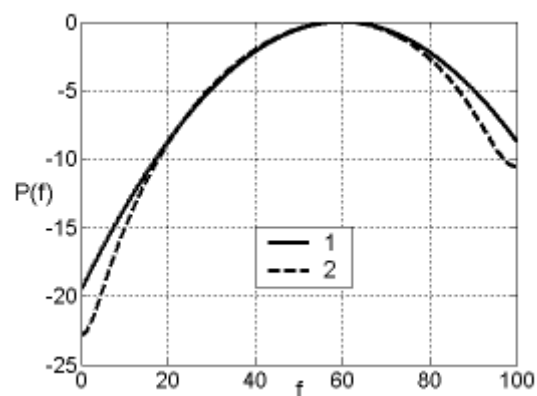


Рисунок 2.17 – Аппроксимация широкополосной СПМ моделью СС:
1 – моделируемая СПМ;
3 – аппроксимирующая СПМ

Все, полученные этим способом параметры модели СС, позволяют получить устойчивый формирующий фильтр. Таким образом, этот способ оценки параметров моделей АР и СС позволяет строить модели линейного предсказания по известным СПМ или АЧХ. Описанный способ расчета коэффициентов АР и СС расширяет возможности применения моделей линейного предсказания, что имеет практическое значение при моделировании линейных систем с заданными АЧХ и случайных процессов с заданными спектрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. Радио, 1971. – 326 с.
2. Омельченко В.О., Безрук В.М., Драган Я.П., Колесников О.О., Омельченко А.В. Імовірнісні моделі випадкових сигналів та полів прикладах та задачах: Навч. Посібник / За ред. В.О. Омельченка. – К.: ІСДО, 1996. – 272 с.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып. 2. – 197 с.
4. Лебедев А.Н., Недосекин Д.Д., Стеклова Г.А., Чернявский Е.А. Методы цифрового моделирования и идентификации стационарных случайных процессов в информационно-измерительных системах. – Л.: Энергоатомиздат. 1988. – 64 с.
5. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
6. Тихонов В.А., Тихонов Д.В., Бажина А.В. Моделирование широкополосных случайных процессов // Збірник наукових праць ХВУ. – Харьков: ХВУ. – 2000. – №4 (30). – С. 132–135.
7. Марпл – мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
8. Тихонов В.А., Кудрявцева Н.В. Синтез и анализ мультипликативных процессов линейного предсказания // Радиотехника. – 2010 – №162. – С.140–143.
9. Тихонов В.А., Доровский В.В., Горелов Д.Ю., Лихошерстов Е.С. Оценка параметров моделей линейного предсказания по спектральной плотности мощности // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – №2. – С. 9–12.

3 МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1 Введение

В главе рассмотрены модели линейного предсказания некоторого класса нестационарных в узком и широком смысле случайных процессов. Этот класс характеризуется нестационарным математическим ожиданием в виде тренда, описываемого степенной функцией. Показатель степени должен быть целым положительным числом. Наличие тренда приводит к нестационарности моментных функций всех порядков. Аналитически сложно описывать нестационарные процессы. В [1] описан способ преобразования нестационарных процессов к стационарным путем построения некоторой мультипликативной модели линейного предсказания. Одна из составляющих мультипликативной модели описывает стационарный процесс, а вторая учитывает степенной тренд. Следует иметь в виду, что предварительное преобразование процесса в этом способе, является причиной возникновения дополнительной погрешности.

Модели линейного предсказания, описывающие такой класс нестационарности, можно получить, предположив, что некая подходящая разность отсчетов процесса стационарна. В этом разделе рассмотрены свойства класса нестационарных процессов, у которых d -я разность является стационарным смешанным процессом авторегрессии – скользящего среднего. Эти модели называются процессами авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС) [1].

Ниже также рассмотрены модели для класса процессов с детерминированным, как правило, с априори известным периодом колебаний случайного процесса. В общем случае нестационарные процессы, имеющие такие свойства, принято называть сезонными процессами. СПМ сезонных процессов имеет узкую полосу, а корреляционная функция слабо затухает и имеет значительную длину. Для таких процессов периодическая составляющая процесса маскирует менее выраженную стационарную составляющую процесса, модель которой представляет интерес для идентификации модели. Способ построения моделей линейного предсказания сезонных процессов основывается на взятии подходящих разностей отсчетов процесса, устраняющих тренд и периодическую составляющие.

3.2 Модель авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего

Выше было показано, что процесс АРСС стационарный, если корни характеристического уравнения $\Phi(c)=0$ лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости, и нестационарный, если корни лежат вне единичного круга. Рассмотрим возможный случай – когда корни уравнения $\Phi(c)=0$ лежат на единичной окружности. Модели с таким свойством важны, так как позволяют

описывать однородные нестационарные случайные процессы со степенными трендами. Такие процессы могут нередко хорошо описываться моделями, у которых один или несколько корней характеристического уравнения равны единице.

Рассмотрим модель

$$\phi(z)\tilde{x}[t] = Q(z)a[t], \quad (3.1)$$

где $\phi(z)$ – нестационарный оператор авторегрессии, такой, что d корней уравнения $\phi(z)=0$ равны единице, а остальные лежат вне единичного круга, $\tilde{x}[t]$ – случайный нестационарный процесс с ненулевым средним. Модель (3.1) можно представить в виде

$$\phi(z)\tilde{x}[t] = \Phi(z)(1-z)^d \tilde{x}[t] = Q(z)a[t], \quad (3.2)$$

где $\Phi(z)$ – стационарный оператор авторегрессии (1.10).

Так как $\nabla^d \tilde{x}[t] = \nabla^d x[t]$ для $d \geq 1$, можно представить модель (3.2) в виде

$$\Phi(z)\nabla^d x[t] = Q(z)a[t]. \quad (3.3)$$

Эквивалентное определение процесса можно дать двумя уравнениями

$$\Phi(z)\omega[t] = Q(z)a[t] \quad (3.4)$$

и

$$\omega[t] = \nabla^d x[t]. \quad (3.5)$$

Таким образом, модель соответствует предположению, что d -я разность может быть представлена стационарным обратимым процессом АРСС.

Взятие d -ой разности по существу эквивалентно дифференцированию дискретного процесса. Поэтому необходимо отметить, что операция взятия производной, устраняя некоторые виды трендов, изменяет свойства стационарного процесса. Дифференцирование случайного процесса приводит к ослаблению низкочастотных и подъему высокочастотных спектральных компонент. Искажение спектра анализируемого случайного процесса приводит к погрешностям оценки параметров модели линейного предсказания. Таким образом, стационарная модель линейного предсказания строится не для стационарной составляющей процесса, а для его d -й производной, со всеми вытекающими последствиями. На этот факт не всегда обращают внимание.

Вместе с тем, во многих случаях, погрешность, вносимая при взятии разности, является приемлемой для решаемых задач.

Другой способ трактовки этого процесса при $d \geq 1$ получим, обратив (3.5)

$$x[t] = S^d w[t], \quad (3.6)$$

где S – бесконечный оператор суммирования, определенный как

$$Sw[t] = \sum_{i=-\infty}^t w[i] = (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots)w[t] = (1 - z^{-1})^{-1}w[t] = \nabla^{-1}w[t].$$

Таким образом,

$$S = (1 - z)^{-1} = \nabla^{-1}.$$

Оператор $S^2 x[t]$ определяется аналогично

$$S^2 w[t] = Sw[t] + Sw[t-1] + Sw[t-2] + \dots = \sum_{k=-\infty}^t \sum_{i=-\infty}^k w(i).$$

Уравнение (3.6) указывает, что процесс (3.3) можно получить суммированием (или интегрированием) процесса (3.4) d раз. Поэтому процесс (3.3) называется процессом АРПСС. Модели АРПСС для нестационарных временных рядов, рассмотренные также в [2], имеют фундаментальное значение в задачах прогнозирования и управления.

Модель (3.3) эквивалентна описанию формирования процесса $x[t]$, как выхода линейного фильтра, входом которого был белый шум $a[t]$. Если в (3.3) модель АР имеет порядок p , используется d -я разность и модель СС имеет порядок q , то обозначают нестационарную модель как АРПСС (p, d, q) .

По причинам, которые будут рассмотрены ниже, иногда целесообразно рассматривать некоторую обобщенную форму модели АРПСС (3.3), полученную добавлением постоянного члена Q_0 . Итак, довольно общий вид модели, который будет использоваться для описания временных рядов, это процесс авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего вида

$$\phi(z)x[t] = \Phi(z)\nabla^d x[t] = Q_0 + Q(z)a[t]. \quad (3.7)$$

В дальнейшем изложении будем полагать:

1) $\Phi(z)$ является оператором АР. Предполагается, что этот оператор стационарен, т. е. корни $\Phi(c)=0$ лежат внутри единичного круга.

2) $\phi(z) = \nabla^d \Phi(z)$ является обобщенным оператором АР. Это нестационарный оператор, у которого d корней уравнения $\phi(c)=0$ равны единице.

3) $Q(z)$ является оператором СС. Предполагается, что он обратим, т. е. корни $Q(c)=0$ лежат внутри единичного круга.

При $d=0$, модель (3.7) описывает стационарный процесс. Требования стационарности и обратимости моделей накладываются независимо. В общем случае операторы $\Phi(z)$ и $Q(z)$ имеют разные порядки.

Тренды могут быть стохастическими, однако, без резкого изменения уровня и наклона, а также детерминированными. В общем случае модель может включать детерминированную функцию времени.

Приведем примеры некоторых важных специальных случаев модели АРПСС. Эти модели являются частными случаями нестационарной модели при $d \geq 1$, которые часто встречается на практике.

1) Процесс АРПСС(0,1,1)

$$\nabla x[t] = a[t] - Qa[t-1] = (1 - Qz^{-1})a[t],$$

для которого $p=0, d=1, q=1, \Phi(z)=1, Q(z)=1 - Qz^{-1}$.

2) Процесс АРПСС(0,2,2)

$$\nabla^2 x[t] = a[t] - Q[1]a[t-1] - Q[2]a[t-2] = (1 - Q[1]z^{-1} - Q[2]z^{-2})a[t],$$

для которого $p=0, d=2, q=2, \Phi(z)=1, Q(z)=1 - Q_1z^{-1} - Q_2z^{-2}$.

3) Процесс АРПСС(1,1,1)

$$\nabla x[t] - \Phi \nabla x[t-1] = a[t] - Qa[t-1]$$

или

$$(1 - \Phi z^{-1}) \nabla x[t] = (1 - Qz^{-1})a[t],$$

для которого $p=1, d=1, q=1, \Phi(z)=1 - \Phi z^{-1}, Q(z)=1 - Qz^{-1}$.

При моделировании несезонных временных рядов, редко встречаются ситуации, при которой p , d или q должны быть больше 2. Часто оказывается, что эти параметры принимают значения 0 или 1.

В ряде случаев, для построения нестационарных моделей АРПСС, рационально применить нелинейное преобразование исходного случайного процесса $x[t]$. Область полезных приложений модели (3.7) может быть значительно расширена, если заменить $x[t]$ в (3.7) на $F(\lambda, x[t])$, где $F(\lambda, x[t])$ – некоторое нелинейное преобразование $x[t]$, включающее один или несколько параметров преобразования λ . Преобразование, которое можно применить, часто получают из априорной информации о моделируемом процессе или определяется из анализа данных.

Наиболее часто используется два представления общей модели (3.7). Каждое из них имеет свои достоинства. Текущее значение $x[t]$ процесса можно выразить:

а) через предыдущие значения $x[t]$, текущее $a[t]$ и предшествующие значения $a[t-j]$. Это достигается прямым использованием разностного уравнения.

б) только через текущий $a[t]$ и предшествующие значения ошибки $a[t-j]$, используя импульсную характеристику.

Прямое использование разностного уравнения позволяет выразить текущее значение $x[t]$ процесса через предшествующие значения $x[t-j]$ и текущее или предшествующие значения ошибки предсказания. Если

$$\phi(z) = \Phi(z)(1 - z^{-1})^d = 1 - \phi[1]z^{-1} - \phi[2]z^{-2} - \dots - \phi[p+d]z^{-(p+d)},$$

общая модель (3.7) при $Q_0 = 0$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} x[t] = & \phi[1]x[t-1] + \dots + \phi[p+d]x[t-p-d] - Q[1]a[t-1] - \dots \\ & \dots - Q[q]a[t-q] + a[t]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В качестве примера рассмотрим нестационарный процесс, описываемый моделью АРПСС (1,1,1)

$$(1 - \Phi z^{-1})(1 - z^{-1})x[t] = (1 - Qz^{-1})a[t], \quad (3.9)$$

в котором индексы 1 в Φ и Q опущены для краткости записи.

Тогда этот процесс можно записать в виде

$$x[t] = (1 + \Phi)x[t-1] - \Phi x[t-2] + a[t] - Qa[t-1]. \quad (3.10)$$

Эквивалентная форма представления, следующая из (3.8),

$$x[t] = \phi[1]x[t-1] + \phi[2]x[t-2] - Qa[t-1] + a[t].$$

Из этого уравнения получаем связь

$$\phi[1] = 1 + \Phi, \quad \phi[2] = \Phi.$$

Для многих целей, и, в частности, для вычисления прогнозов, разностное уравнение (3.8) является наиболее удобным описанием модели.

Модель АРПСС можно представить через импульсную характеристику, что оказывается полезным для некоторых приложений. Случайный статистически связанный процесс может быть представлен в виде свертки импульсной характеристики линейной системы и порождающего белого шума

$$x[t] = a[t] + \sum_{i=1}^{\infty} h[i]a[t-i] = h(z)a[t] = \sum_{i=-\infty}^t h[t-i]a[i]. \quad (3.11)$$

Умножив левую и правую части (3.11) на $\Phi(z)$, имеем

$$\Phi(z)x[t] = \Phi(z)h(z)a[t]. \quad (3.12)$$

Используя уравнение АРПСС

$$\phi(z)x[t] = Q(z)a[t],$$

из (3.12), получим соотношение

$$\phi(z)h(z) = Q(z) \quad (3.13)$$

для расчета значений импульсной характеристики. Для этого необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z .

Рассмотрим в качестве примера модель АРПСС (1,1,1). Из (3.9) следует

$$\phi(z) = 1 - (1 + \Phi)z^{-1} + \Phi z^{-2}$$

и

$$Q(z) = 1 - Qz^{-1}.$$

Подставляя эти выражения в (3.13), имеем

$$\left[1 - (1 + \Phi)z^{-1} + \Phi z^{-2}\right] \left(1 + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots\right) = 1 - Qz,$$

уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , можно получить выражения для вычисления значений импульсной характеристики:

$$\begin{aligned} h[0] &= 1, \\ h[1] &= A_0 + A_1\Phi, \\ h[2] &= A_0 + A_1\Phi^2, \\ &\dots \\ h[j] &= A_0 + A_1\Phi^j, \end{aligned}$$

где $A_0 = \frac{1-Q}{1-\Phi}$, $A_1 = \frac{Q-1}{1-\Phi}$. Учитывая, что $h[0] = A_0 + A_1$, уравнение (3.10) представляется в виде свертки

$$x[t] = \sum_{j=0}^{\infty} (A_0 + A_1\Phi^j) a[t-j].$$

3.3 Модель линейного предсказания сезонных случайных процессов

Ряд стационарных и нестационарных случайных процессов содержат случайную периодическую составляющую с детерминированным значением периода. Сезонная составляющая описывается уравнением [1, 3]

$$\Phi_2(z^s) \left(1 - z^{-s}\right)^{d_2} x[t] = Q_2(z^s) \alpha[t], \quad (3.14)$$

где s – период сезонного процесса,

$\Phi_2(z^s) = 1 - \Phi_2[1]z^{-s} - \Phi_2[2]z^{-2s} - \dots - \Phi_2[p_2]z^{-p_2s}$ – оператор сезонной модели АР,

$Q_2(z^s) = 1 - Q_2[1]z^{-s} - Q_2[2]z^{-2s} - \dots - Q_2[q_2]z^{-q_2s}$ – оператор сезонной модели СС,

$\alpha[t]$ – ошибки модели сезонного процесса.

Оператор взятия d_2 -й разности $\left(1 - z^{-s}\right)^{d_2}$ устраняет сезонный тренд.

Ошибки $\alpha[t]$ могут быть статически связанными и нестационарными.

Операторы $\Phi_2(z^s)$ и $Q_2(z^s)$ удовлетворяют условиям стационарности и

обратимости соответственно. В случае нестационарности процесса, определенной выше, ошибки $\alpha[t]$ описываются нестационарной моделью

$$\Phi_1(z)(1-z^{-1})^{d_1} \alpha[t] = Q_1(z)a[t]. \quad (3.15)$$

Операторы $\Phi_1(z)$ и $Q_1(z)$ порядков p_1 и q_1 соответственно, удовлетворяют условию стационарности и обратимости соответственно. Подставляя (3.15) в (3.14), получаем общую мультипликативную модель сезонного нестационарного процесса АРПСС $(p_1, d_1, q_1)(p_2, d_2, q_2)$

$$\Phi_1(z)\Phi_2(z^s)(1-z^{-1})^{d_1}(1-z^{-s})^{d_2} x[t] = Q_1(z)Q_2(z^s)a[t]. \quad (3.16)$$

3.4 Идентификация моделей линейного предсказания

Для практического использования моделей линейного предсказания (3.16) требуется определить порядки модели (значения p , q и d), оценить ее коэффициенты, а затем провести диагностическую проверку модели на предмет ее согласования с данными, оптимальности и экономичности. Заметим, что один и тот же процесс может быть описан разными моделями АРСС. Это возможно вследствие следующих причин. Во-первых, присутствует неоднозначность компоненты скользящего среднего, найденная по одной и той же корреляционной функции. При этом необратимую модель СС можно свести к эквивалентной, более предпочтительной обратимой модели. Во-вторых, характеристические уравнения авторегрессии и скользящего среднего могут содержать общие корни. Тогда порядок модели p , q можно понизить на число, равное количеству общих корней. Указанные неоднозначности могут создавать проблемы при оценивании параметров моделей.

Модели линейного предсказания – это математическое представление случайных процессов и сигналов. Это представление должно достаточно точно отражать их физическую сущность. Хотя во многих случаях можно добиться хорошего соответствия модели и процесса, к истинным процессам линейного предсказания можно отнести процессы, полученные при имитационном моделировании. Реальные процессы могут быть получены в результате сложных физических воздействий, далеких от тех, которые предполагает теория линейного предсказания. Например, некоторые отраженные радиолокационные сигналы и помехи, успешно моделируемые процессами АР, явно не были получены путем преобразования белого шума АР формирующим линейным фильтром. Поэтому построение модели не только формальный, но и часто творческий процесс получения эффективной экономичной модели, в первую очередь удовлетворяющий решению поставленной технической задаче. В задачах радиотехники, особенно при обработке нестационарных процессов в реальном

времени, в полной мере идентификацию модели проводить сложно. Однако в задаче распознавания образов, прогнозировании процессов необходимо идентифицировать, оценивать и подгонять модели. Наиболее сложная процедура идентификации необходима для модели АРПСС в силу сложности анализируемого процесса и возможности использования большого количества вариантов комбинаций составляющих моделей.

При построении АРПСС модели вначале определяется порядок дифференцирования d . Дискретное дифференцирование необходимо для того, чтобы превратить процесс с трендом в стационарный. Процедуру дифференцирования повторяют до тех пор, пока полученный стационарный процесс будет иметь убывающую автокорреляционную функцию, при этом стремящуюся к нулю сверху или снизу. Если после дифференцирования у процесса наблюдается медленный тренд или другие отклонения, либо если его корреляционная функция положительна при достаточно больших значениях аргумента, нужно продолжить дифференцирование. Дифференцирование уменьшает коррелированность процесса. Если значения функции корреляции исходного процесса строго положительны, то дифференцирование уменьшает их или даже делает отрицательными. Однако, если значение корреляционной функции в точке со сдвигом d значимо отрицательно (отрицательные значения корреляционной функции не меньше 0.5 по абсолютной величине), это вполне может означать, что процесс передифференцирован. Последовательные значения такого процесса слишком часто меняют знак, что свидетельствует о преобладании высокочастотной составляющей. Еще один признак возможной передифференцированности – увеличение стандартного отклонения процесса с ростом порядка d . Поэтому оптимальный порядок дискретной производной тот, при котором минимально стандартное отклонение.

Приведенные выше рекомендации не всегда позволяют сколько-нибудь точно определить нужный порядок дифференцирования. Однако, «умеренную недодифференцированность» можно скомпенсировать увеличением порядка модели АР, а «умеренную передифференцированность» – увеличением порядка модели СС. В некоторых случаях можно построить две модели, адекватные данным: первая модель, в которой порядок дифференцирования d равен 0 или 1, и не равен нулю порядок p ; вторая модель – с большим порядком дифференцирования d и не равным нулю q . Дифференцирование увеличивает ширину полосы спектра результирующего стационарного процесса.

Таким образом, в модели без дифференцирования предполагается, что исходный процесс стационарен. В модели с первой производной предполагается, что у исходного процесса имеется постоянный тренд (примером является случайное блуждание). В модели со второй производной предполагается, что тренд процесса непостоянен во времени (примером может служить случайный тренд).

В модели без дифференцирования или с производной первого порядка часто включают постоянную μ . При выборе порядка дифференцирования следует принимать во внимание роль постоянной μ в модели, если она включена. Постоянная μ представляет среднее процесса в моделях без дифференцирования, линейный тренд в моделях с производными первого порядка, нелинейный полиномиальный тренд в моделях с производными более высокого порядка. Как правило, предполагается, что производные второго и более высокого порядка исключают постоянную μ из модели.

3.5 Выбор порядка моделей АР и СС

Стационарные составляющие модели АРСС, получаемые после операции дифференцирования, как правило, имеют невысокий порядок. Узкополосные случайные процессы с многомодовым спектром описываются моделью АР с большим порядком. Он должен быть не меньше удвоенного количества пиков с частотами не на нулевой и не на максимальной частоте спектра. Если пики присутствуют на нулевой и на максимальной частоте спектра, то порядок должен быть увеличен минимум на единицу на каждый пик. Случайный процесс с широкополосным спектром описывается моделью АР с большим порядком. Порядок модели СС для таких процессов может быть меньше порядка модели АР.

Выбор порядка модели линейного предсказания основывается либо на анализе оптимальности полученной модели, либо на оценке некоторого информационного критерия. В случае заниженного порядка модель будет грубая, спектры будут сильно сглажены и с малым разрешением. При завышенном порядке можно получить высокое разрешение спектров, выделить спектральные составляющие слабых сигналов. Однако при этом наблюдается появление лишних пиков, которых не должно быть в спектре. Кроме этого, наблюдается расщепление истинных пиков.

Порядки моделей линейного предсказания можно определять путем анализа выполнения условия оптимальности. Для этого необходимо исследовать зависимость дисперсии ошибки предсказания от порядков модели. При выбранных порядках модели рассчитываются параметры модели и находятся ошибки предсказания путем обеления процесса. Затем определяется дисперсия ошибок предсказания. После этого строится зависимость оценки дисперсии ошибки предсказания от порядков модели. Если дисперсия принимает минимальное значение или перестает заметно убывать, определяется порядок модели, при котором это происходит.

Можно также выбирать порядки по близости характеристик ошибок предсказания к характеристикам белого шума. Для этого находится их оценка корреляции и принимается решение некоторым способом о равенстве ее нулю при ненулевых сдвигах. Если ошибки коррелированные, то следует увеличить

p или q . Менее эффективен способ определения порядков по близости СПМ ошибки предсказания к равномерному спектру белого шума.

Для выбора порядка модели АР можно использовать выборочную частную автокорреляционную функцию. Теоретическая частная автокорреляционная функция процесса АР имеет длину p . Следовательно, p равно порядку, при котором наблюдается последнее достаточно большое (по модулю) значение выборочной частной автокорреляционной функции. Доверительные интервалы можно оценивать по стандартной ошибке выборочного частного коэффициента автокорреляции, которая равна примерно $1/\sqrt{N}$ для порядков выше p . Если для $p+1$ оценки частной корреляционной функции по модулю меньше $1/\sqrt{N}$, то их можно считать равными нулю, а порядок модели полагать равным p .

Аналогично, для выбора порядка скользящего среднего можно использовать выборочную автокорреляционную функцию, поскольку теоретическая автокорреляционная функция процесса СС(q) обрывается на сдвиге q . Таким образом, следует выбрать порядок равным q , при котором наблюдается последнее достаточно большое (по модулю) значение выборочной корреляционной функции. Стандартная ошибка выборочного коэффициента автокорреляции тоже примерно равна $1/\sqrt{N}$. Более точная формула стандартной ошибки для корреляции при сдвиге $k > q$ имеет вид [4]

$$\sqrt{\frac{N-k}{N(N-2)}}.$$

Указанные выше способы оценки порядков моделей имеют недостатки. Так, часто бывает сложно указать, при каком порядке дисперсия ошибки перестает убывать. Применение интервальных оценок корреляционной функции не всегда удобно. Предложено несколько критериев типа целевых функций, по которым оцениваются порядки моделей [5]. В этих критериях порядок p или q выбирается посредством перебора из некоторого множества значений так, чтобы информационный критерий достигал минимума.

Порядок модели АРСС можно выбирать на основе информационного критерия Акайке

$$ИКА[p,q] = \ln D_a + \frac{2(p+q)}{N}.$$

Критерий Акайке нацелен на повышение точности прогнозирования. Критерий приводит к завышению порядка при росте длины выборки.

В байесовском информационном критерии Шварца используется выражение

$$БИК[p,q] = \ln D_a + \frac{\ln N(p+q)}{N}.$$

Байесовский критерий максимизирует вероятность выбора истинного порядка модели.

В критерии окончательной ошибки предсказания (ООП), предложенном также Акайке, минимизируется средняя дисперсия ошибки на каждом шаге предсказания.

ООП для модели АР вычисляется из выражения

$$ООП[p] = D_a \frac{N+p+1}{N-p-1}.$$

Для истинных процессов АР он обеспечивает отличные результаты. Что касается реальных сигналов, использование критерия приводит к заниженному порядку модели.

Критерий Рissanena, в котором вычисляется длина минимального описания (ДМО), является более совершенным вариантом критерия ИКА

$$ДМО[p] = N \ln D_a + p \ln N.$$

Еще один критерий, который был предложен Парзенем и получивший название авторегрессионной передаточной функции критерия (АПФК). Он имеет следующую форму:

$$АПФК[p] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p \bar{D}_{ai}^{-1} - \bar{D}_{ap}^{-1},$$

где $\bar{D}_{ai} = [N/(N-i)]D_{ai}$. Показано, что при коротких реализациях, ни один из критериев ООП, ИКА и АПФК не обеспечивает удовлетворительных результатов. В случае реальных данных оценки СПМ с использованием этих критериев мало отличаются. К сожалению, для реальных сигналов и процессов, выбор порядка моделей до сих пор носит сугубо субъективный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
2. Яглом А.М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными n – ми приращениями. Матем. сб., 37 (79), 141, 1955.
3. Montgomery D.C., Johnson L.A., Gardiner J.S. Forecasting & Time Series Analysis. – Mc.Graw-Hill Inc., 1990. – P. 384.
4. Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. Эконометрия. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2005. — 744 с.
5. Марпл–мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

4 ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ АРПСС

4.1 Введение

Прогнозирование случайных процессов основывается на исследовании статистических характеристик случайного процесса на участке наблюдения. Динамику случайного процесса наиболее полно отражает его математическая модель. Статистические характеристики процесса позволяют рассчитать параметры его модели. На выбор типа модели оказывают влияние в первую очередь свойства случайного процесса, а также условия и задачи прогнозирования. В качестве прогноза в упрежденной точке обычно используются математические ожидания процесса на один или несколько шагов вперед. Такой прогноз базируется на экстраполятивном подходе, т.е. простом продолжении сложившейся тенденции в будущее. Точность прогнозирования оценивается с помощью доверительного интервала, в который попадает значение прогнозируемой величины. В зависимости от интервала прогнозирования прогноз может быть краткосрочным, среднесрочным и долгосрочным.

Развитие методов прогнозирования сделало их пригодными для инженерного использования. В радиотехнике использование прогнозирования встречается в радиолокации, в системах автоматического управления. В последнее время растет интерес к применению прогнозирования к решению задач основе моделей линейного предсказания АРПСС [1–5]. Развита Г. Дженкинсом и Д. Боксом нестационарная модель АРПСС, в силу своего достаточно универсального математического аппарата, подходит для создания методов прогнозирования нестационарных процессов с полиномиальным трендом и сезонными составляющими. В разделе изложены основы теории прогнозирования нестационарных процессов линейного предсказания. Представлен пример прогнозирования функционирования системы сотовой связи.

4.2 Параметрическое прогнозирование по модели АРПСС

Прогноз на l шагов вперед получают, используя разностное уравнение (3.8), котором t заменяют на $t+l$

$$\begin{aligned} x[t+l] = & \phi[1]x[t-1+l] + \dots + \phi[p+d]x[t-p-d+l] - \\ & - Q[1]a[t-1+l] - \dots - Q[q][t-q+l] + a[t+l]. \end{aligned}$$

Прогноз можно получить также из уравнения свертки (3.11)

$$x[t+l] = \sum_{i=-\infty}^{t+l} h[t-i+l]a[i] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i]a[t+l-i].$$

Задача прогноза формулируется следующим образом. Пусть известны отсчеты статистически связанного случайного процесса $x[t]$ до момента времени t . Необходимо сделать оптимальный прогноз на l шагов вперед (с упреждением l) по критерию минимума среднеквадратической ошибки прогноза значения процесса $x[t+l]$. Для этого используются условные математические ожидания на момент времени t [6]

$$\hat{x}_t[l] = E\{x[t+l]\}.$$

Прогнозы, полученные из разностного уравнения АРПСС, представляются в виде

$$\begin{aligned} \hat{x}_t[l] &= E\{x[t+l]\} = \phi[1]E\{x[t-1+l]\} + \dots \\ &\dots + \phi[p+d]E\{x[t-p-d+l]\} - Q[1]E\{a[t-1+l]\} - \dots \\ &\dots - Q[q]E\{a[t-q+l]\} + E\{a[t+l]\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При нахождении прогноза через условное математическое ожидание, следует учитывать, что

$$\begin{aligned} E\{x[t-i]\} &= x[t-i], \quad i=0,1,2,\dots, \\ E\{x[t+i]\} &= \hat{x}_t[i], \quad i=1,2,\dots, \\ E\{a[t-i]\} &= a[t-i] = x[t-i] - \hat{x}_{t-i-1}[1], \quad i=0,1,2,\dots, \\ E\{a[t+i]\} &= 0, \quad i=1,2,\dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом, при прогнозе в уравнении (4.1) условные математические ожидания от:

$x[t-i]$, $i=0,1,2,\dots$ заменяются на известное к моменту времени t значение $x[t-i]$;

$x[t+i]$, $i=1,2,\dots$ заменяются на прогноз $\hat{x}_t[i]$, выраженный через разностное уравнение;

$a[t-i], i=0,1,2,\dots$ вычисляются из прогноза на шаг вперед $a[t-i] = x[t-i] - \hat{x}_{t-i-1}[1]$;

$a[t+i], i=1,2,\dots$ неизвестные на момент t полагаются равными нулю.

Прогноз в проинтегрированном виде представляется в виде свертки

$$\begin{aligned}\hat{x}_t[l] &= E\{x[t+l]\} = h[1]E\{a[t+l-1]\} + \dots + h[l-1]E\{a[t+1]\} + \dots \\ &\dots + h[l]E\{a[t]\} + h[l+1]E\{a[t-1]\} + \dots + E\{a[t+l]\}.\end{aligned}$$

Показано [6], что это значение можно представить в виде

$$x[t+l] = \hat{x}_t[l] + e_t[l],$$

где $e_t[l]$ – ошибка прогноза $\hat{x}_t[l]$ с упреждением l равная

$$e_t[l] = a[t+l] + h[1]a[t+l-1] + \dots + h[l-1]a[t+1]. \quad (4.3)$$

Прогноз $\hat{x}_t[l]$ выражается через ошибки предсказания

$$\hat{x}_t[l] = h[l]a[t] + h[l+1]a[t-1] + \dots$$

Взяв условное математическое ожидание от (4.3), можно доказать, что прогноз $\hat{x}_t[l]$ будет несмещенным, так как

$$E\{e_t[l]\} = 0.$$

Дисперсию ошибки прогноза находим из (4.3)

$$D_e[l] = (1 + h^2[1] + h^2[2] + \dots + h^2[l-1])D_a.$$

Для нахождения доверительных интервалов прогноза необходимо рассчитать значения импульсной характеристики. Для этого рассмотрим нестационарный мультипликативный процесс АРПСС, описываемый оператором

$$\begin{aligned}(1 - \Phi[1]z^{-1} - \dots - \Phi[p+d]z^{-(p+d)})(1 + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2} + \dots) = \\ = (1 - Q[1]z^{-1} - Q[2]z^{-2} - \dots - Q[q]z^{-q}).\end{aligned} \quad (4.4)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z , из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} h[1] &= \Phi[1] - Q[1], \\ h[2] &= \Phi[1]h[1] + \Phi[2] - Q[2], \\ &\dots \\ h[i] &= \Phi[1]h[i-1] + \dots + \Phi[p+d]h[i-p-d] - Q[i], \\ &\dots \\ h[k] &= \Phi[1]h[k-1] + \dots + \Phi[p+d]h[k-p-d]. \end{aligned}$$

Последнее уравнение справедливо при некотором k , равного наибольшей из величин $p+d-1$ и q . Если доверительная вероятность равна ε , то $(1-\varepsilon)$ пределы прогноза $x_{t+l}(-)$ и $x_{t+l}(+)$ имеют вид [6]

$$x_{t+l}(\pm) = \hat{x}_t[l] \pm u_{\varepsilon/2} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{l-1} h^2[i] \right\}^{1/2} s_a,$$

где $u_{\varepsilon/2}$ – квантиль гауссова распределения уровня $1-\varepsilon/2$, s_a – квадратный корень из оценки дисперсии ошибки предсказания D_a .

4.3 Прогнозирование интенсивности переговоров в системе мобильной связи

При решении задач планирования сетевых ресурсов, а также эффективного управления и оптимизации, зачастую необходимо прогнозировать возможные сценарии развития поведения сети при изменении параметров эксплуатации. К таковым могут относиться: введение в эксплуатацию нового оборудования каналов связи, изменение маршрутизации трафика зональности (кластеризации) контроллеров базовых станций, введение в сервис новых мультимедийных услуг и дополнительных сервисов. В некоторых плохо прогнозируемых случаях замена телекоммуникационного оборудования сети приводит к частичной либо полной остановке какого-либо сервиса. Введение новых услуг часто вызывает лавинообразный рост трафика либо абонентской базы оператора.

Сам по себе анализ полученных измерений представляет собой задачу отдельного крупного и важного для оператора сотовой связи процесса OSS (Operation Support System), определенного международным стандартом ITU-T. Функционирование системы поддержки операционной и бизнес – деятельности

операторов связи осуществляется посредством полной или частичной автоматизации этой деятельности. Задача системы OSS в данном случае состоит в том, чтобы с максимальной точностью предсказать динамику изменения параметров сети, а также возможность возникновения нештатных ситуаций. Однако, системы управления сетью позволяют лишь оповестить инженерный состав о возникшей проблеме и не имеют инструмента, который бы хоть в малом приближении смог оценить последствия для сети в случае изменения входных параметров (состав оборудования, его конфигурация, агрессивность трафика абонентов и т.д.). В данной ситуации интересным является применение математических методов, позволяющих на основе статистики, собранной либо системой О&М, либо автоматизированными измерительными комплексами, выполнить статистическое моделирование процессов, происходящих в сети. Построенная статистическая модель должна на основе вычисленных по известным данным параметров модели давать возможность эффективно прогнозировать динамику изменения характеристик сети.

Для прогнозирования стационарных и нестационарных случайных процессов успешно применяется модель линейного предсказания [6, 7]. Нестационарность таких процессов проявляется в виде тренда определенной формы. Этот класс нестационарных процессов можно определить, как стационарные однородные процессы, не имеющие постоянного среднего значения. В [6] рассматриваются нестационарные процессы, описываемые моделью АРПСС, тренд которых можно удалить с помощью взятия d –кратной разности отсчетов процесса. Операция нахождения d –кратной разности эквивалентна взятию d –й производной от значений случайного процесса. Таким образом, эта операция заменяет случайный процесс его соответствующей производной, устраняя при этом тренд некоторого порядка. После удаления тренда случайного процесса его d –я производная становится стационарной и ее можно анализировать методами, применяемыми для стационарных моделей линейного предсказания.

Ниже представлены модели линейного предсказания временных рядов, характеризующих функционирование системы сотовой связи. Адекватность данным синтезированных моделей проверялась по эффективности прогнозирования анализируемых временных рядов.

Предварительный анализ данных о функционировании системы за 222 дня, измеренных через каждые 30 минут, показывает, что они имеют нестационарность в виде тренда и две сезонные составляющие. В данных ярко выражена сезонная составляющая, связанная с суточной периодичностью интенсивности переговоров (рис. 4.1). Наблюдается также устойчивая сезонная составляющая с периодом, равным 7 дней. Растущий тренд интенсивности переговоров хорошо заметен на графике просуммированных за каждые сутки интенсивности переговоров (рис. 4.2). Однако в целом тренд неоднороден, т.к. в нем присутствуют участки роста с разной скоростью и спада.

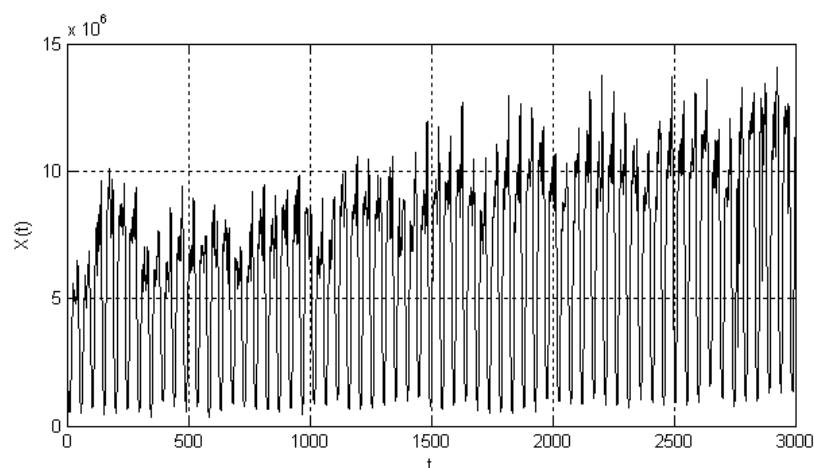


Рисунок 4.1–Трафик передачи данных абонентов вниз за каждые 30 секунд

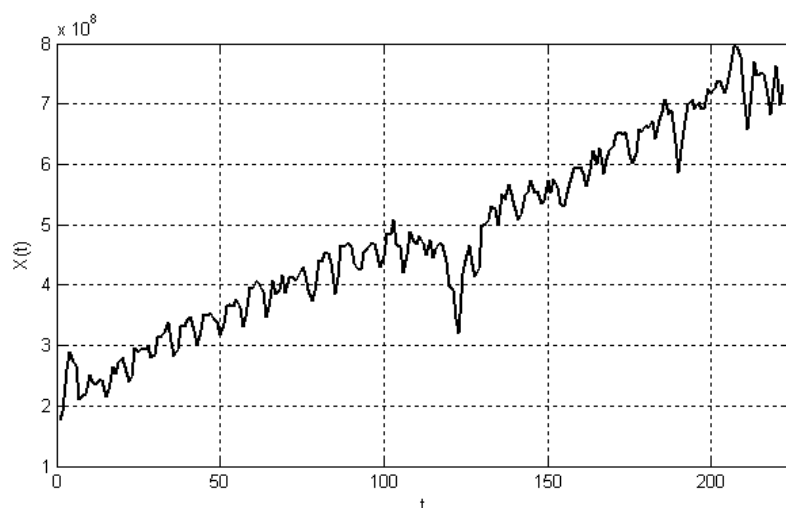


Рисунок 4.2–Трафик передачи данных абонентов вниз, просуммированных за каждые сутки

Для синтеза модели линейного предсказания интерес представляют статистические характеристики коррелированных стационарных данных, характеризующих функционирование системы. Анализ этих данных затруднен наличием сезонных колебаний процесса и трендом. Внутрисуточные колебания интенсивности приводят к тому, что корреляционная функция процесса характеризует в основном сезонные колебания и тренд. Для получения модели стационарного процесса необходимо вначале устранить тренд и сезонные колебания. Полная модель нестационарного процесса, используемая для прогнозирования, будет мультипликативно включать модели стационарной, трендовой и сезонной составляющей.

Нестационарные данные, характеризующие функционирование системы сотовой связи, рационально моделировать процессами АРПСС [6]. Для исключения сезонной составляющей применялся оператор взятия разности

$\nabla_s = 1 - z^{-s}$, где z^{-s} – оператор сдвига, действие которого определяется выражением $z^{-s}x[t] = x[t-s]$. Так как прогнозируемые данные представляют собой значения интенсивности за каждые 30 минут, то для исключения внутрисуточных колебаний нужно выбрать $s=48$, т.е. сдвиг равен количеству отсчетов за один день. После действия оператором ∇_s на исходный процесс

$$\omega_1[t] = \nabla_s x[t] = x[t] - x[t-48] \quad (4.5)$$

получаем новый случайный процесс $\omega_1[t]$ без внутрисуточных колебаний.

Для устранения тренда используется метод, применяемый для синтеза нестационарных моделей АРПСС [6], основанный на применении к случайным процессам с трендом оператора взятия разности

$$\omega[t] = \nabla^d x[t] = (1-z)^d x[t], \quad (4.6)$$

где d – порядок стационарных приращений процесса. Для линейного тренда $d=1$, а для квадратичного тренда необходимо брать $d=2$. Заметим, что для нестационарных процессов с произвольным законом изменения тренда применение этого метода дает существенные погрешности прогноза. Для линейных участков тренда (рис. 4.2) из (4.5), с учетом (4.6), получаем при $d=1$

$$\omega_2[t] = \nabla \omega_1[t] = \omega_1[t] - \omega_1[t-1]. \quad (4.7)$$

Исключение из нестационарного процесса сезонной составляющей и тренда позволяет синтезировать модели линейного предсказания стационарного процесса. На графике корреляционной функции процесса $\omega_2[t]$, представленной на рис. 4.3, а видно, что в выборке процесса присутствуют значимые корреляции для малых сдвигов времени. Кроме этого, вблизи сдвига 48 отсчетов наблюдаются отрицательные значения корреляции. Анализ корреляционной функции при больших сдвигах указывает на цикличность корреляционной функции, которая наблюдается для сдвига, равного недельному интервалу $T_n = 48 \times 7$ дней, равному 336 отсчетам. При долгосрочном прогнозе для устранения этой сезонной составляющей можно использовать также упрощающий оператор ∇_s , где $s=336$. Однако, для долгосрочного прогноза будем использовать просуммированные за сутки данные (рис. 4.2), для которых $s=7$.

Для сезонных процессов с трендом существует проблема выбора подходящей модели из множества возможных. Как показали исследования, для анализируемых данных при краткосрочном прогнозе в качестве нестационарной модели, соответствующей корреляционной функции, представленной на рис 4.3, наиболее подходящая модель имеет вид

$$\nabla_{48}(1-z^{-1})(1-\Phi z^{-1})x[t]=a[t], \quad (4.8)$$

где Φ – коэффициент модели $AP(1)$ стационарного процесса $\omega_2[t]$. Тогда сезонная модель описывается разностным уравнением

$$x[t] = (\Phi + 1)x[t-1] - \Phi x[t-2] + x[t-48] - (\Phi + 1)x[t-49] + \Phi x[t-50] + a[t]. \quad (4.9)$$

Выражение для расчета Φ получим, умножив (4.9) на $x[t-1]$ и усреднив,

$$\Phi = \frac{R[1] - R[0] - R[47] + R[48]}{R[0] - R[1] - R[48] + R[49]}.$$

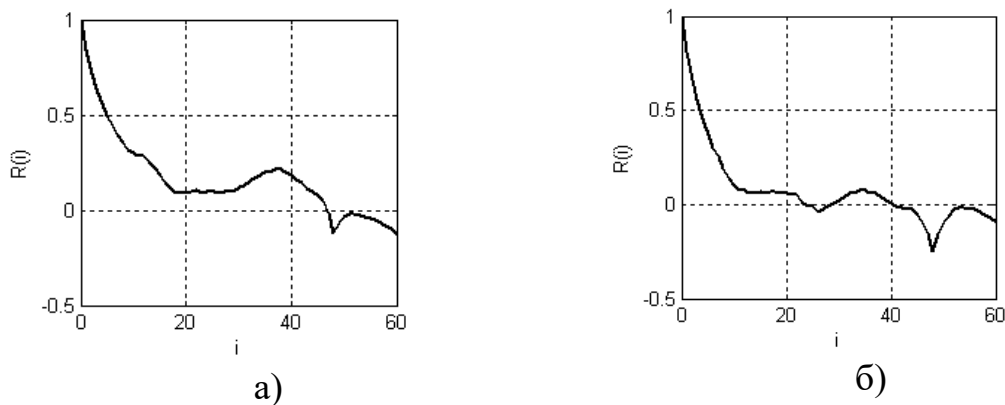


Рисунок 4.3 – Корреляционная функция процесса $\omega_2[t]$ трафика передачи данных абонентов вниз: а – для исходных, б – для логарифмов данных

В ряде случаев для анализа временных рядов, а также при решении задачи прогнозирования, применяется предварительное нелинейное преобразование данных. Прогнозирование интенсивности трафика в системе проводилось как по исходным данным, так и по их нелинейно преобразованным значениям. Заметим, что применяемое нелинейное преобразование уменьшает разброс данных для больших интенсивностей, но увеличивает разброс данных при низких интенсивностях. На графике корреляционной функции прологарифмированного процесса $x[t]$, представленного на рис. 4.3, б видно, что уменьшились колебания корреляционной функции относительно нулевой линии, а при сдвиге 48 ее значения стали более значимы.

Прогнозы способом разностного уравнения получают с минимальной среднеквадратической ошибкой на момент t с упреждением l . Такой прогноз есть условное математическое ожидание от $x[t+l]$ в момент t , при условии, что все $x[t]$ до момента t известны. Условные математические ожидания случайных величин, входящих в (4.8), определяются из (4.2).

Разностное уравнение, применяемое для прогноза на момент t на l шагов, получим из (4.8)

$$\begin{aligned} x[t+l] = & (\Phi + 1)x[t+l-1] - \Phi x[t+l-2] + x[t+l-48] - \\ & - (\Phi + 1)x[t+l-49] + \Phi x[t+l-50] + a[t+l]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Прогноз на упреждение l получаем как условное математическое ожидание от (4.10). Выражения для прогноза для разных упреждений l принимают вид:

$$\hat{x}_t[1] = (\Phi + 1)x[t] - \Phi x[t-1] + x[t-47] - (\Phi + 1)x[t-48] + \Phi x[t-49], l=1;$$

$$\hat{x}_t[2] = (\Phi + 1)\hat{x}_t[1] - \Phi x[t+1] + x[t-46] - (\Phi + 1)x[t-47] + \Phi x[t-48], l=2;$$

...

$$\hat{x}_t[l] = (\Phi + 1)\hat{x}_t[l-1] - \Phi \hat{x}_t[l-2] + x[t+l-48] - (\Phi + 1)x[t+l-49] + \Phi x[t+l-50], 3 \leq l \leq 48;$$

$$\hat{x}_t[49] = (\Phi + 1)\hat{x}_t[48] - \Phi \hat{x}_t[47] + \hat{x}_t[1] - (\Phi + 1)x[t] + \Phi x[t-1], l=49;$$

$$\hat{x}_t[50] = (\Phi + 1)\hat{x}_t[49] - \Phi \hat{x}_t[48] + \hat{x}_t[2] - (\Phi + 1)\hat{x}_t[1] + \Phi x[t], l=50;$$

...

$$\hat{x}_t[l] = (\Phi + 1)\hat{x}_t[l-1] - \Phi \hat{x}_t[l-2] + \hat{x}_t[l-48] - (\Phi + 1)\hat{x}_t[l-49] + \Phi \hat{x}_t[l-50], 51 \leq l.$$

Формулы для коррекции и дисперсии ошибки прогноза выражаются через импульсную характеристику линейной системы, описываемой разностным уравнением (4.8). Процесс на выходе линейной системы с импульсной характеристикой $h[i]$ может быть представлен в виде свертки

$$x[t] = h(z)a[t-i] = \sum_{i=0}^{\infty} h[i]a[t-i]. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых z^{-1} , получаем выражения для вычисления импульсной характеристики линейной системы

$$\begin{aligned}
h[1] &= \Phi, \\
h[2] &= \Phi^2, \\
&\dots \\
h[47] &= \Phi^{47}, \\
h[48] &= 1 + \Phi^{48}, \\
h[49] &= (1 + \Phi^{48})\Phi, \\
&\dots \\
h[i] &= (1 + \Phi^{48})\Phi^{i-48}.
\end{aligned}$$

Ниже представлены результаты краткосрочных прогнозов данных функционирования сотовой связи с учетом сезонной составляющей с периодом 48 отсчетов. На рис. 4.4 показан график прогнозов логарифмов данных трафика передачи данных абонентов вниз, а на рис. 4.5 изображен график прогнозов данных без предварительного логарифмирования. Для прогноза использовались модели $AR(1)$ с коэффициентами $\Phi = 0.7728$ и $\Phi = 0.7633$ для первого и второго случая соответственно. Сравнение графиков показывает, что прогнозы с использованием предварительного нелинейного преобразования имеют несколько выше точность в наиболее интересной области – при высокой интенсивности переговоров.

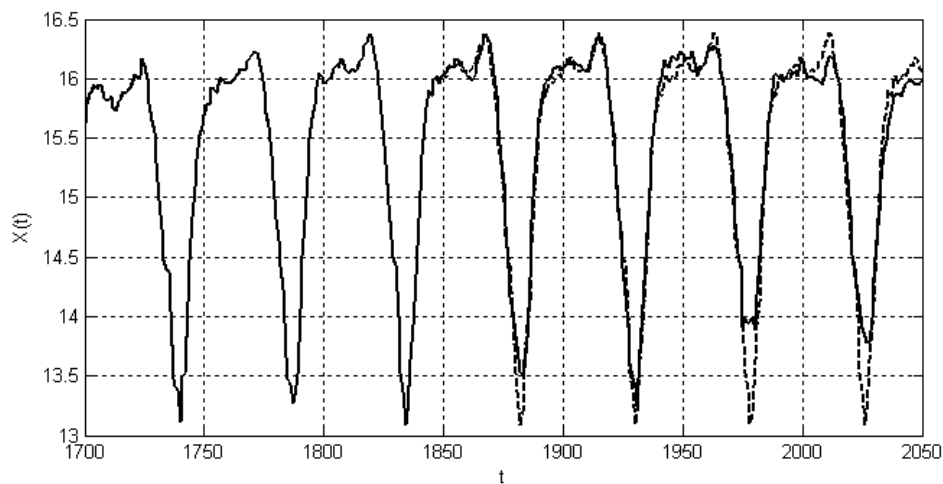


Рисунок 4.4 – Прогнозирование прологарифмированной выборки данных трафика передачи данных абонентов вниз

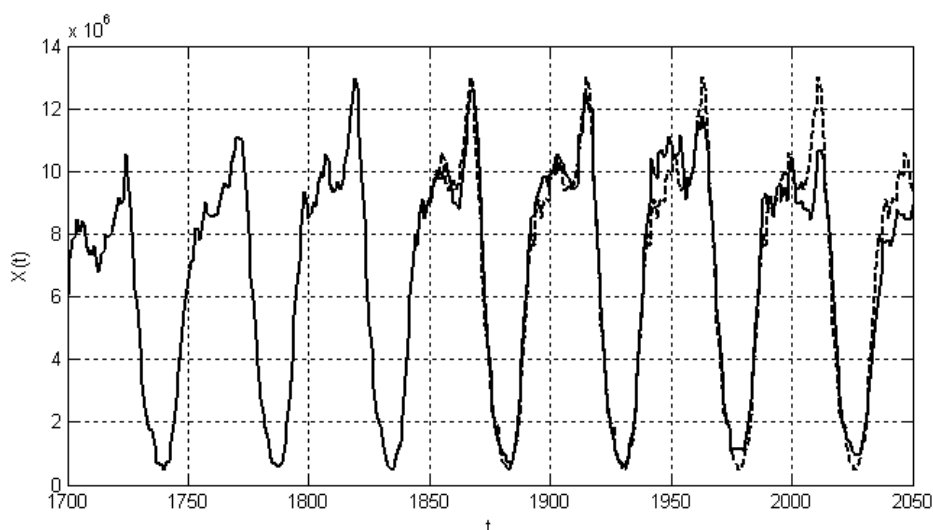


Рисунок 4.5 – Прогнозирование выборки данных трафика передачи данных абонентов вниз

На рис. 4.6 представлен график прогнозов логарифмов данных трафика передачи данных абонентов вверх. Прогноз осуществлялся по модели АР (1) с коэффициентом $\Phi = 0.7848$.

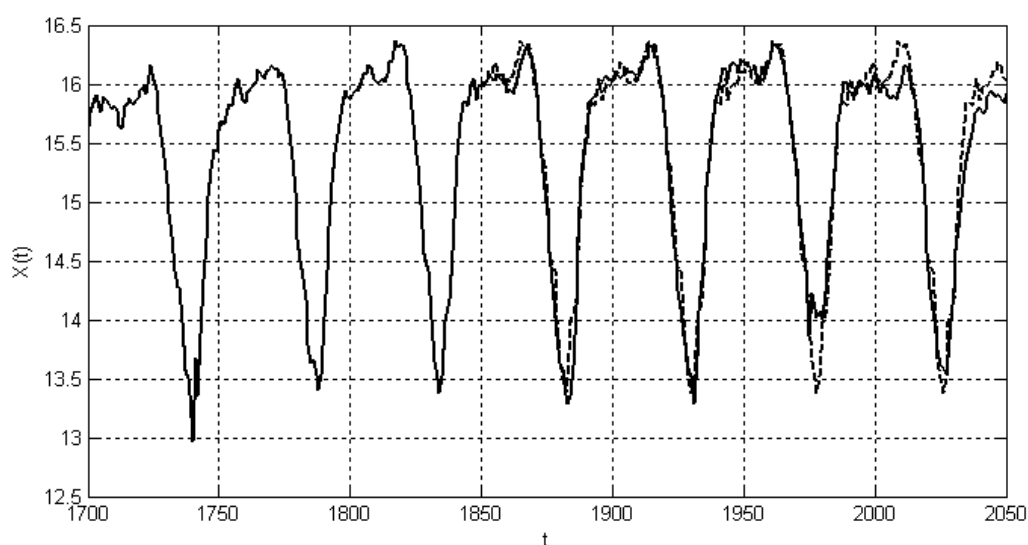


Рисунок 4.6 – Прогнозирование прологарифмированной выборки трафика передачи данных абонентов вверх

Кроме краткосрочного прогноза для эффективного управления системой сотовой связи необходимо также проводить долгосрочный прогноз данных, характеризующих функционирование системы связи. Анализ долгосрочных временных рядов, представляющих собой просуммированные за сутки данные (рис. 4.2), показывает наличие в тренде сезонных составляющих с квазидетерминированным периодом соответствующему недельному циклу колебания трафика.

Для решения задачи прогнозирования строились модели стационарных процессов линейного предсказания данных трафика после устранения линейного тренда и сезонной составляющей. Для устранения линейного тренда применялась операция взятия разности (4.7). Сезонная составляющая устранялась операцией

$$\omega_1[t] = \nabla_7 x[t] = x[t] - x[t-7].$$

Долгосрочное прогнозирование вызывает трудности, связанные, в первую очередь, с неоднородностью тренда, малой длиной реализации и выбором подходящей стационарной модели. Как показали исследования трендов анализируемых данных, они характеризуются неоднородными скоростями роста и спада тренда. Поэтому долгосрочный прогноз возможен лишь для небольших упреждений на однородном участке тренда.

На рис. 4.7 представлены данные прогнозирования выборки ежедневных данных трафика передачи данных абонентов вниз. Для стационарного случайного процесса, полученного после удаления тренда, применялась модель АР (1) с коэффициентом авторегрессии, равным 0.5663. Начало прогноза выбиралось в точке относительной однородности тренда. Упреждение прогноза составляло три цикла, соответствующих трем неделям. Для сравнения проводилось также прогнозирование прологарифмированной выборки ежедневных данных трафика передачи данных абонентов вниз (рис. 4.8). Стационарная модель АР (1) для этих данных описывалась коэффициентом авторегрессии равным 0.6241.

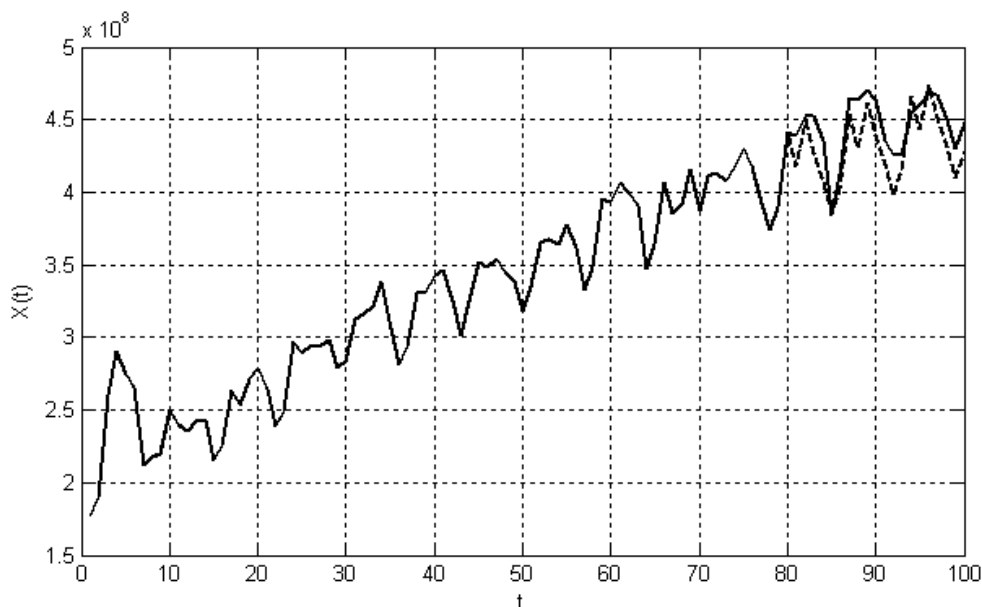


Рисунок 4.7 – Прогнозирование выборки ежедневных данных трафика передачи данных абонентов вниз.

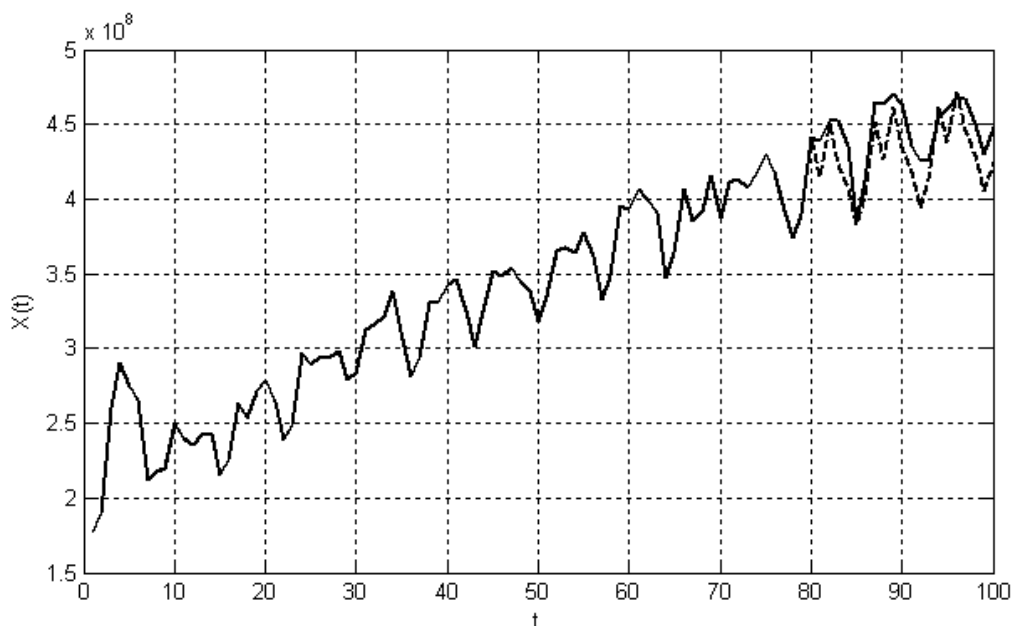


Рисунок 4.8 – Прогнозирование прологарифмированной выборки ежедневных данных трафика передачи данных абонентов вниз

Как видно из сравнения графиков прогнозов, представленных на рис. 4.7 и рис. 4.8, применение предварительного нелинейного преобразования данных в этом случае заметного улучшения не дает. Очевидно, это объясняется тем, что процентный разброс данных (отличие минимального значения от максимального значения) невелик, по сравнению с данными, прогноз которых приведен на рис. 4.4 – 4.6.

Как отмечалось выше, точность прогноза существенно зависит от начальной точки прогноза в случае неоднородного тренда. На рис. 4.9 представлен график прогноза прологарифмированной выборки ежедневных данных трафика передачи данных абонентов вниз с точкой начала прогноза равной 60 отсчетов, а не 80 отсчетов, как в прогнозах, представленных на рис. 4.7 – 4.8. Стационарный процесс в этом случае, полученный после устранения цикла и тренда описывался моделью АР (1) с коэффициентом авторегрессии, равным 0.6241.

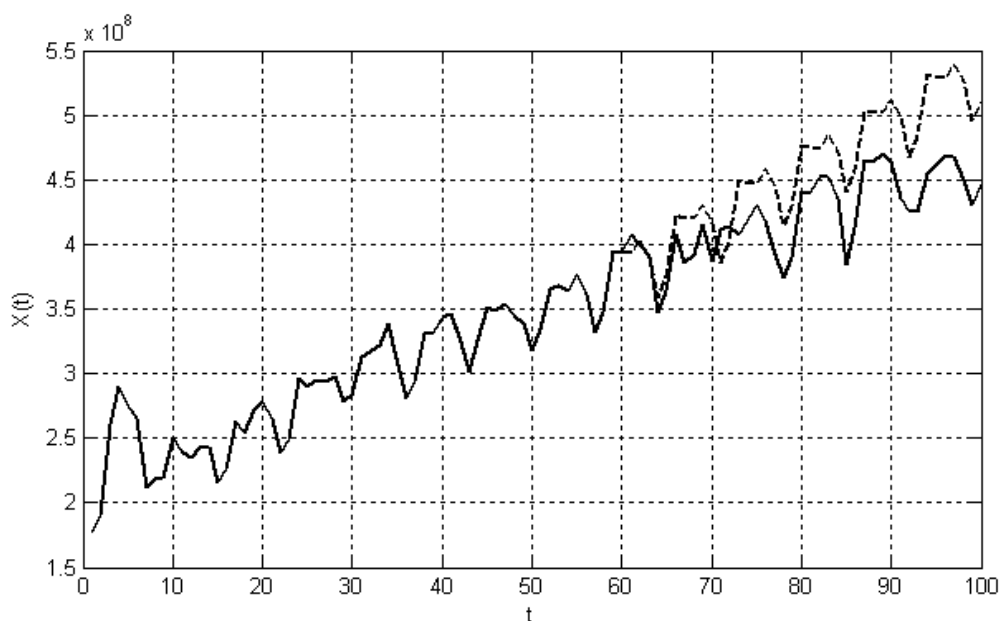


Рисунок 4.9 – Прогнозирование прологарифмированной выборки ежедневных данных трафика передачи данных абонентов вниз

Как было замечено выше, точность прогноза зависит от характеристик тренда. Так, из графика, представленного на рис. 4.10 видно, что тренд не может быть описан ни линейной, ни параболической, ни гиперболической функцией. Поэтому прогнозирование данных трафика с такими трендами по методу, описанному в [6], весьма сложно и требует более тщательного подбора моделей, а также разработки более сложных классов моделей линейного предсказания.

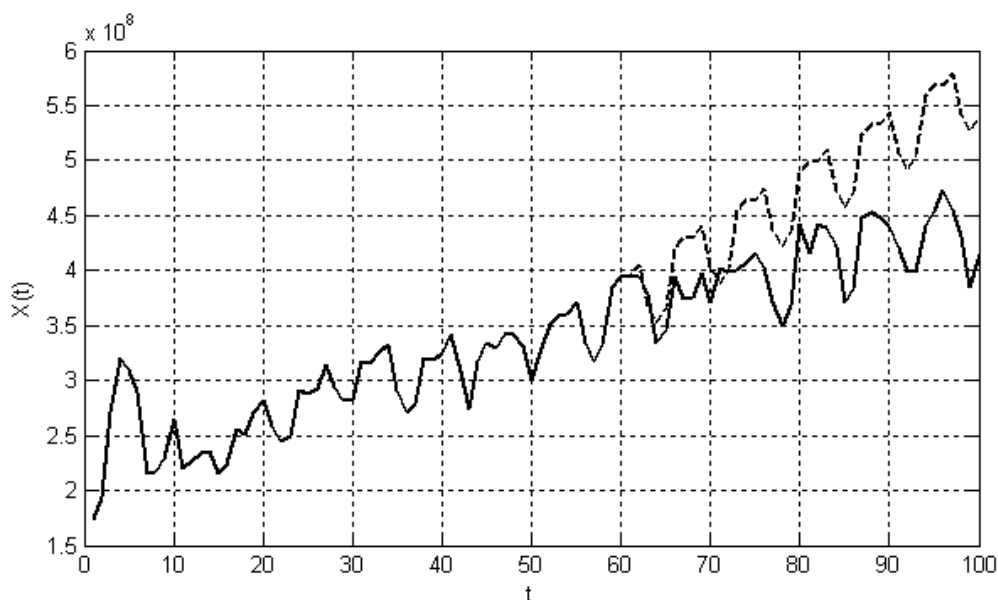


Рисунок 4.10 – Прогнозирование выборки ежедневных данных трафика передачи данных абонентов вверх.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грешилов А.А., Стакун В.А., Стакун А.А. Математические методы построения прогнозов. – М.: Радио и связь. 1997. – 112 с.
2. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. / Под ред. В.Э. Фигурнова. – М.: ИНФРА–М. 1998. – 528 с.
3. Строгонов А. В. Прогнозирование деградации выходных параметров ТТЛ ИС. Часть I. Компоненты и технологии. – 2005. – №8. – С. 210–214.
4. Строгонов А. В. Прогнозирование деградации выходных параметров ТТЛ ИС. Часть II. Компоненты и технологии. – 2005. – №9. – С. 194–199.
5. Строгонов А. В. Верификация прогнозов АРПСС–моделей временных рядов, применяемых для прогнозирования долговечности ИС. Компоненты и технологии. – 2006. – №5. – С. 184–188.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
7. Боровиков В.П., Ивченко Г.И. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows: Учебн. пособие. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 384 с.

5 КОМПЛЕКСНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

5.1 Введение

Процессы линейного предсказания успешно применяются для моделирования радиотехнических сигналов. Комплексное представление сигналов играет важную роль в радиотехнике. Для анализа таких процессов необходимо применять комплексные модели линейного предсказания [1]. Ниже рассмотрены вопросы моделирования некоторых комплексных сигналов статистической радиотехники с использованием комплексных моделей.

В разделе представлены принципы построения комплексной модели АРСС. Показано, что все основные соотношения для действительной модели справедливы и для комплексной модели. Для моделирования аналитического узкополосного сигнала использовалась комплексная модель АР. Статистические характеристики и параметры модели выражались через вещественную и мнимую части. Хотя обработка комплексного сигнала в радиотехнических цепях, как правило, ведется с вещественной и мнимой частями, вывод ряда соотношений в таком представлении более сложный, чем если бы сигнал рассматривался одним комплексным числом.

Рассмотрены примеры построения модели авторегрессии первого и второго порядков аналитического сигнала. Получены выражения для расчета параметров этих моделей по спектральным характеристикам. В разделе описаны модели авторегрессии комплексной огибающей аналитического сигнала с детерминированной фазой и аналитического сигнала на несущей частоте. Представлены выражения для расчета параметров таких моделей.

5.2 Комплексные модели линейного предсказания

Пусть $\dot{x}[t]$ случайный комплексный стационарный процесс с нулевым средним описывается разностным уравнением АРСС

$$\dot{x}[t] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{x}[t-k] - \sum_{k=0}^q \dot{Q}[k] \dot{a}[t-k], \quad (5.1)$$

где $\dot{\Phi}[k]$ и $\dot{Q}[k]$ – комплексные коэффициенты АР и СС соответственно, $\dot{a}[t]$ – комплексный белый шум, $\dot{Q}[0] = 1$. Модель (5.1) оптимальна, если

$$E\{\dot{a}[t] \dot{a}^*[t-i]\} = 0, i > 0, \quad i > 0.$$

Для нахождения уравнений, позволяющих рассчитать параметры модели, умножим (5.1) на $\dot{x}^*[t-i]$ и усредним. В результате получим уравнение Юла–Уокера в комплексном виде

$$\dot{R}[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{R}[i-k] - \sum_{k=0}^q \dot{Q}[k] \dot{R}_{xa}[i-k], \quad (5.2)$$

где $\dot{R}[i]$ – комплексная автокорреляционная функция, $\dot{R}_{xa}[i]$ – комплексная взаимная корреляционная функция, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} \dot{R}_{xa}[i] &= 0, \quad i > 0, \\ \dot{R}_{xa}[i] &\neq 0, \quad i \leq 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что взаимная корреляционная функция выражается через комплексную импульсную характеристику $\dot{h}[k]$. Умножая левую и правую части уравнения

$$\dot{x}^*[t] = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{h}^*[k] \dot{a}^*[t-k]$$

на $\dot{a}[t-i]$ и усреднив, получим

$$\dot{R}_{xa}[i] = D_a \sum_{k=0}^{\infty} \dot{h}^*[k] \delta[i+k]. \quad (5.3)$$

Здесь было учтено, что корреляционная функция белого шума имеет вид δ –функции

$$\dot{R}_{aa}[i] = D_a \delta[i].$$

Учитывая фильтрующее свойство δ –функции, из (5.3) имеем

$$\dot{R}_{xa}[i] = D_a \dot{h}^*[-i].$$

Так как $h[0] = 1$, взаимная корреляционная функция равна:

$$\dot{R}_{xa}[i] = \begin{cases} 0, & i > 0, \\ D_a, & i = 0, \\ D_a \dot{h}^*[-i], & i < 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Заметим, что

$$\dot{h}[i] = \dot{Q}[i], \quad 1 \leq i \leq q. \quad (5.5)$$

Чтобы получить уравнения для расчета параметров модели, умножим правую и левую части (5.1) на $\dot{x}^*[t-i]$ и усредним. С учётом (5.5) и (5.4), уравнение (5.2) приводится к виду

$$\dot{R}[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{R}[i-k] - \sum_{k=0}^q \dot{Q}[k] \dot{Q}^*[k-i], \quad (5.6, a)$$

$$\dot{R}[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{R}[i-k], \quad q < i. \quad (5.6, б)$$

Для нахождения параметров комплексной модели АРСС сначала вычисляются коэффициенты АР по модифицированным уравнениям Юла–Уокера (5.6, б). Из уравнения (5.6, б) следует уравнение в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{R}[q] & \dot{R}[q-1] & \cdots & \dot{R}[q-p+1] \\ \dot{R}[q+1] & \dot{R}[q] & & \dot{R}[q-p+2] \\ \cdots & & & \\ \dot{R}[q+p-1] & \dot{R}[q+p-2] & & \dot{R}[q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}[1] \\ \dot{\Phi}[2] \\ \cdots \\ \dot{\Phi}[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{R}[q+1] \\ \dot{R}[q+2] \\ \cdots \\ \dot{R}[q+p] \end{bmatrix}.$$

После вычисления коэффициентов АР, из (5.6, а) находятся коэффициенты СС. Для этого при $q > 1$ применяются численные методы.

Для комплексной модели АРСС параметрическая СПМ определяется выражением

$$P(f) = \left| \frac{\dot{Q}(f)}{\dot{\Phi}(f)} \right|^2 D_a = \frac{\left| 1 - \sum_{n=1}^q \dot{Q}[n] e^{-j2\pi fnT} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}[i] e^{-j2\pi fiT} \right|^2} D_a,$$

где $\dot{Q}(f)$ и $\dot{\Phi}(f)$ – операторы СС и АР в частотном представлении.

На практике чаще всего применяется модели АР или СС. Поэтому ниже приведены основные выражения для этих комплексных моделей. Они могут быть построены исходя из соответствующих разностных уравнений моделей, как это было показано для моделей действительных сигналов. Используя построенную выше полную комплексную модель АРСС, как было показано в этом разделе, модели АР или СС могут рассматриваться как ее частные случаи. Такой подход также используется при построении моделей линейного предсказания [1].

Частным случаем модели АРСС (5.1) является комплексная модель АР

$$\dot{x}[t] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{x}[t-k] + \dot{a}[t]. \quad (5.7)$$

Параметры комплексной модели АР определяются из системы уравнений, следующей из (5.6) при $q=0$

$$\dot{R}[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{R}[i-k], \quad i > 0, \quad (5.8, a)$$

$$D_x = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{R}[-k] + D_a, \quad i = 0. \quad (5.8, б)$$

Систему уравнений (5.8) можно объединить в виде нормального уравнения в матричной форме. Такая форма полезна, например, при получении решетчатых структур.

Из (5.8) следует, что нормальные уравнения Юла–Уокера в матричной форме для модели АР имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{R}[0] & \dot{R}[-1] & \dots & \dot{R}[-p] \\ \dot{R}[1] & \dot{R}[0] & & \dot{R}[-p+1] \\ \dots & & & \\ \dot{R}[p] & \dot{R}[p-1] & & \dot{R}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{\Phi}[1] \\ \dots \\ \dot{\Phi}[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_a \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Корреляционная матрица в (5.9) является теплицевой. Поскольку $\dot{R}[-k] = \dot{R}^*[k]$, то она так же эрмитова. Поэтому для решения матричного уравнения можно применять рекурсивный алгоритм Левинсона–Дарбина.

Условие стационарности комплексной модели АР определяется решением характеристического уравнения

$$c^p - \dot{\Phi}[1]c^{p-1} - \dots - \dot{\Phi}[p] = 0. \quad (5.10)$$

Если корни характеристического уравнения (5.10) $c[i]$ лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости, то процесс АР стационарный. Для комплексной модели АР корни характеристического уравнения комплексные

$$\dot{c}[i] = e^{-\pi \Delta f_{hi} T + j 2 \pi f_{hi} T} = e^{-\Delta \omega_{hi} T / 2 + j \omega_{hi} T}. \quad (5.11)$$

Параметры комплексной модели АР можно вычислять, используя выражения, аналогичные (1.19). Для их получения представим характеристическое уравнение (5.10) в виде

$$c^p - \dot{\Phi}[1]c^{p-1} - \dots - \dot{\Phi}[p] = \prod_{i=1}^p (c - \dot{c}[i]) = 0 \quad (5.12)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c в (5.12), получим выражения, связывающие комплексные коэффициенты АР и корни характеристического уравнения. Приведем соответствующие формулы для $p = 1 \div 4$:

$$\dot{\Phi}[1,1] = \dot{c}[1,1];$$

$$\dot{\Phi}[2,1] = \dot{c}[2,1] + \dot{c}[2,2];$$

$$\dot{\Phi}[2,2] = -\dot{c}[2,1]\dot{c}[2,2];$$

$$\dot{\Phi}[3,1] = \dot{c}[3,1] + \dot{c}[3,2] + \dot{c}[3,3];$$

$$\dot{\Phi}[3,2] = -(\dot{c}[3,1]\dot{c}[3,2] + \dot{c}[3,1]\dot{c}[3,3] + \dot{c}[3,2]\dot{c}[3,3]);$$

$$\dot{\Phi}[3,3] = \dot{c}[3,1]\dot{c}[3,2]\dot{c}[3,3];$$

$$\dot{\Phi}[4,1] = \dot{c}[4,1] + \dot{c}[4,2] + \dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,4];$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}[4,2] = & -(\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,3] + \\ & + \dot{c}[4,4]\dot{c}[4,1] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,4]); \end{aligned}$$

(5.13)

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}[4,3] = & \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4] + \dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4] + \\ & + \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3] + \dot{c}[4,1]\dot{c}[4,2]\dot{c}[4,4]; \end{aligned}$$

$$\dot{\Phi}[4,4] = -\dot{c}[4,1]\dot{c}[4,2]\dot{c}[4,3]\dot{c}[4,4].$$

СПМ комплексной модели АР определяется выражением

$$P(f) = \frac{D_a}{|\dot{\Phi}(f)|^2} = \frac{D_a}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}[i] e^{-j2\pi f iT} \right|^2}. \quad (5.14)$$

Заметим, что уже при $p=1$, спектр сгенерированного комплексного процесса может иметь пик на ненулевой и не на максимальных частотах.

Ниже приведены результаты имитационного моделирования комплексных процессов АР первого и второго порядков. Для модели АР (1) задавались характеристики СПМ, равные $f_h = 500$, $\Delta f_h = 100$ отсчетов частоты, при $T = 8 \cdot 10^{-3}$. Корни характеристического уравнения, вычисленные согласно (5.11), использовались для расчета коэффициента АР (1)

по формулам (5.13). Комплексный коэффициент $AP(1)$ был равен $\Phi[1] = 0.888 + j0.368$. С помощью разностного уравнения (5.7) генерировался комплексный процесс $AP(1)$ длиной 500 отсчетов. Выборочные оценки коэффициентов $AP(1)$ рассчитывались по (5.8, а). Теоретические и выборочные СПМ на основе комплексной модели $AP(1)$, рассчитанные по формуле (5.14), представлены на рис. 5.1. Сравнение графиков спектров показывает их хорошее совпадение.

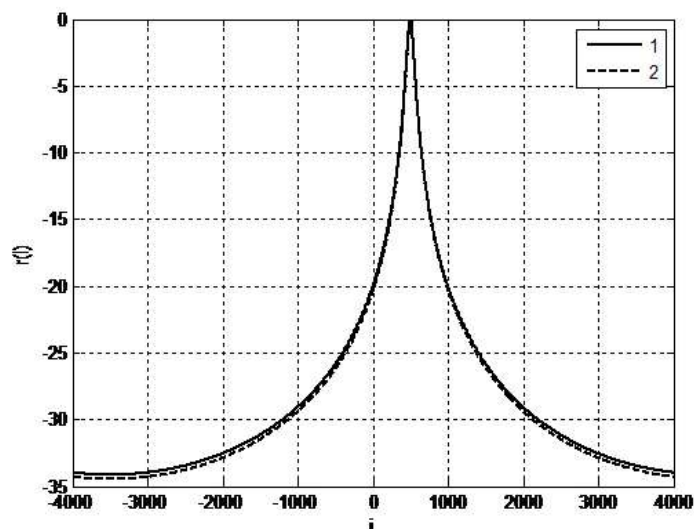


Рисунок 5.1 – Теоретические и выборочные СПМ на основе комплексной модели $AP(1)$

Описанный алгоритм использовался для моделирования комплексного процесса $AP(2)$ с характеристиками СПМ $f_{h1} = 400$, $\Delta f_{h1} = 50$, $f_{h2} = -700$, $\Delta f_{h2} = 70$. На рис. 5.2. показано хорошее совпадение теоретической и выборочной СПМ на основе комплексной модели $AP(2)$.

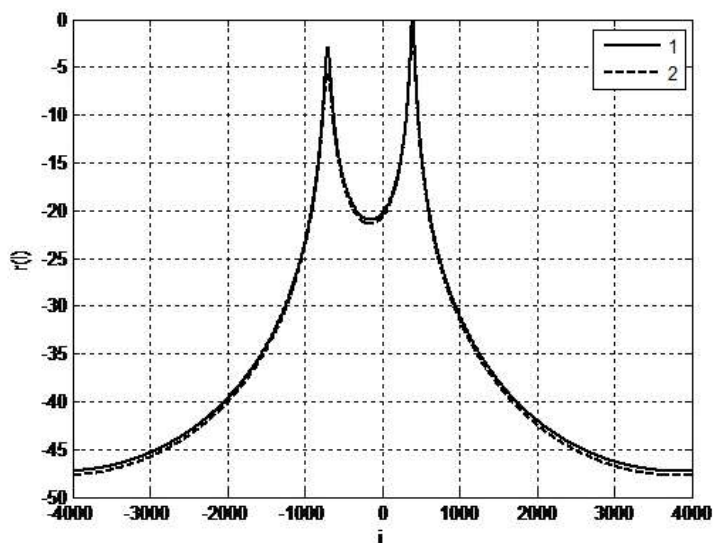


Рисунок 5.2 – Теоретические и выборочные СПМ на основе комплексной модели $AP(2)$.

Частным случаем модели АРСС (5.1) является разностное уравнение комплексной модели СС

$$\dot{x}[t] = -\sum_{k=1}^q \dot{Q}[k] \dot{a}[t-k] + \dot{a}[t].$$

Параметры комплексной модели СС определяются решением уравнения, которое можно получить из общего уравнения (5.6а) при $p=0$

$$\dot{R}[i] = D_a \sum_{k=0}^q \dot{Q}[k] \dot{Q}^*[k-i], \quad 0 \leq i \leq q, \quad \dot{R}[i] = 0, \quad i > q. \quad (5.15)$$

Из (5.15) при $i=0$ имеем

$$D_x = D_a \sum_{k=0}^q \dot{Q}[k] \dot{Q}^*[k]. \quad (5.16)$$

Используя выражения (5.15) и (5.16.), рассчитываются комплексные коэффициенты СС и дисперсия ошибки предсказания.

Обратимость комплексного процесса СС проверяется по корням характеристического уравнения

$$c^p - \dot{Q}[1]c^{p-1} - \dots - \dot{Q}[p] = 0.$$

Для обратимости процесса СС необходимо, чтобы корни характеристического уравнения лежали внутри единичного круга на комплексной плоскости. СПМ комплексной модели СС вычисляется по формуле

$$P(f) = |\dot{Q}(f)|^2 D_a = \left| 1 - \sum_{n=1}^q \dot{Q}[n] e^{-j2\pi fnT} \right|^2 D_a.$$

5.3 Комплексные модели АР узкополосных сигналов

5.3.1 Квадратурная обработка узкополосных сигналов

К узкополосным сигналам относят сложномодулированные колебания с одновременным изменением, в общем случае по случайному закону, амплитуды и фазы. В случае высокочастотных узкополосных сигналов применяется гибридная аналоговая и цифровая обработка, при которой осуществляются смещение спектра и низкочастотная фильтрация сигнала на аналоговом уровне. Затем производится двухканальное аналогово-цифровое

преобразование обеих составляющих с низкочастотной дискретизацией и их цифровая обработка. При этом после аналогово–цифрового преобразователя (АЦП) могут включаться также цифровые фильтры низких частот (ФНЧ), улучшающие фильтрацию сигнала, в том числе согласованные с его комплексной огибающей.

Аналоговые узкополосные сигналы представляют собой квазигармоническое колебание

$$\hat{x}(t) = X(t) \sin[\omega_0 t + \phi(t)] \quad (5.17)$$

с медленно меняющимися амплитудой $X(t)$ и фазой $\phi(t)$. Для дискретных сигналов необходимо в (5.17) сделать замену t на tT , где T – интервал дискретизации, который является масштабирующим дискретное время множителем.

Узкополосными называют радиосигналы с полосой, намного меньшей их центральной частоты ω_0 . Узкополосные сигналы представляются в комплексной форме. Двухканальную обработку комплексных сигналов называют квадратурной. Их вещественную составляющую часто называют синфазной, мнимую – квадратурной. Системы квадратурной обработки узкополосного сигнала включают квадратурный амплитудный и фазовый демодулятор, а часть ее, включающую гетеродин, умножители и ФНЧ, составляет фазовый детектор. Квадратурная обработка применяется также в задачах обнаружения сигнала. При квадратурной обработке исключается влияние неизвестной начальной фазы, несущей входного сигнала.

Структурно методы квадратурной обработки представляются схемой, предполагающей вычисления с комплексными числами или схемой, в которой все операции выполняются с вещественными числами. Модели линейного предсказания комплексных сигналов также можно строить на основе вычислений с комплексными числами, либо на основе операций отдельно с вещественной и мнимой частями. Ниже модель АР комплексного сигнала будет построена на основе второго способа. Хотя при выводе некоторых выражений этот подход более громоздкий, чем первый способ, он все же дает возможность наглядно понять принципы использования комплексных статистических характеристик для построения комплексной модели линейного предсказания.

Для описания узкополосных дискретных сигналов используется модель аналитического сигнала в виде

$$\dot{x}[t] = x[t] + j\tilde{x}[t],$$

где $\tilde{x}[t]$ преобразование Гильберта от $x[t]$. Для аналогового сигнала преобразование имеет вид

$$\tilde{x}(t) = (1/\pi) \int_{-\omega}^{\omega} x(\tau) / x(t - \tau) d\tau.$$

В случае дискретного сигнала используется дискретное преобразование Гильберта [2].

Аналитический сигнал можно представить в показательной форме

$$\dot{x}[t] = \dot{X}[t]e^{j\omega_0 tT}, \quad (5.18)$$

где $\dot{X}[t]$ – комплексная амплитуда, представимая в виде

$$\dot{X}[t] = X[t]e^{j\phi[t]}, \quad X[t] = \sqrt{x^2[t] + \tilde{x}^2[t]}. \quad (5.19)$$

$\phi(t)$ – фаза комплексной амплитуды. Из (5.18) следует, что вся информация об узкополосном сигнале содержится в флуктуирующих модуле и аргументе комплексной огибающей.

Произвольное узкополосное колебание вида

$$\hat{x}[t] = X[t]\sin[\omega_0 tT + \phi[t]] \quad (5.20)$$

с медленно меняющимися $X[t]$ и $\phi[t]$, имеет преобразование Гильберта [3, 4]

$$\tilde{\hat{x}}[t] = X[t]\cos[\omega_0 tT + \phi[t]]. \quad (5.21)$$

Из выражений (5.20) и (5.21) видно, что квадратурная обработка сигналов может использовать модель аналитического сигнала.

Комплексная амплитуда (5.19) (комплексная огибающая) сигнала $\dot{x}[t]$ может быть представлена через действительную и мнимую части

$$\dot{X}[t] = X_c[t] + jX_s[t],$$

где $X_c[t]$ и $X_s[t]$ – косинусная и синусная квадратурные компоненты $\dot{X}[t]$, которые удовлетворяют соотношениям, следующим из (5.19)

$$X_c[t] = X[t]\cos\phi[t], \quad X_s[t] = X[t]\sin\phi[t].$$

Корреляционная функция комплексных амплитуд стационарного случайного сигнала определяется выражением

$$\dot{R}[i] = 0.5E\{\dot{X}^*[t]\dot{X}[t+i]\} = R_c[i] + jR_s[i], \quad (5.22)$$

где косинусная и синусная составляющие корреляционной функции комплексных амплитуд вычисляются по формулам

$$R_c[i] = E\{X_c[t]X_c[t+i]\} = E\{X_s[t]X_s[t+i]\},$$

$$R_s[i] = E\{X_c[t]X_s[t+i]\} = -E\{X_s[t]X_c[t+i]\}.$$

Легко показать справедливость выражений

$$R_c[-i] = R_c[i], \quad R_s[-i] = -R_s[i].$$

Следовательно, действительная часть корреляционной функции четная, а мнимая часть нечетная функция.

5.3.2 Модель авторегрессии комплексной огибающей аналитического сигнала

Спектр комплексной огибающей может занимать значительную часть полосы передачи, либо только часть ее. Поэтому в качестве статистической модели можно использовать комплексные модели АР, СС или АРСС. Ниже, на примере наиболее часто используемой модели АР, рассмотрены принципы построения комплексной модели АР аналитического узкополосного сигнала. Подобным образом можно получить также модели СС или АРСС комплексной огибающей. Так как вся информация о случайном сигнале заключена в комплексной амплитуде $\dot{X}[t]$, целесообразно строить модель АР комплексной амплитуды сигнала. Комплексная модель АР дискретных мгновенных отсчетов амплитуды сигнала описывается разностным уравнением

$$\dot{X}[t] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k]\dot{X}[t-k] + \dot{a}[t]. \quad (5.23)$$

Комплексные коэффициенты АР представляются в виде

$$\dot{\Phi}[k] = \Phi_c[k] + j\Phi_s[k], \quad (5.24)$$

где $\Phi_c[i]$ и $\Phi_s[i]$ – действительная и мнимая части комплексного коэффициента АР. Комплексная ошибка предсказания

$$\dot{a}[t] = a_c[t] + ja_s[t]$$

также состоит из действительной и мнимой частей. Из условия оптимальности модели АР следует утверждение о некоррелированности комплексных ошибок предсказания

$$E\{\dot{a}[t]\dot{a}^*[t-i]\} = 0, \quad i > 0.$$

Тогда действительная и мнимая части некоррелированного процесса $\dot{a}[t]$ должны удовлетворять соотношениям

$$E\{a_c[t]a_c[t-i]\} = E\{a_s[t]a_s[t-i]\} = E\{a_c[t]a_s[t-i]\} = 0, \quad i > 0. \quad (5.25)$$

Умножая правую и левую части выражения (5.23) на $\dot{X}^*[t-i]$ и произведя усреднение, получаем уравнение Юла–Уокера в комплексном виде

$$\dot{R}[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k][\dot{R}[i-k]], \quad (5.26)$$

где $\dot{R}[i]$ – комплексная корреляционная функция огибающей узкополосного сигнала. Учитывая (5.22) и (5.24), уравнение (5.26) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} R_c[i] + jR_s[i] &= \sum_{k=1}^p (\Phi_c[k] + j\Phi_s[k])(R_c[i-k] + jR_s[i-k]) = \\ &= \sum_{k=1}^p (\Phi_c[k]R_c[i-k] - \Phi_s[k]R_s[i-k] + j[\Phi_c[k]R_s[i-k] + \Phi_s[k]R_c[i-k]]). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Учитывая (5.27), уравнение Юла–Уокера можно представить системой двух уравнений, отдельно для действительной и мнимой частей

$$R_c[i] = \sum_{k=1}^p (\Phi_c[k]R_c[i-k] - \Phi_s[k]R_s[i-k]), \quad (5.28, \text{ а})$$

$$R_s[i] = \sum_{k=1}^p (\Phi_c[k]R_s[i-k] + \Phi_s[k]R_c[i-k]). \quad (5.28, \text{ б})$$

Из уравнений (5.28) следует, что для нахождения $2p$ неизвестных коэффициентов $\Phi_c[k]$ и $\Phi_s[k]$ необходимо решить систему из $2p$ уравнений, т.е. решив p уравнений (5.28, а) и p уравнений (5.28, б).

Соотношения между дисперсиями комплексной огибающей и ошибки предсказания легко получить, умножив левую и правую части (5.23) на $\dot{X}^*[t]$ и взяв математическое ожидание

$$D_X = \sum_{k=1}^p (\Phi_c[k]R_c[k] + \Phi_s[k]R_s[k]) + D_a.$$

Используя соотношения $r[i] = R[i]/D_X$, можно записать уравнения (5.28, а) и (5.28, б) через коэффициенты корреляции.

В матричном виде уравнение Юла–Уокера можно представить в виде

$$\vec{R} = R\vec{\Phi}, \quad (5.29)$$

где

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_c[1] \\ R_c[2] \\ \dots \\ R_c[p] \\ R_s[1] \\ R_s[2] \\ \dots \\ R_s[p] \end{bmatrix}, \quad \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_c[1] \\ \Phi_c[2] \\ \dots \\ \Phi_c[p] \\ \Phi_s[1] \\ \Phi_s[2] \\ \dots \\ \Phi_s[p] \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} R_c[0] & R_c[1] & \dots & R_c[p-1] & R_s[0] & \dots & R_s[p-1] \\ R_c[1] & R_c[0] & \dots & R_c[p-2] & -R_s[1] & \dots & R_s[p-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_c[p-1] & R_c[p-2] & \dots & R_c[0] & -R_s[p-1] & \dots & R_s[0] \\ R_s[0] & -R_s[1] & \dots & -R_s[p-1] & R_c[0] & \dots & R_c[p-1] \\ R_s[1] & R_s[0] & \dots & -R_s[p-2] & R_c[1] & \dots & R_c[p-2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_s[p-1] & R_s[p-2] & \dots & R_s[0] & R_c[p-1] & \dots & R_c[0] \end{bmatrix}$$

Решение уравнения (5.29) в матричном виде можно представить следующим образом:

$$\vec{\Phi} = R^{-1}\vec{R}.$$

Легко показать, что СПМ модели АР комплексной огибающей аналитического сигнала описывается выражением

$$P(f) = D_a / \left| 1 - \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2. \quad (5.30)$$

Используя уравнение (5.23) можно синтезировать формирующий и обеляющий фильтр для квадратурных сигналов. Его структурная схема состоит из $2p$ звеньев и содержит $4p$ усилителей с коэффициентами усиления равными коэффициентам АР. В качестве порождающего процесса используются отсчеты некоррелированного комплексного процесса типа белого шума, удовлетворяющего соотношениям (5.25).

Рассмотрим в качестве примера модель АР аналитического сигнала, представляющего собой квадратурные составляющие отражений радиолокационного зондирующего сигнала от неоднородностей атмосферы. Косинусные и синусные составляющие такого сигнала показаны на рис. 5.3.

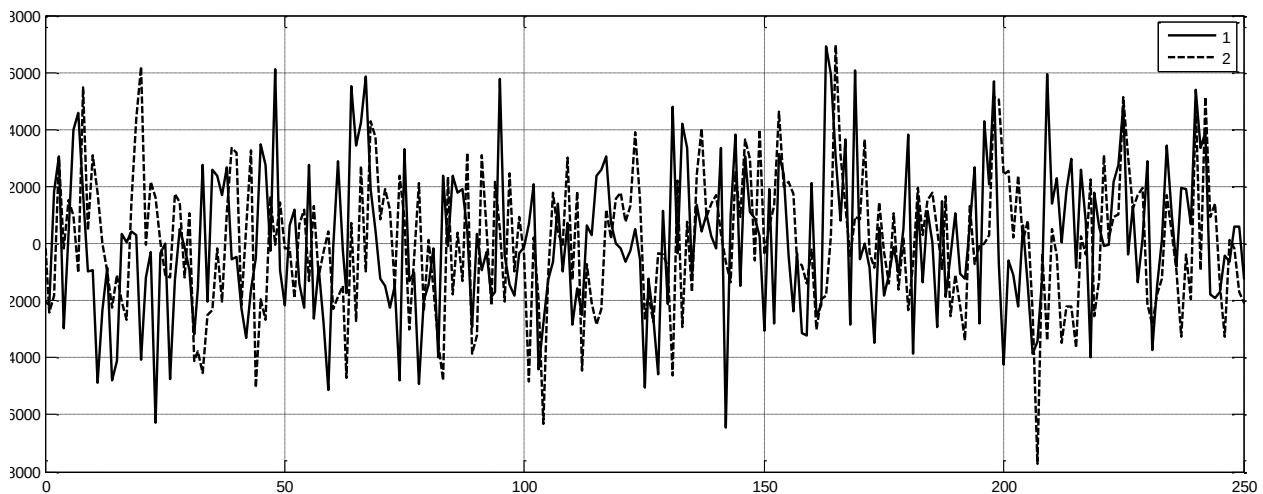


Рисунок 5.3 – Выборки квадратурных составляющих отраженного от неоднородностей атмосферы радиолокационного зондирующего сигнала:
1 – косинусная составляющая; 2 – синусная составляющая

Действительная и мнимая составляющие нормированной корреляционной функции представлены на рис. 5.4. Быстрое затухание корреляционной функции и наличие слабо выраженной периодичности свидетельствует о значительной ширине полосы СПМ процесса и существовании моды СПМ не на нулевой частоте. Смещение СПМ относительно нулевой частоты связано со скоростью движения отражающих зондирующий сигнал турбулентностей атмосферы и равно доплеровской частоте.

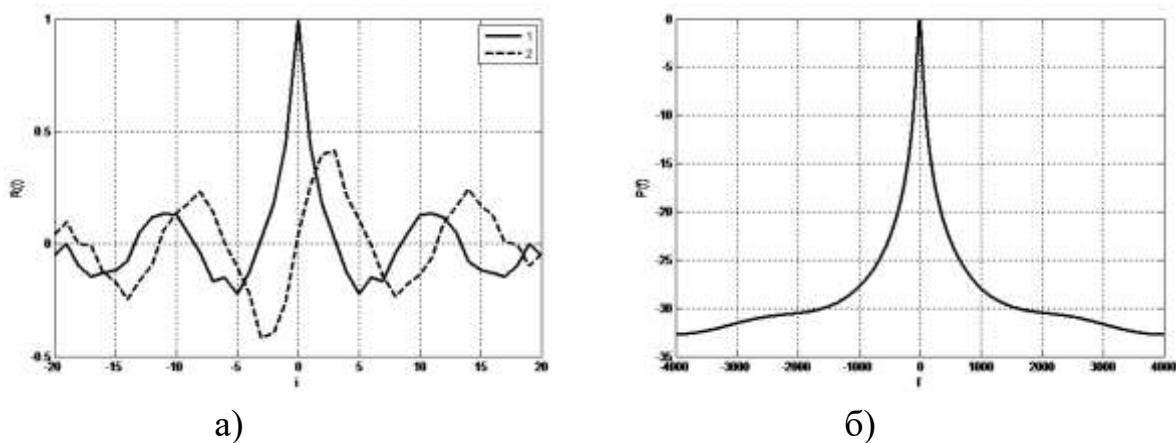


Рисунок 5.4 – Выборочные характеристики отраженного сигнала в системе акустического зондирования атмосферы:
а – нормированная комплексная корреляционная функция, где
1 – действительная составляющая, 2 – мнимая составляющая;
б – оценка СПМ модели АР аналитического сигнала.

Комплексные коэффициенты модели АР третьего порядка отраженного акустического сигнала составили

$$\Phi_c[1] = 0.81, \Phi_c[2] = -0.11, \Phi_c[3] = -0.17;$$

$$\Phi_s[1] = 0.03, \Phi_s[2] = -0.03, \Phi_s[3] = 0.2.$$

5.3.3 Модель авторегрессии первого порядка комплексной огибающей узкополосного сигнала

Рассмотрим примеры построения модели АР комплексной огибающей аналитического сигнала. Начнем с модели АР первого порядка случайного процесса комплексной огибающей аналитического сигнала. Комплексная модель АР первого порядка огибающей амплитуды сигнала описывается разностным уравнением

$$\dot{X}[t] = \dot{\Phi}[1]\dot{X}[t-1] + \dot{a}[t]. \quad (5.31)$$

Уравнения Юла–Уокера для этой модели могут быть получены, если левую и правые части (5.31) умножить на $\dot{X}^*[t-i]$ и усреднить. После простых преобразований получим уравнение Юла–Уокера в квадратурах

$$R_c[i] = \Phi_c[1]R_c[i-1] - \Phi_s[1]R_s[i-1], \quad (5.32, а)$$

$$R_s[i] = \Phi_c[1]R_s[i-1] - \Phi_s[1]R_c[i-1]. \quad (5.32, б)$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных $\Phi_c[1]$ и $\Phi_s[1]$, определяют параметры модели. Подставив параметры модели в выражение (5.14), можно рассчитать СПМ комплексной огибающей.

Параметры комплексной модели АР первого порядка можно вычислить аналитически по заданным характеристикам спектра. Чтобы найти соответствующие выражения, будем рассматривать (5.32) как систему разностных уравнений. Эта система разностных уравнений имеет характеристическое уравнение

$$\begin{bmatrix} -c + \Phi_c[1] & -\Phi_s[1] \\ \Phi_s[1] & -c + \Phi_c[1] \end{bmatrix} = 0,$$

которое приводится к квадратному уравнению

$$c^2 - 2c\Phi_c[1] + (\Phi_c[1])^2 + (\Phi_s[1])^2 = 0. \quad (5.33)$$

Его можно представить в виде

$$\prod_{k=1}^2 (c - c[k]) = 0, \quad (5.34)$$

где $c[k]$ – корни уравнения (5.33). Из уравнений (5.33) и (5.34) можно получить связь корней характеристического уравнения с коэффициентами АР

$$2\Phi_c[1] = c[1] + c[2], \quad (5.35, a)$$

$$(\Phi_c[1])^2 + (\Phi_s[1])^2 = -c[1]c[2]. \quad (5.35, б)$$

В общем случае корни характеристического уравнения (5.33) комплексные

$$c[1] = e^{-\Delta\omega T/2} e^{j\omega_h T}, \quad c[2] = e^{-\Delta\omega T/2} e^{-j\omega_h T}. \quad (5.36, a)$$

Таким образом, в отличие от действительной модели, комплексная модель АР первого порядка может иметь спектральный пик на частотах отличных от нулевой и максимальной частот. При $\omega_h = 0$ имеем

$$c[1] = c[2] = e^{-\Delta\omega T/2}. \quad (5.36, б)$$

В этом случае имеем низкочастотную огибающую со спектральным пиком на нулевой частоте. При максимальной частоте $\omega_h = \pi / T$, получаем корни

$$c[1] = c[2] = -e^{-\Delta\omega T/2}. \quad (5.36, в)$$

Спектральный пик при таких значениях корней сосредоточен на максимальной частоте.

Найдем вид корреляционной функции модели АР первого порядка. Для этого необходимо решить систему разностных уравнений (5.32, а, б). Решение системы уравнений (5.32, а, б) может быть представлено в виде

$$R_c[i] = A[1]\alpha[1]e^{(-\Delta\omega/2 + j\omega_h)iT} + A[2]\alpha[2]e^{(-\Delta\omega/2 - j\omega_h)iT}, \quad (5.37, а)$$

$$R_s[i] = A[1]\beta[1]e^{(-\Delta\omega/2 + j\omega_h)iT} + A[2]\beta[2]e^{(-\Delta\omega/2 - j\omega_h)iT}. \quad (5.37, б)$$

Постоянные $A[1]$ и $A[2]$ находятся из начальных условий, а величины $\alpha[k]$ и $\beta[k]$ являются собственными векторами при собственных значениях $c[1]$ и $c[2]$. Выражения для расчета собственных векторов получаем из (5.32, а, б)

$$(-c[1] + \Phi_c[1])\alpha[1] - \Phi_s[1]\beta[1] = 0, \quad (5.38, а)$$

$$\Phi_s[1]\alpha[1] + (-c[1] + \Phi_c[1])\beta[1] = 0, \quad (5.38, б)$$

и

$$(-c[2] + \Phi_c[1])\alpha[2] - \Phi_s[1]\beta[2] = 0, \quad (5.39, а)$$

$$\Phi_s[1]\alpha[2] + (-c[2] + \Phi_c[1])\beta[2] = 0. \quad (5.39, б)$$

Решением (5.38) и (5.39) будут векторы собственных значений $(\alpha[1], \beta[1])^T$ и $(\alpha[2], \beta[2])^T$. Из (5.37, а), (5.38) и (5.39) следует, что спектральные параметры полностью определяют все значения корреляционной функции комплексного сигнала. Параметры ω_h и $\Delta\omega$ характеризуют частоту колебаний и затухание корреляционной функции. Учитывая (5.37), можно утверждать, что два коэффициента АР $\Phi_c[1]$ и $\Phi_s[1]$, полностью описывают корреляционную функцию (5.32).

Комплексные корни характеристического уравнения (5.33) соответствуют случайному процессу с одномодовым спектром.

Это просто показать, взяв производную от (5.30) при $p=1$ и приравняв ее к нулю. Тогда частота, на которой находится мода СПМ, определяется выражением

$$\operatorname{tg} \omega_m T = \Phi_s[1] / \Phi_c[1]. \quad (5.40)$$

С другой стороны, из (5.35, а) и (5.35, б), используя (5.36), получаем связь параметров СПМ и коэффициентов комплексной модели АР

$$\Phi_c[1] = e^{-\Delta \omega T / 2} \cos \omega_h T, \quad (5.41, \text{ а})$$

$$\Phi_s[1] = e^{-\Delta \omega T / 2} \sin \omega_h T. \quad (5.41, \text{ б})$$

Взяв отношение (5.41, б) к (5.41, а), приходим к выражению для ω_h

$$\operatorname{tg} \omega_h T = \Phi_s[1] / \Phi_c[1]. \quad (5.42)$$

Сравнивая (5.40) с (5.42), приходим к выводу что, $\omega_h = \omega_m$.

Примером комплексного процесса АР первого порядка с максимумом на частоте $f=1000$ и шириной полосы Δf служит имитационный процесс, полученный с помощью генератора АР с коэффициентами АР $\Phi_c[1] = 0.71$, $\Phi_s[1] = 0.52$ и показанного на рис. 5.2.

Квадратурные составляющие процесса АР представлены на рис. 5.5.

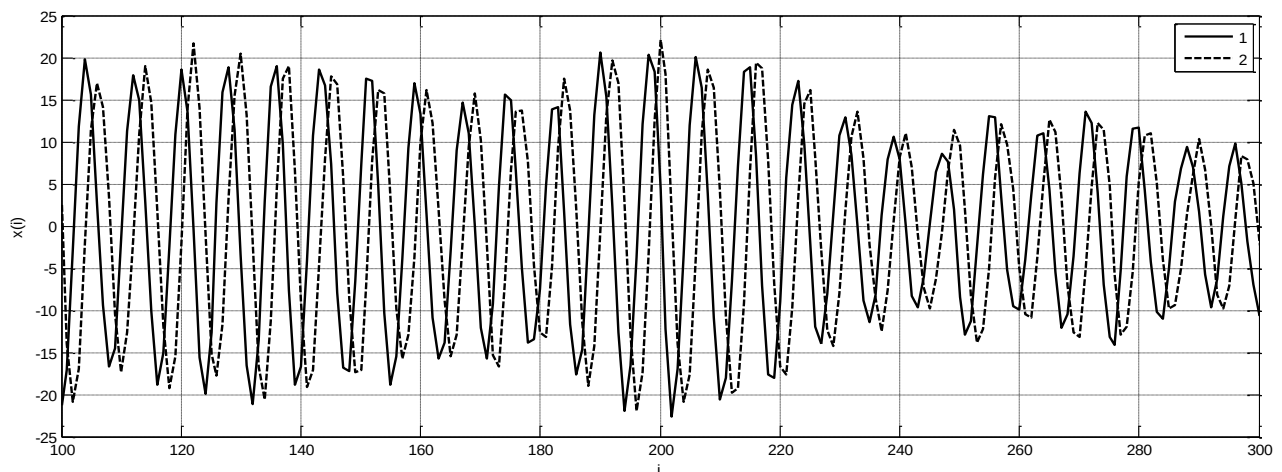
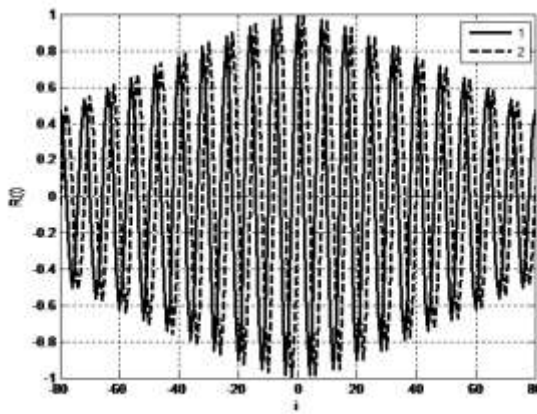
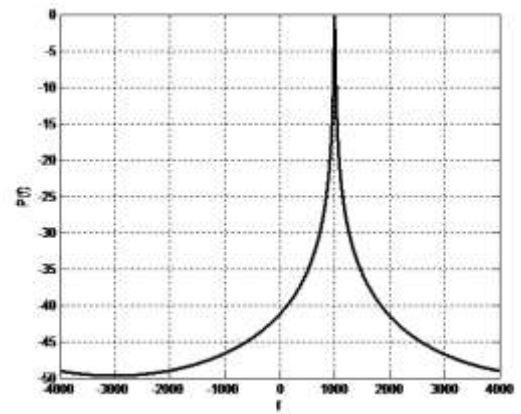


Рисунок 5.5 – Выборки квадратурных составляющих имитационного случайного процесса АР первого порядка:
1–косинусная составляющая; 2–синусная составляющая



а)



б)

Рисунок 5.6 – Выборочные характеристики имитационного случайного процесса АР первого порядка: а – нормированные корреляционные функции: 1 – косинусная составляющая, 2 – синусная составляющая; б – СПМ модели АР первого порядка комплексного сигнала

Действительная и мнимая составляющие корреляционной функции процесса показаны на рис. 5.6, а. По выборочным оценкам коэффициентов АР $\Phi_c[1] = 0.73$, $\Phi_s[1] = 0.53$ была получена оценка СПМ. Как видно из графика на рис. 5.6, б параметры оценки СПМ совпадают с задаваемыми параметрами спектра.

5.3.4 Модель авторегрессии второго порядка комплексной огибающей узкополосного сигнала

Остановимся кратко на вопросе построения модели АР второго порядка комплексной огибающей узкополосного сигнала. Комплексная модель АР второго порядка амплитуды сигнала описывается разностным уравнением

$$\dot{X}[t] = \dot{\Phi}[1]\dot{X}[t-1] + \dot{\Phi}[2]\dot{X}[t-2] + \dot{a}[t].$$

Уравнения Юла–Уокера такой модели АР, как следует из (5.28), имеют вид

$$R_c[i] = \Phi_c[1]R_c[i-1] + \Phi_c[2]R_c[i-2] - \Phi_s[1]R_s[i-1] - \Phi_s[2]R_s[i-2], \quad (5.43, \text{ а})$$

$$R_s[i] = \Phi_c[1]R_s[i-1] + \Phi_c[2]R_s[i-2] + \Phi_s[1]R_c[i-1] + \Phi_s[2]R_c[i-2]. \quad (5.43, \text{ б})$$

Для определения коэффициентов АР необходимо решить систему четырех уравнений, полученных из (5.43а,б) для $i = 1, 2$.

Характеристическое уравнение системы разностных уравнений (5.43, а, б) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -c^2 + \Phi_c[1]c + \Phi_c[2] & -\Phi_s[1]c - \Phi_s[2] \\ \Phi_s[1]c + \Phi_s[2] & -c^2 + \Phi_c[1]c + \Phi_c[2] \end{vmatrix} = 0. \quad (5.44)$$

Из (5.44) получаем алгебраическое уравнение четвертой степени

$$\begin{aligned} c^4 + 2\Phi_c[1]c^3 + (\Phi_s[1] - 2\Phi_c[2] + \Phi_c^2[1])c^2 + \\ + (2\Phi_c[1]\Phi_c[2] + 2\Phi_s[1]\Phi_s[2])c + \Phi_c^2[2] + \Phi_s^2[2] = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Полученное таким образом характеристическое уравнение (5.45) можно представить в виде

$$\prod_{k=1}^4 (c - c[k]) = 0, \quad (5.46)$$

где $c[i]$ – корни характеристического уравнения (5.45). Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях c в уравнениях (5.45) и (5.46), можно получить формулы

$$\begin{aligned} -2\Phi_c[1] &= c[1] + c[2] + c[3] + c[4], \\ \Phi_s[1] - 2\Phi_c[2] + \Phi_c^2[1] &= c[1]c[2] + c[1]c[3] + \\ &+ c[1]c[4] + c[3]c[4] + c[2]c[3] + c[2]c[4], \\ -2\Phi_c[1]\Phi_c[2] - 2\Phi_s[1]\Phi_s[2] &= c[1]c[2]c[3] + c[1]c[2]c[4] + \\ &+ c[1]c[3]c[4] + c[2]c[3]c[4], \\ \Phi_c^2[2] + \Phi_s^2[2] &= c[1]c[2]c[3]c[4]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Характер изменения корреляционной функции, а, следовательно, и вид соответствующей СПМ определяется значениями соответствующих корней характеристического уравнения (5.45).

Рассмотрим случай комплексных корней характеристического уравнения

$$c[1, 2] = e^{-\Delta\omega_1 T / 2 \pm j\omega_{h1} T},$$

$$c[3, 4] = e^{-\Delta\omega_2 T / 2 \pm j\omega_{h2} T}.$$

Чтобы определить выражение для корреляционной функции необходимо найти общее решение системы разностных уравнений (5.43, а, б). Его можно записать в виде

$$R_c[i] = \sum_{k=1}^2 \left\{ A[k] \alpha[k] e^{(-\Delta\omega_k T / 2 \pm j\omega_{hk} T) i} + \right. \\ \left. + A[k+2] \beta[k+2] e^{(-\Delta\omega_k T / 2 \pm j\omega_{hk} T) i} \right\}, \quad (5.48, a)$$

$$R_s[i] = \sum_{i=1}^2 \left\{ A[k] \beta[k] e^{(-\Delta\omega_k T / 2 \pm j\omega_{hk} T) i} + \right. \\ \left. + A[k+2] \beta[k+2] e^{(-\Delta\omega_k T / 2 \pm j\omega_{hk} T) i} \right\}. \quad (5.48, б)$$

Постоянные коэффициенты $\alpha[k]$ и $\beta[k]$, входящие в общее решение (5.48, а, б), находятся последовательной подстановкой корней характеристического уравнения $c[k]$ в (5.43, а, б) и нахождением собственного вектора $(\alpha[k], \beta[k])^T$ собственных значений $c[k]$, $1 \leq k \leq 4$. Соответствующая система уравнений получается из (5.43, а, б) и имеет вид

$$(-c^2[k] + \Phi_c[1]c[k] + \Phi_c[2])\alpha[k] + (-\Phi_s[1]c[k] - \Phi_s[2])\beta[k] = 0,$$

$$(\Phi_s[1]c[k] + \Phi_s[2])\alpha[k] + (-c^2[k] + \Phi_c[1]c[k] + \Phi_c[2])\beta[k] = 0.$$

Таким образом, в случае комплексных корней характеристического уравнения, косинусная и синусная составляющие корреляционной функции представляют взвешенную функцию суммы затухающих синусоид с коэффициентами демпфирования $h_{1,2} = 2\Delta\omega_{1,2}$ и частотами $\omega_{h1,2}$. Для генерации квадратурного сигнала с двумодовой СПМ необходимо задать $\Delta\omega_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ и вычислить корни характеристического уравнения с $[1, 2, 3, 4]$. Решив систему уравнений (5.47), можно найти соответствующие значения коэффициентов АР.

В случае, когда корни характеристического уравнения принимают действительное значение $c[1, 2] = e^{-\Delta\omega_{1,2} T / 2}$ или комплексные значения $c[1, 2] = e^{-\Delta\omega_{3,4} T / 2 \pm j\omega_{h1,2} T}$, общее решение уравнения (5.43, а, б) описывается выражениями

$$R_c[i] = \sum_{k=1}^2 \left\{ A[k] \alpha[k] e^{(-\Delta\omega_k T / 2 \pm j\omega_{hk} T) i} + \right. \\ \left. + A[k+2] \alpha[k+2] e^{-\Delta\omega_{k+2} T i / 2} \right\}, \quad (5.49, a)$$

$$R_s[i] = \sum_{k=1}^2 \left\{ A[k] \beta[k] e^{(-\Delta\omega_k T / 2 \pm j\omega_{hk} T) i} + \right. \\ \left. + A[k+2] \beta[k+2] e^{-\Delta\omega_{k+2} T i / 2} \right\}. \quad (5.49, б)$$

Выражения (5.49, а, б) показывают, что корреляционные функции представляются взвешенной суммой двух затухающих синусоид и двух затухающих экспонент. Задавшись параметрами СПМ $\Delta\omega_k$, и ω_{hk} , $1 \leq k \leq 4$, можно из системы уравнений (5.47) определить коэффициенты АР и с помощью генератора процесса АР получить соответствующие имитационные квадратурные сигналы.

С ростом порядка комплексной модели, ее представление в виде действительной и мнимой частей приводит к сложным выражениям. Поэтому, в этом случае, применение комплексных разностных уравнений более предпочтительно (см. подраздел 5.2).

5.3.5 Модель авторегрессии аналитического сигнала с детерминированной частотой

В ряде случаев бывает полезной модель АР аналитического сигнала с детерминированной частотой ω_0 . Покажем, как строится модель АР такого процесса. Уравнение АР в этом случае можно представить в форме

$$\dot{x}[t] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{x}[t-k] + \dot{a}[t]. \quad (5.50)$$

Пусть $\dot{x}[t] = \dot{X}[t] e^{j\omega_0 t T}$ представляет узкополосное колебание. Умножим левую и правую части (5.50) на $\dot{x}^*[t-i]$ и возьмем математическое ожидание. Комплексное уравнение Юла–Уокера принимает вид

$$\dot{R}[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k] \dot{R}[i-k]. \quad (5.51)$$

где

$$\dot{R}[i] = (R_c[i] + jR_s[i])e^{-j\omega_0 iT}, \quad (5.52, a)$$

$$\dot{R}[i-k] = (R_c[i-k] + jR_s[i-k])e^{-j\omega_0(i-k)T}, \quad (5.52, б)$$

а $R_c[i]$ и $R_s[i]$ – косинусная и синусная составляющие корреляционной функции комплексной огибающей аналитического сигнала, определяемые по формулам (5.47, а) и (5.47, б). С учетом (5.52) уравнение (5.51) легко преобразовать следующим образом:

$$R_c[i] + jR_s[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k]e^{j\omega_0 kT} (R_c[i-k] + jR_s[i-k]). \quad (5.53)$$

Введем комплексный коэффициент АР равный

$$\dot{\Phi}_0[k] = \dot{\Phi}[k]e^{j\omega_0 kT}. \quad (5.54)$$

Тогда уравнение (5.53) можно записать в виде

$$R_c[i] + jR_s[i] = \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}_0[k](R_c[i-k] + jR_s[i-k]). \quad (5.55)$$

Сравнивая уравнения (5.45) и (5.55) можно сделать вывод, что $\dot{\Phi}_0[k]$ по существу является комплексным коэффициентом модели АР аналитического сигнала на несущей частоте. Коэффициенты АР аналитического сигнала на несущей частоте выражаются через коэффициенты комплексной огибающей

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0[k] = \dot{\Phi}[k]e^{j\omega_0 kT} &= \Phi_c[k]\cos \omega_0 T + \Phi_s[k]\sin \omega_0 T + \\ &+ j(\Phi_s[k]\cos \omega_0 T - \Phi_c[k]\sin \omega_0 T). \end{aligned}$$

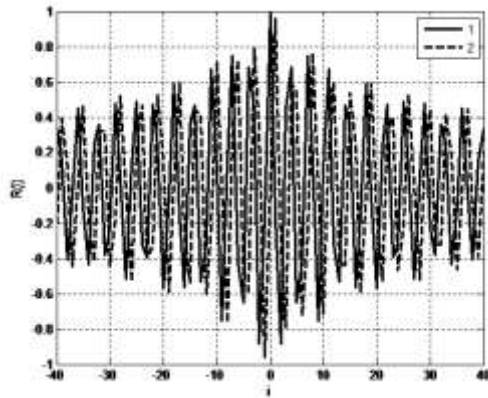
Как следует из (5.54) для нахождения $\dot{\Phi}_0[k]$ необходимо, используя (5.55) определить $\dot{\Phi}[k]$, а затем умножить его на $e^{j\omega_0 kT}$.

Спектр процесса АР комплексной огибающей аналитического сигнала с детерминированной фазой описывается выражением

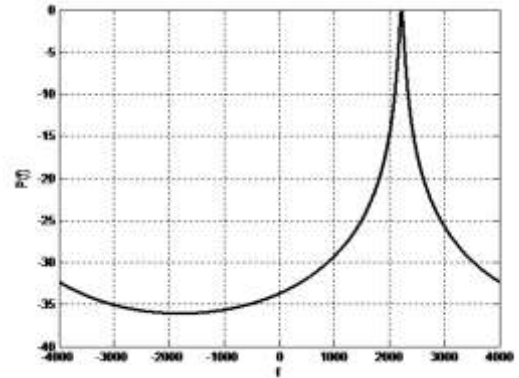
$$P(f) = D_a / \left| 1 - \sum_{k=1}^p \dot{\Phi}[k]e^{-j2\pi(f-f_0)kT} \right|^2. \quad (5.56)$$

Из выражения (5.56) видно, что пик СПМ смещается на частоту f_0 . Такой частотой может быть доплеровская частота отраженного сигнала.

Методом статистического моделирования были получены имитационные комплексные сигналы с одной и двумя модами с учетом детерминированной частоты ω_0 . На рис.5.7 представлены статистические характеристики одномодового сигнала с пиком на частоте $f_h = 2000$ и шириной полосы 70, при $f_0 = 200$



а)



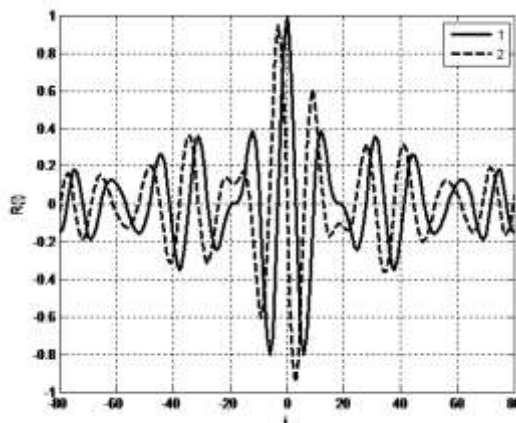
б)

Рисунок 5.7 – Выборочные характеристики имитационного случайного процесса АР первого порядка аналитического сигнала с детерминированной частотой несущей: а – нормированные корреляционные функции:

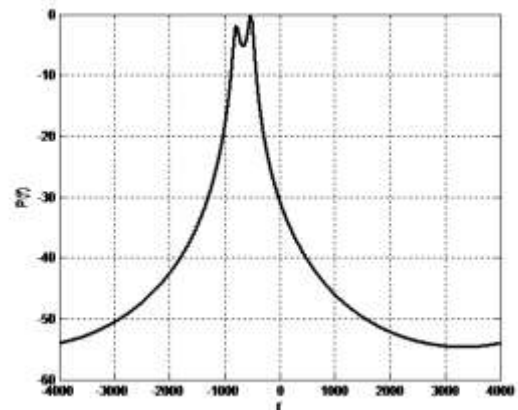
1 – косинусная составляющая, 2 – синусная составляющая;

б – СПМ модели АР первого порядка аналитического сигнала

На рис. 5.8 представлены статистические характеристики двухмодового сигнала с пиками на частотах $f_{h1} = -1000$ и $f_{h2} = -1300$, ширины полос пиков составляли 100, частота $f_0 = 500$



а)



б)

Рисунок 5.8 – Выборочные характеристики имитационного случайного процесса АР второго порядка аналитического сигнала с детерминированной фазой: а – нормированные корреляционные функции:
1 – косинусная составляющая, 2 – синусная составляющая;
б – СПМ модели АР второго порядка аналитического сигнала

Представленные выше примеры построения моделей АР комплексных радиотехнических сигналов при необходимости могут быть распространены и на некоторые другие виды стационарных цифровых сигналов. Хотя модель АР наиболее рационально использовать для узкополосных сигналов, ширина полосы спектра моделируемых сигналов может быть весьма значительной. Подобным способом строятся также модели СС и АРСС радиосигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марпл – мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: БХВ – Петербург, 2011. – 768 с.
3. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб. пособие для вузов/ Д.В. Васильев, М.Р. Витоль и др. – Радио и связь, 1982. – 528 с.
4. Волощук Ю. І. Сигнали та процеси у радіотехніці: Навч. посібник, частина 1. – Харків, ХТУРЕ, 2001. – 550 с.

6 РЕШЕТЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ

6.1 Введение

Построение АР модели или синтез АР фильтра требуют вычисления коэффициентов АР. Для этого необходимо обращаться корреляционную матрицу, а эта операция для больших порядков сопряжена с большим объемом вычислений. Кроме этого, для некоторых данных могут возникнуть проблемы с устойчивостью решений, недостаточной точностью полученных решений. Поиски эффективных алгоритмов вычисления коэффициентов АР привели к созданию алгоритма Левинсона –Дарбина и к синтезу решетчатых структур, которые могут быть реализованы в виде решетчатых фильтров (РФ) [1]. Алгоритм Левинсона–Дарбина позволяет вычислять на основе рекурсии коэффициенты АР и РФ, определить базовую структуру РФ, найти эффективные способы оценки коэффициентов РФ, разработать методы применения решетчатых структур при решении различных задач статистической радиотехники. Параметрами РФ являются коэффициенты отражения и число звеньев фильтра p . Коэффициенты отражения связаны нелинейными соотношениями с параметрами АР и определяются, в конечном счете, корреляционной функцией случайного сигнала. Число звеньев РФ равно порядку АР модели. РФ, так же, как и АР фильтры, являются фильтрами предсказания, минимизирующими дисперсию ошибки предсказания.

6.2 Алгоритм Левинсона–Дарбина

Остановимся на выводе рекуррентных соотношений, которые, носят название алгоритма Левинсона–Дарбина. Алгоритм позволяет вычислять для p -го порядка коэффициенты АР и коэффициенты отражения РФ по найденным на предшествующих шагах рекурсии коэффициентам АР моделей более низких порядков.

Обычно в теории РФ используют обратные знаки коэффициентов фильтров прямой реализации $\Phi[i] \rightarrow -\Phi[i]$; $D[i] \rightarrow -D[i]$. Будет рассматриваться комплексный РФ. Поэтому все величины, используемые ниже, комплексные, за исключением тех, которые выражаются через квадраты модулей.

Наряду с фильтром прямого предсказания вперед для сигнала, описываемого моделью АР p -го порядка, можно ввести фильтр обратного предсказания. Тогда модель АР описывается системой уравнений

$$x[t] = -\sum_{i=1}^p \Phi[i]x[t-i] + a(t), \quad (6.1, a)$$

$$x[t-p] = -\sum_{i=1}^p D[i]x[t-p+i] + d[t], \quad (6.1, б)$$

где $D[i]$ – коэффициенты модели АР обратного предсказания p -го порядка, $d[t]$ – ошибка обратного предсказания. Уравнение АР обратного предсказания описывает регрессию значения случайного процесса $x[t-p]$ на последующие $x[t-p+1]$, $x[t-p+2]$, ..., $x[t]$. Значения коэффициентов фильтра обратного предсказания находятся с помощью системы уравнений, аналогичной системе уравнений Юла–Уокера. Для получения уравнений умножим (6.1, а) на $x^*[t-j]$, а (6.1, б) на $x^*[t-j+1]$ и усредним

$$\begin{cases} R[j] = -\sum_{i=1}^p \Phi[i]R[j-i], \\ R[j-p-1] = -\sum_{i=1}^p D[i]R[j+i-p-1], \end{cases} \quad (6.2, а)$$

или

$$\begin{cases} R[j] = -\sum_{i=1}^p \Phi[i]R[j-i], \\ R[j] = -\sum_{i=1}^p D[i]R[j+i], \end{cases} \quad (6.2, б)$$

где в (6.2, б) сделана замена $(j-p-1) \rightarrow j$.

Чтобы получить выражения для дисперсий, умножим (6.1, а) на $x^*[t]$, а (6.1, б) на $x^*[t-p]$ и усредним

$$\begin{cases} R[0] = -\sum_{i=1}^p \Phi[i]R[-i] + \sigma_{a,p}^2, \\ R[0] = -\sum_{i=1}^p D[i]R[i] + \sigma_{d,p}^2, \end{cases} \quad (6.3)$$

где $\sigma_{a,p}^2$ и $\sigma_{d,p}^2$ – дисперсии ошибок прямого и обратного предсказания для моделей p -го порядка.

Объединяя (6.2) и (6.3), получим систему матричных уравнений

$$R_p \vec{\Phi} = \vec{\sigma}_{a,p}^2, \quad (6.4)$$

$$R_p \vec{D} = \vec{\sigma}_{d,p}^2, \quad (6.5)$$

где

$$R_p = \begin{bmatrix} R[0] & R^*[1] & \dots & R^*[p] \\ R[1] & R[0] & \dots & R^*[p-1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R[p] & R[p-1] & \dots & R[0] \end{bmatrix}, \quad \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Phi[1] \\ \dots \\ \Phi[p] \end{bmatrix}; \quad \vec{\sigma}_{a,p}^2 = \begin{bmatrix} \sigma_{a,p}^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (6.6)$$

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D[p] \\ \dots \\ D[1] \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{\sigma}_{d,p}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \sigma_{d,p}^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь учитывалось, что для стационарного процесса $R[-k] = R^*[k]$. По определению $\sigma_{a,p}^2 = E\{|a[t]|^2\} = E\{a[t]a^*[t]\}$. Из этого выражения, учитывая (6.1, а), получим

$$\sigma_{a,p}^2 = R[0] + \sum_{k=1}^p \Phi[k]R[-k] + \sum_{i=1}^p \Phi^*[i]R[i] + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^p \Phi[k]\Phi^*[i]R[i-k].$$

Это выражение удобно представить в виде

$$\sigma_{a,p}^2 = R[0] + \vec{R}_p^H \vec{\Phi}_p + \vec{\Phi}_p^H \vec{R}_p + \vec{\Phi}_p^H R_{p-1} \vec{\Phi}_p, \quad (6.7)$$

где

$$\vec{\Phi}_p = \begin{bmatrix} \Phi[1] \\ \dots \\ \Phi[p] \end{bmatrix}; \quad \vec{R}_p = \begin{bmatrix} R[1] \\ \dots \\ R[p] \end{bmatrix}.$$

Знак Н означает эрмитово сопряжение, сводящееся к транспонированию и комплексному сопряжению элементов вектора или матрицы.

Выражение для дисперсии ошибки обратного предсказания

$$\sigma_{d,p}^2 = E\{|d(t)|^2\} = E\{d[t]d^*[t]\},$$

с учетом (6.1, б), можно представить в виде

$$\sigma_{d,p}^2 = R[0] + \sum_{k=1}^p D[k]R[k] + \sum_{i=1}^p D^*[i]R[-i] + \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^p D[k]D^*[i]R[k-i].$$

Для дальнейших преобразований это выражение приведем к виду

$$\sigma_{d,p}^2 = R[0] + \vec{R}_p^T \vec{D}_p + \vec{D}_p^H \vec{R}_p^* + \vec{D}_p^H \vec{R}_{p-1}^* \vec{D}_p, \quad (6.8)$$

где

$$\vec{D}_p = \begin{bmatrix} D[1] \\ \vdots \\ D[p] \end{bmatrix}.$$

Из (6.4) и (6.5), с учетом (6.7) и (6.8), получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} R[0] & \vec{R}_p^H \\ \vec{R}_p & R_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{a,p}^2 \\ \vec{\theta}_p \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} R[0] & \vec{R}_p^T \\ \vec{R}_p^* & R_{p-1}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{d,p}^2 \\ \vec{\theta}_p \end{bmatrix}.$$

где

$$\vec{\theta}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем соотношения, связывающие коэффициенты АР p -го порядка, с коэффициентами АР $(p-1)$ -го порядка.

Предположим, что коэффициенты $\Phi_p[i]$ модели АР p -го порядка могут быть получены как линейная комбинация коэффициентов $\Phi_{p-1}[i]$ и $D_{p-1}[i]$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \Phi_p[1] \\ \dots \\ \Phi_p[p-1] \\ \Phi_p[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Phi_{p-1}[1] \\ \dots \\ \Phi_{p-1}[p-1] \\ 0 \end{bmatrix} + K^a[p] \begin{bmatrix} 0 \\ D_{p-1}[p-1] \\ \dots \\ D_{p-1}[1] \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $K^a[p]$ – скаляр, называемый коэффициентом отражения, подлежащий определению. Это уравнение можно представить в форме

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\Phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\Phi}_{p-1} \\ 0 \end{bmatrix} + K^a[p] \begin{bmatrix} 0 \\ J\vec{D}_{p-1} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

J – матрица отражения. Теплицева корреляционная матрица в блочном представлении имеет вид

$$R_p = \begin{bmatrix} R_{p-1} & J\vec{R}_p^* \\ \vec{R}_p^T J & R[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R[0] & \vec{R}_p^H \\ \vec{R}_p & R_{p-1} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Найдем выражение для определения $K^a[p]$. Для этого умножим (6.9) слева на матрицу R_p и, учитывая (6.10), получим

$$R_p \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\Phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{p-1} & J\vec{R}_p^* \\ \vec{R}_p^T J & R[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\Phi}_{p-1} \\ 0 \end{bmatrix} + K^a[p] \begin{bmatrix} R[0] & \vec{R}_p^H \\ \vec{R}_p & R_{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ J\vec{D}_{p-1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Преобразуем выражение (6.11), используя (6.4) и (6.5), к виду

$$\begin{bmatrix} \sigma_{a,p}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{a,p-1}^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_p^a \end{bmatrix} + K^a[p] \begin{bmatrix} \Delta_p^d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_{a,p-1}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

где

$$\Delta_p^a = \vec{R}_p^T J \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{\Phi}_{p-1} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p \Phi_{p-1}[p-i] R[i], \quad \Phi_{p-1}[0] = 1,$$

$$\Delta_p^d = R_p^H \begin{bmatrix} J \vec{D}_{p-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^p D_{p-1}[p-i] R^*[i], \quad D_{p-1}[0] = 1.$$

Из (6.12) следуют соотношения

$$\Delta_p^a + K^a[p] \sigma_{a,p-1}^2 = 0, \quad (6.13, \text{ а})$$

$$\sigma_{a,p}^2 = \sigma_{a,p-1}^2 + K^a[p] \Delta_p^d = \sigma_{a,p-1}^2 - \Delta_p^a \Delta_p^d / \sigma_{a,p-1}^2. \quad (6.13, \text{ б})$$

Наконец, из (6.13, а) получаем выражение для расчета коэффициента отражения

$$K^a[p] = -\Delta_p^a / \sigma_{a,p-1}^2. \quad (6.13, \text{ в})$$

Для обновления коэффициентов модели АР обратного предсказания также необходимо получить значение $K^d[p]$. По аналогии с (6.9) запишем

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vec{D}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vec{D}_{p-1} \\ 0 \end{bmatrix} + K^d[p] \begin{bmatrix} 0 \\ J \vec{\Phi}_{p-1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Умножив слева это выражение на R_p , и с учетом (6.4) и (6.5) после преобразований получим

$$\begin{bmatrix} \sigma_{d,p}^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{d,p-1}^2 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \Delta_p^d \end{bmatrix} + K^d[p] \begin{bmatrix} \Delta_p^a \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \sigma_{d,p-1}^2 \end{bmatrix}.$$

Из этого равенства следует выражение для расчета $K^d[p]$

$$K^d[p] = -\Delta_p^d / \sigma_{d,p-1}^2. \quad (6.15)$$

Учитывая (6.13, б), получаем соотношение

$$\sigma_{d,p}^2 = \sigma_{d,p-1}^2 + K^a[p](-\sigma_{d,p-1}^2 K^d[p]) = \sigma_{d,p-1}^2 (1 - K^a[p] K^d[p]).$$

Для инициации рекурсии необходимы соотношения, следующие из (6.13, б): $R[0] = \sigma_0^2$ при $p=0$. Из (6.9) и (6.14) получим соотношения, используемые для расчета коэффициентов АР прямого и обратного предсказания. Для этого приравниваются соответствующие элементы векторов в левой и правой частях этих соотношений. В результате получим важные соотношения, связывающие коэффициенты АР последовательных порядков модели

$$\Phi_p[i] = \Phi_{p-1}[i] + K^a[p] D_{p-1}[p-i],$$

$$D_p[i] = D_{p-1}[i] + K^d[p] \Phi_{p-1}[p-i].$$

Алгоритм Левинсона–Дарбина обладает рядом полезных свойств. Покажем, что $\sigma_{a,p}^2 = \sigma_{d,p}^2$. Из (6.4) и (6.5) следует, что

$$\vec{\Phi} = R^{-1} \vec{\sigma}_{a,p}^2, \quad (6.16)$$

$$\vec{D} = R^{-1} \vec{\sigma}_{d,p}^2. \quad (6.17)$$

Корреляционная матрица R теплицева. Тогда обратная матрица R^{-1} персимметричная, т.е. симметричная относительно побочной диагонали.

У такой обратной матрицы равны элементы [2]

$$R^{-1}[0,0] = R^{-1}[p,p]. \quad (6.18)$$

Из (6.16) и (6.17) видно, что $\sigma_{a,p}^2 = 1/R^{-1}[0,0]$ и $\sigma_{d,p}^2 = 1/R^{-1}[p,p]$.
Учитывая (6.18), можно утверждать, что

$$\sigma_{a,p}^2 = \sigma_{d,p}^2 = \sigma^2. \quad (6.19)$$

Так как корреляционная матрица эрмитова и теплицева, то коэффициенты отражения связаны соотношениями [2]

$$K^a[i] = (K^d[i])^*, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Приравнявая последние элементы векторов в (6.9) и (6.14) получаем выражения, связывающие коэффициенты частной автокорреляции и коэффициенты $K^{a,d}[i]$

$$\begin{aligned} K^a[i] &= \Phi_i[i], \\ K^d[i] &= D_i[i], \quad 1 \leq i \leq p. \end{aligned}$$

Обозначим

$$K[i] = K^a[i] = \Phi_i[i] = (K^d[i])^* = D_i^*[i], \quad 1 \leq i \leq p.$$

Используя полученные выше выражения, рекуррентный алгоритм Левинсона–Дарбина, позволяющий вычислять коэффициенты АР по коэффициентам $K[i]$, можно представить в виде

$$K[n] = D_n^*[n] = \Phi_n[n] = \frac{R[n] + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{n-1}[i]R[n-i]}{\sigma_{n-1}^2}, \quad n = 2, \dots, p, \quad (6.20)$$

$$\Phi_n[i] = \Phi_{n-1}[i] + \Phi_n[n]\Phi_{n-1}^*[n-i],$$

$$\Phi_n[i] = \Phi_{n-1}[i] + K[n]\Phi_{n-1}^*[n-i], \quad (6.21)$$

$$\sigma_n^2 = \left(1 - |\Phi_n[n]|^2\right) \sigma_{n-1}^2,$$

с инициацией

$$K[1] = \Phi_1[1] = \frac{-R[1]}{R[0]}, \quad \sigma_0^2 = R[0]. \quad \sigma_0^2 = R[0].$$

В работах [3, 4] решена задача обобщения алгоритма Левинсона–Дарбина для корреляционных матриц произвольного типа. Получена структура универсального адаптивного решетчатого фильтра для многоканальной системы обработки сигнала. Ниже рассматривается синтез классического решетчатого фильтра на основе алгоритма Левинсона–Дарбина.

6.3 Синтез решетчатого фильтра

Важнейшим следствием алгоритма Левинсона–Дарбина является возможность получить структуру РФ. Фильтр линейного предсказания на решетчатой структуре представляет собой комбинацию фильтров прямого и обратного предсказания. РФ характеризуется рядом достоинств, позволяющих эффективно применять его для решения задач обработки сигналов.

Найдем выражения, позволяющие синтезировать структуру РФ, а также вычислять параметры фильтра.

Формулы (6.1) и (6.21) дают выражение

$$\begin{aligned} a_p[t] = x[t] + \sum_{i=1}^p \Phi_p[i]x[t-i] = x[t] + \sum_{i=1}^{p-1} \left(\Phi_{p-1}[i] + K[p]\Phi_{p-1}^*[p-i] \right) x[t-i] + \\ + \left(\Phi_{p-1}[p] + K[p]\Phi_{p-1}^*[0] \right) x[t-p]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Учитывая, что $\Phi_{p-1}[p] = 0$ и $\Phi_{p-1}^*[0] = 1$, получаем

$$a_p[t] = x[t] + \sum_{i=1}^{p-1} \Phi_{p-1}[i]x[t-i] + K[p] \left(\sum_{i=1}^{p-1} \Phi_{p-1}^*[p-i]x[t-i] + x[t-p] \right). \quad (6.23)$$

Выражение (6.1, б) можно представить в виде

$$x[t-p] = -\sum_{i=1}^{p-1} D_{p-1}[p-i]x[t-i] + d_{p-1}[t-1] = -\sum_{i=1}^{p-1} \Phi_{p-1}^*[p-i]x[t-i] + d_{p-1}[t-1].$$

Тогда (6.23) приводится к виду

$$a_p[t] = a_{p-1}[t] + K[p]d_{p-1}[t-1]. \quad (6.24)$$

Аналогично можно найти выражение для ошибки обратного предсказания

$$d_p[t] = d_{p-1}[t-1] + K^*[p]a_{p-1}[t]. \quad (6.25)$$

Полученные выражения (6.24) и (6.25) дают возможность представить структуру РФ в виде, изображенном на рис. 6.1.

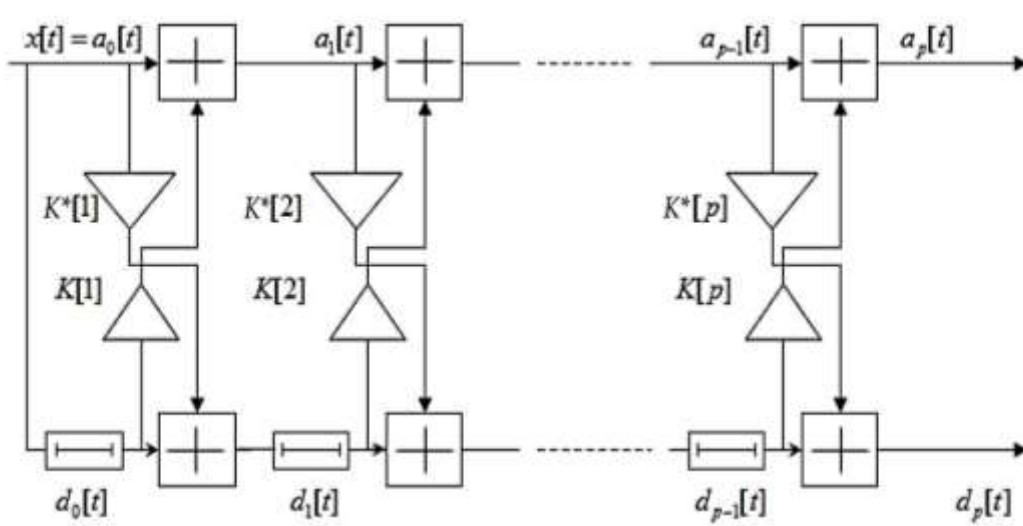


Рисунок 6.1 – Обеляющий РФ

При поступлении сигнала на вход фильтра на выходе каждого звена фильтра появятся ошибки предсказания вперед и назад. Как видно из рис. 6.1 ошибки предсказания вперед и назад связаны друг с другом соотношениями (6.24) и (6.25). Найдем выражения для расчета коэффициентов отражения методом Берга. Взаимную корреляцию ошибок прямого и обратного предсказания в $(p-1)$ -м звене можно представить в виде

$$R_{ad} = E\{a_{p-1}[t]d_{p-1}^*[t-1]\} = E\left\{\left(x[t] + \sum_{k=1}^{p-1} \Phi_{p-1}[k]x[t-k]\right)(x^*[t-p] + \sum_{i=1}^{p-1} D_{p-1}^*[i]x^*[t-p+k])\right\}. \quad (6.26)$$

После преобразований получим

$$R_{ad} = R[p] + \sum_{k=1}^{p-1} \Phi_{p-1}[k]R[p-k] + \sum_{i=1}^{p-1} D_{p-1}^*[i]R[p-i] + \sum_{k=1}^{p-1} \Phi_{p-1}[k]D_{p-1}^*[i]R[p-k-i].$$

Учитывая (6.2), можно показать, что сумма третьего и четвертого слагаемого равна

$$R[p] + \sum_{k=1}^{p-1} \Phi_{p-1}[k] R[p-k] = 0.$$

Тогда

$$R_{ad} = R[p] + \sum_{k=1}^{p-1} \Phi_{p-1}[k] R[p-k] = \Delta_p^a.$$

Подставляя это выражение в (6.13, в) и учитывая (6.26), получим

$$K[p] = -\frac{R_{ad}}{\sigma_{a,p-1}^2} = -\frac{\sum_{t=p+1}^N a_{p-1}[t] d_{p-1}^*[t-1]}{\sum_{t=p+1}^N a_{p-1}^2[t]}. \quad (6.27)$$

С помощью соотношения (6.19) это выражение представляется также в виде

$$K[p] = -\frac{\sum_{t=p+1}^N a_{p-1}[t] d_{p-1}^*[t-1]}{\sum_{t=p+1}^N d_{p-1}^2[t-1]}. \quad (6.28)$$

Формулы для расчета $K[p]$ (6.27) и (5.28) называют прямым и обратным методами, соответственно. Применяется для вычислений коэффициентов отражения метод геометрического среднего [2]

$$K[p] = -\frac{\sum_{t=p+1}^N a_{p-1}[t] d_{p-1}^*[t-1]}{\sqrt{\sum_{t=p+1}^N a_{p-1}^2[t]} \sqrt{\sum_{t=p+1}^N d_{p-1}^2[t-1]}}. \quad (6.29)$$

Можно показать, что прямой метод является следствием минимизации ошибки прямого предсказания, а обратный метод минимизирует ошибку обратного предсказания.

Таким образом, коэффициенты отражения p -го звена РФ равны нормированным коэффициентам корреляции ошибок прямого и обратного

предсказания в $(p-1)$ -м звене РФ. Отсюда следует, что коэффициенты отражения обладают важным свойством

$$|K[i]| \leq 1. \quad (6.30)$$

Метод Берга для оценки коэффициентов отражения минимизирует среднее арифметическое дисперсии ошибок предсказания вперед и назад

$$D_{ad} = \frac{1}{2N} \left[\sum_{t=p+1}^N |a_{p-1}[t]|^2 + \sum_{t=p+1}^N |d_{p-1}[t-1]|^2 \right]. \quad (6.31)$$

Минимизируя эту функцию путем взятия комплексной производной, получаем выражение оценки коэффициентов отражения по методу Берга

$$K[p] = - \frac{2 \sum_{t=p+1}^N a_{p-1}[t] d_{p-1}^*[t-1]}{\sum_{t=p+1}^N a_{p-1}^2[t] + \sum_{t=p+1}^N d_{p-1}^2[t-1]}. \quad (6.32)$$

В методе Берга неявно используется равномерная весовая функция $\omega_{p-1}[t] = 1/N$. Улучшение точности оценок $K[p]$ можно достичь использованием взвешивающей функции для среднего квадрата ошибок (6.31)

$$D_{ad} = \frac{1}{2N} \left[\sum_{n=p+1}^N \omega_{p-1}[t] \left(|a_{p-1}[t]|^2 + |d_{p-1}[t]|^2 \right) \right].$$

Минимизация этой функции приводит к выражению для оценки

$$K[p] = - \frac{2 \sum_{t=p+1}^N \omega_{p-1}[t] a_{p-1}[t] d_{p-1}^*[t-1]}{\sum_{t=p+1}^N a_{p-1}^2[t] + \sum_{t=p}^N d_{p-1}^2[t-1]}. \quad (6.33)$$

Используя различные окна, в частности окно Хемминга, можно добиться повышения точности оценок спектра с использованием параметров РФ. Коэффициенты отражения, рассчитанные по (6.32) и (6.33), позволяют получить более точные оценки СПМ параметрическим методом, чем оценки на основе решения уравнения Юла–Уокера. Используя соотношения (6.20) и (6.21) алгоритма Левинсона–Дарбина, по найденным оценкам $K[p]$ можно вычислить коэффициенты АР и получить оценку СПМ [2, 6]. Выражения (6.27), (6.28), (6.29)

и (6.32) дают удобную при использовании оценку коэффициентов отражения РФ, позволяющие обновлять их при блочной адаптации фильтра. Для пошаговой адаптации применяются градиентный и рекурсивный наименьших квадратов (РНК) методы [1, 5]. Градиентный метод требует малого количества вычислительных затрат, однако имеет большую длину адаптации. При использовании метода РНК необходимо выполнять большое количество операций, однако у него существенно меньшая длина адаптации.

Из рис. 6.1 видно, что текущий отсчет случайного процесса и ошибки обратного предсказания можно представить в виде

$$x[t] = a_p[t] - \sum_{i=1}^p K[i]d_{p-1}[t-1], \quad a_0[t] = d_0[t] = x[t], \quad (6.34)$$

т.е. взвешенным суммированием ошибок обратного предсказания в предшествующий момент времени с коэффициентами веса, равными коэффициентам отражения. Случайная величина $x[t]$, представленная в виде ряда (6.34), полностью определяется коэффициентами разложения, роль которых играют коэффициенты отражения. Таким образом, коэффициенты отражения полностью характеризуют случайный процесс в рамках модели АР. Это также следует из алгоритма Левинсона–Дарбина. Из (6.20) видно, что коэффициенты отражения являются частной автокорреляцией и содержат полную информацию о случайном процессе, в рамках модели АР.

Несмотря на то, что АР фильтры и РФ математически эквивалентно описывают случайный процесс, между ними существует ряд различий, существенных с практической точки зрения. Важнейшим достоинством алгоритма Левинсона–Дарбина является возможность получения устойчивых решений уравнения Юла–Уокера при плохой обусловленности корреляционной матрицы. Синтезирующий РФ, имеющий обратную связь, всегда устойчив. При цифровой реализации фильтров особое значение играет шум округления. Его появление связано с тем, что значения величин приходится представлять конечным числом разрядов. Как показывает опыт, в этом отношении РФ более эффективны. Объясняется это тем, что ошибки округления $(i-1)$ -го звена в РФ частично компенсируются в i -ом звене РФ, чего нет в АР фильтрах.

Другой важной характеристикой цифровых фильтров является чувствительность к квантованной форме представления параметров фильтра. Поэтому, естественно, возникает вопрос: насколько сильно зависят характеристики фильтра от отклонения величин параметров. Доказано, что РФ менее чувствительны к погрешностям квантования параметров по сравнению с фильтрами прямой реализации. При синтезе РФ, состоящего из p -звеньев, используются те же коэффициенты отражения, что и у $(p-1)$ -звенного РФ фильтра. В АР фильтре при увеличении числа звеньев фильтра приходится заново пересчитывать все коэффициенты АР фильтра. Это также является причиной большей эффективности РФ по адаптивным свойствам, чем фильтры прямой реализации.

Следовательно, можно сделать вывод, что использование РФ для обработки случайных сигналов имеет ряд преимуществ, по сравнению с АР фильтрами [1].

Эффективность обработки сигналов РФ определяется точностью АР моделирования этих сигналов, достоверностью используемых оценок параметров фильтра и сигнала, скоростью и объемом необходимых вычислений. Наиболее простым способом проверки соответствия параметров РФ характеристикам обрабатываемых сигналов может служить мера близости сигнала на выходе РФ к белому шуму. Это следует из принципа построения РФ по минимуму дисперсии ошибки предсказания, который в рамках корреляционной теории адекватен некоррелированности ошибок предсказания.

РФ используются для обработки как стационарных, так и нестационарных коррелированных процессов. Примерами задач, решаемых с помощью таких фильтров, может служить применение РФ для подавления или обеления стационарных коррелированных помех, измерение некоторых параметров сигнала, кодирование и синтез речи, создание эффективных вычислительных алгоритмов и т.д.

6.4 Генерация случайных процессов с использованием решетчатых фильтров

Обеляющий и формирующий решетчатые фильтры обратимы. Если на вход обеляющего РФ подается коррелированный случайный процесс, т. е. $a_0[t] = d_0[t] = x[t]$, то на выходе получаем ошибку предсказания типа белого шума $a_p[t]$. В случае же когда на выход обеляющего РФ подается случайный процесс типа белого шума, то есть $a[t] = a_p[t]$, то на его входе формируется коррелированный случайный процесс, т. е. $x[t] = a_0[t] = d_0[t]$. Свойство обратимости РФ успешно применяется для анализа и синтеза речевого сигнала в кодеках речи.

Рассмотрим случай действительного случайного процесса. Для генерации коррелированного случайного процесса применяется формирующий фильтр на базе РФ с обратной связью. Выражения, описывающие работу генератора на РФ, можно получить из (6.25) и (6.34). Структура такого генератора приведена на рис. 6.2. Работа генератора на РФ описывается системой двух уравнений

$$x[t] = a_p[t] - \sum_{i=1}^p K[i]d_{i-1}[t-1], \quad (6.35, a)$$

$$d_p[t] = d_0[t-p] + \sum_{i=1}^p K[i]a_{i-1}[t-p+i]. \quad (6.35, б)$$

Заметим, что из (6.22) следует, что системные функции АР и РФ фильтров совпадают. Выражение для передаточной функции РФ через коэффициенты отражения можно получить из (6.35). Однако оно будет иметь более сложный вид, чем для модели АР (1.22), из-за нелинейной связи коэффициентов отражения и коэффициентов АР(p). Как следует из (6.21) для двухзвенного РФ, коэффициенты отражения выражаются через коэффициенты АР (2) следующим образом

$$K[2] = \Phi[2], \quad K[1] = \Phi[1]/(1 + \Phi[2]). \quad (6.36)$$

Уже для трехзвенного РФ подобные выражения становятся значительно сложнее. Соотношения типа (6.36) позволяют рассчитать коэффициенты отражения генератора на РФ по заданным характеристикам СПМ через коэффициенты АР, используя соотношения (1.19).

Применение для генерации РФ гарантирует стабильность работы генератора, т.к. согласно (6.30) $|K[m]| < 1$, что является необходимым условием, чтобы передаточная функция была минимально фазовой функцией и ее полюсы находились внутри единичного круга на комплексной плоскости. На точность соответствия имитационного процесса реальному влияет нечувствительность коэффициентов $K[m]$ к ошибкам квантования. При переходе от m -звенного к $m+1$ -звенному формирующему фильтру, значения $K[m]$ не пересчитываются, в то время как коэффициенты АР нужно пересчитывать заново. Для некоторых систем обработки сигналов важно, что вид анализирующего и синтезирующего РФ совпадает.

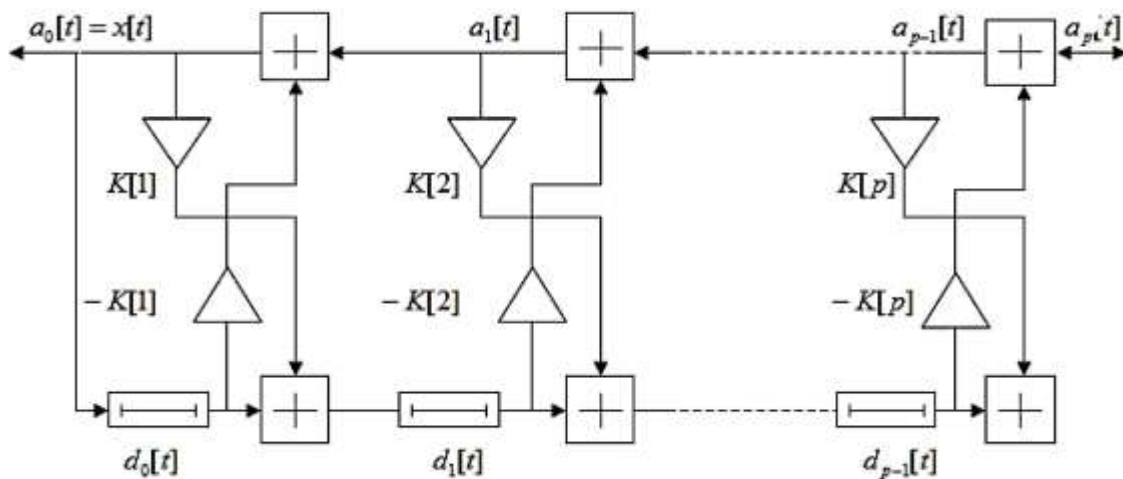


Рисунок 6.2 – Генератор коррелированного случайного процесса на РФ

Приведем пример генерации процесса АР на РФ. Для генерации коррелированного случайного процесса с помощью решетчатого фильтра необходимо задать коэффициенты отражения моделируемого процесса.

Используя выборочные коэффициенты отражения $K[1] = -0.309$ и $K[2] = 0.931$, был сгенерирован процесс, показанный на рис. 6.3. Коэффициенты отражения рассчитывались по выборке для процесса $AP(2)$, с параметрами СПМ $f = 20$, $\Delta f = 1$.

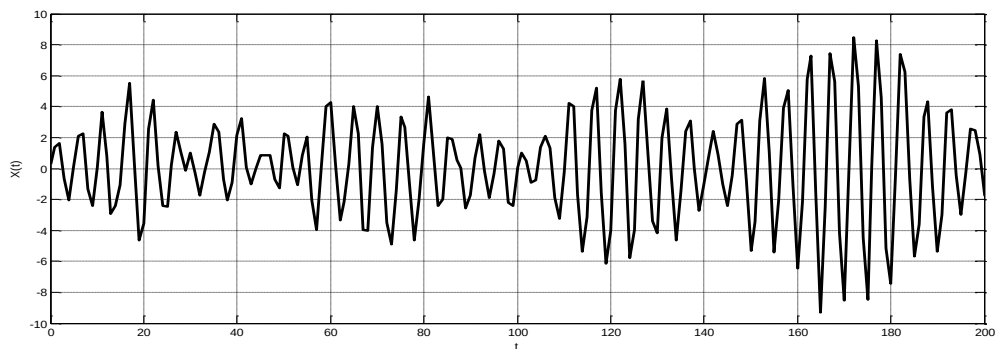


Рисунок 6.3 – Выборка коррелированного случайного процесса, полученная с помощью генератора на РФ с параметрами СПМ $f = 20$, $\Delta f = 1$

На рис. 6.4 показаны теоретическая и найденная по сгенерированной выборке генератором на решетчатой структуре (рис. 6.2) AP оценки СПМ. Как следует из графиков, выборочная СПМ и теоретическая СПМ практически совпадают.

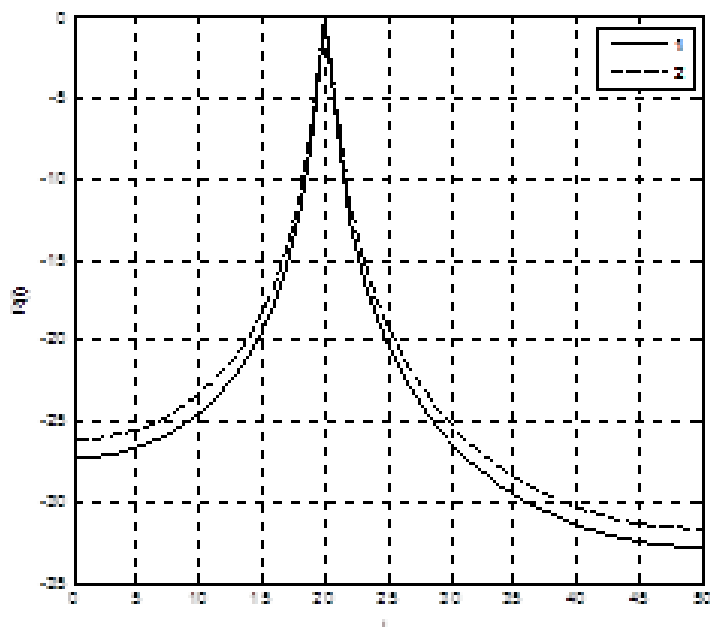


Рисунок 6.4 – Теоретическая и выборочная оценки СПМ сгенерированного процесса: 1 – теоретическая СПМ, 2 – выборочная СПМ

6.5 Примеры обработки стационарных случайных процессов с помощью решетчатых фильтров

Рассмотрим несколько примеров обеления коррелированного случайного процесса с помощью РФ. Для анализа использовался имитационный гауссов процесс АР, полученный с помощью генератора АР по задаваемым параметрам спектра. Качество обеления, или точнее декорреляции случайных процессов, проводилась по функции корреляции выходного процесса РФ. Наиболее простым способом проверки соответствия параметров РФ характеристикам обрабатываемых сигналов может служить мера близости сигнала на выходе РФ к белому шуму.

Это следует из принципа построения РФ по минимуму дисперсии ошибки предсказания.

На рис. 6.3 показан график имитационного случайного процесса, полученного с помощью модели АР четвертого порядка процесса с параметрами СПМ $f_{h1} = 50$, $\Delta f_{h1} = 5$, $f_{h2} = 200$, $\Delta f_{h2} = 15$, $T = 0.001$. В качестве порождающего процесса использовался гауссов белый шум длиной 1000 отсчетов.

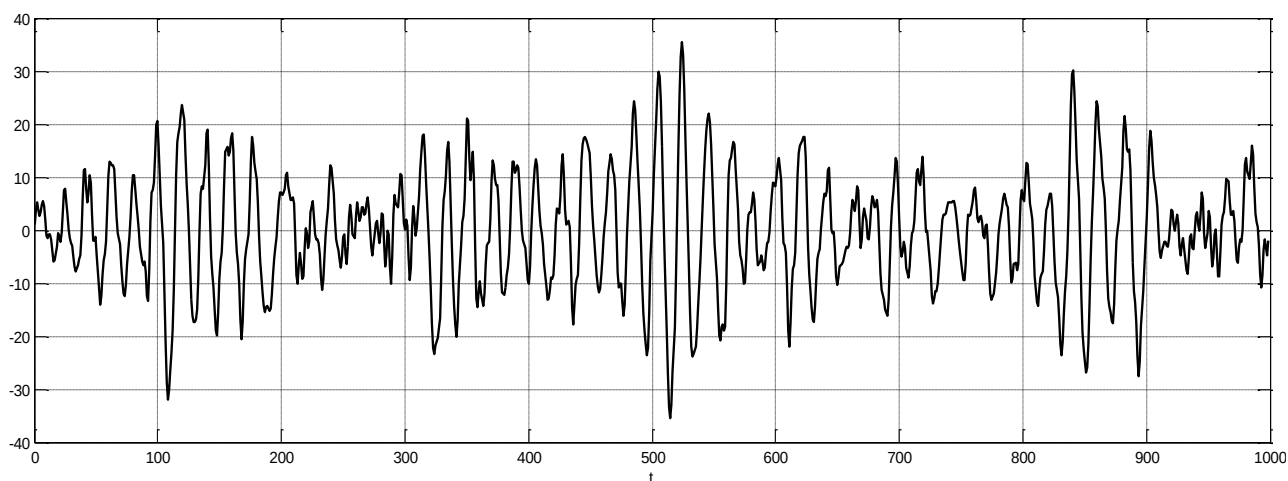


Рисунок 6.3 – Выборка имитационного случайного процесса, полученная с помощью модели АР четвертого порядка

На рис. 6.4. представлены теоретическая и выборочные оценки СПМ, найденные по модели АР (4). Обеление производилось с помощью четырехзвенного РФ. Нормированная АЧХ РФ представлена на рис. 6.5. Форма АЧХ обратна форме оценки СПМ по модели АР (4).

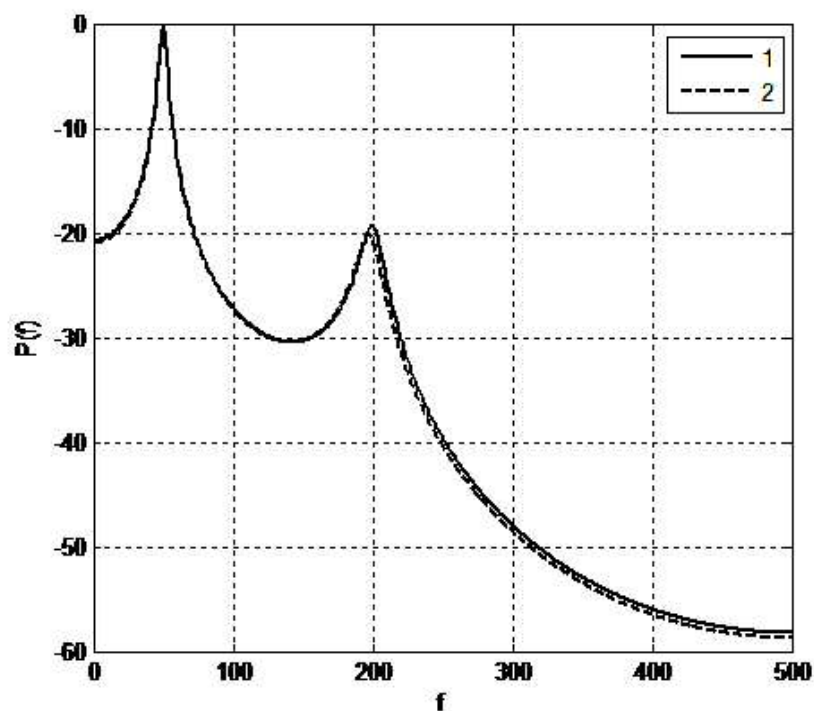


Рисунок 6.4 – Теоретическая и выборочные АР (4) оценки СПМ

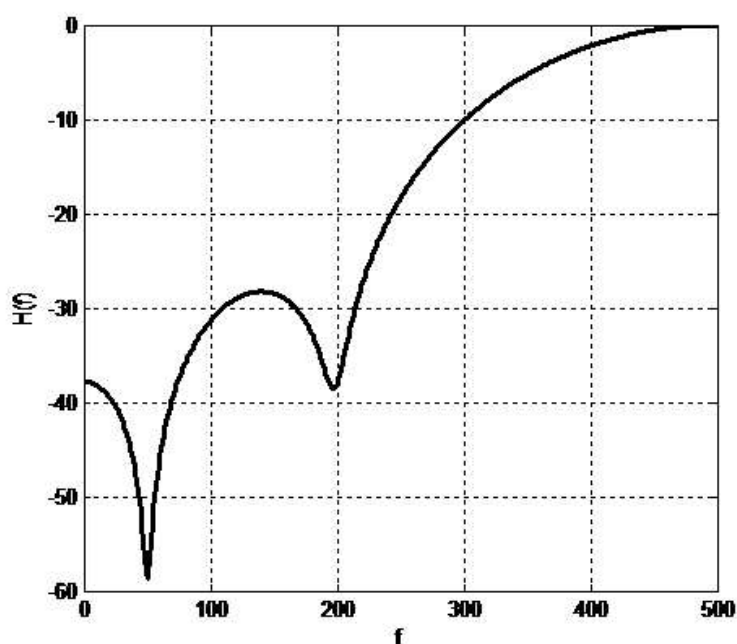


Рисунок 6.5 – Нормированная АЧХ четырехзвенного РФ

Ошибки предсказания, полученные с выхода РФ, показаны на рис. 6.6. Коэффициенты отражения рассчитывались по методу Берга. Выборочные оценки коэффициентов отражения составляли: $K[1] = -0.9297$, $K[2] = 0.8187$, $K[3] = -0.4639$, $K[4] = 0.8720$.

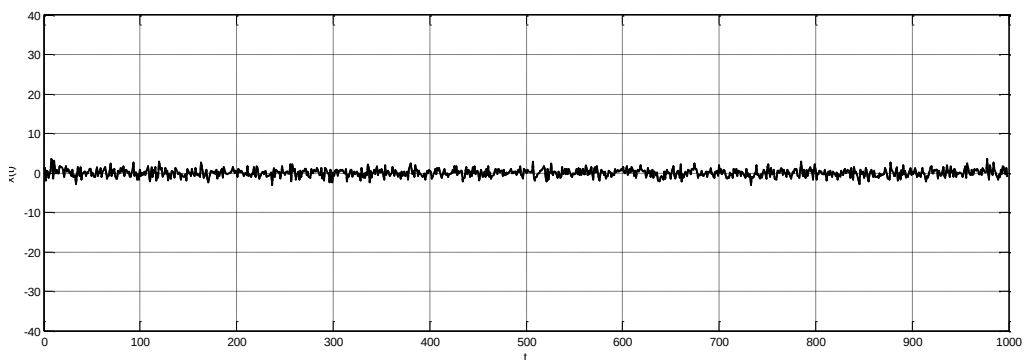
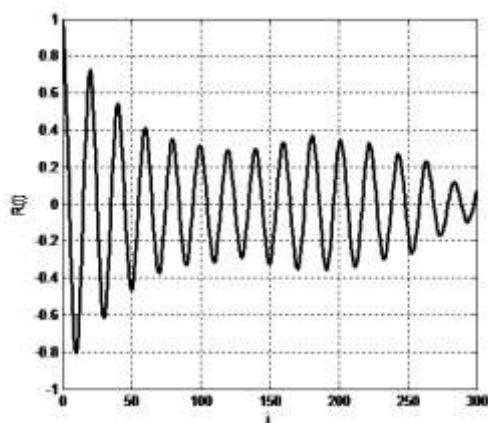
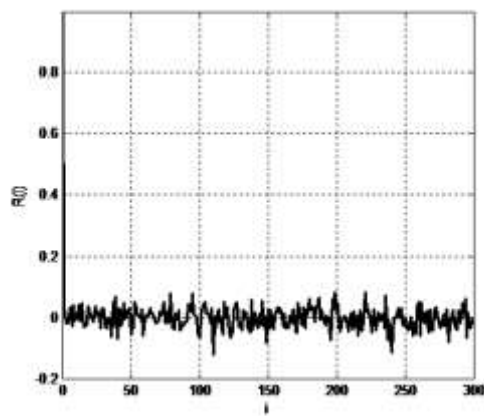


Рисунок 6.6 – Ошибка предсказания на выходе четырехзвенного РФ

Качество обеления оценивалось путем сравнения корреляционных функций процессов на входе и на выходе РФ (рис. 6.7). Из рис. 6.7, б видно, что при обелении процесса АР (4) четырехзвенным РФ, на выходе получают белый шум с дельтакорреляцией.



а)



б)

Рисунок 6.7 – Корреляционные функции:

а – процесса на входе РФ, б – ошибки предсказания на выходе РФ

Для качественного обеления нестационарных случайных сигналов необходимо адаптивно выбирать число звеньев РФ, что не всегда возможно. Поэтому в некоторых задачах статистической радиотехники число звеньев РФ фиксируется. При этом коэффициенты отражения несут неполную информацию о случайном сигнале, а ошибка предсказания не является белым шумом и часто называется остатком предсказания. Такая неоптимальная обработка оказывается весьма эффективной в системах сжатия речи в современных системах цифровой связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридландер В. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, №8. – С. 54–98.
2. Марпл–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
3. Леховицкий Д.И. Обобщенный алгоритм Левинсона и универсальные решетчатые фильтры // Изв. вузов: Серия Радиофизика. – 1992. – № 9, 10.
4. Леховицкий Д.И. и др. Универсальные адаптивные решетчатые фильтры // Изв. вузов: Серия Радиофизика. – 1992. – №3,4, № 11, 12.
5. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна, П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
6. Фридландер Б. Методы спектрального оценивания на основе решетчатой структуры // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, №9. – С. 95–125.

7 СЖАТИЕ РЕЧИ В СТАНДАРТЕ СОТОВОЙ СВЯЗИ GSM

7.1 Введение

Одним из наиболее ярких практических применений моделей линейного предсказания явилось их использование в методах сжатия (кодирования) речевых сигналов. В современных цифровых системах связи речевой сигнал передается цифровом виде. Это относится к сотовым, транкинговым, спутниковым системам цифровых стандартов связи, IP–телефонии. Даже для связи в декаметровом диапазоне начинают применять цифровую связь со сверхсжатием речи. Создание эффективной системы цифровой речевой связи невозможно без применения низкоскоростного кодека, использующего методы сжатия речевого сигнала. Ниже обоснована необходимость использования сжатия речи в цифровой радиосвязи, описан метод кодирования речи LPC–LTP–RPE в стандарте GSM сотовой связи.

Несмотря на значительные преимущества систем цифровой связи по сравнению с аналоговыми, у них есть существенный недостаток – необходимость использования значительно большей ширины полосы речевого физического канала связи. Для передачи речи с приемлемым качеством в большинстве стандартов связи принято ограничение полосы речевого сигнала от 300 Гц до 3400 Гц. Поэтому, в соответствии с теоремой Котельникова, для оцифровки речи обычно применяется частота дискретизации равная 8 кГц. Речевой аналоговый сигнал с помощью АЦП представляется в виде 8–ми битовых слов, включая знаковый разряд. Таким образом, необходимая скорость передачи речевой информации составляет 64 кбит/с и выше. Пропускная способность идеального гауссова канала связи (т.е. канала с гауссовым шумом) с ограниченной пиковой мощностью сигналов описывается обобщенной формулой Шеннона

$$C = \Delta f_c \log_2(1 + \alpha_c P_c / P_{ш}),$$

где Δf_c – ширина полосы частот, занимаемая каналом цифровой связи, α_c – коэффициент, учитывающий ухудшение информационных свойств применяемого класса сигналов ($0 < \alpha \leq 1$), P_c – средняя мощность используемых сигналов, $P_{ш}$ – средняя мощность шума в полосе частот Δf_c . Из этого выражения следует, что полоса сигнала, требуемая для передачи информации, пропорциональна скорости передачи информации и составляет десятки Кбит/с. Таким образом, необходимо уменьшать количество информации, передаваемое в единицу времени без существенных потерь в ее качестве. Это достигается путем частичного устранения избыточности речи. Она заключается в возможности передачи некоторого объема речевой информации меньшим количеством данных. В речи существуют кратковременные и долговременные избыточности. Кратковременные избыточности связаны с огибающей спектра речевого

сигнала, т.е. корреляцией между отсчетами речевого сигнала. Долговременные избыточности присущи тонкой структуре речевого сигнала, которые характеризуются корреляцией отсчетов сигнала в соседних периодах основного тона (ОТ) речевого сигнала.

Поскольку количество каналов в системе связи ограничено, применение цифровой связи без кодирования речи могло бы привести к значительной потере емкости сети, т.е. уменьшению числа абонентов, обслуживаемых системой связи. Для снижения скорости информационного потока применяются системы кодирования речи с потерями. Системы, реализующие в алгоритмическом виде кодирование, называются кодеками (кодер–декодер) речи.

Несмотря на множество разработанных и стандартизированных методов кодирования речи, до сих пор ведутся исследования и разработки, направленные на создание низкоскоростных кодеков речи с приемлемым качеством восстанавливаемой речи. Это особенно заметно на истории создания цифровых систем связи. Чем позже был принят стандарт цифровой связи, тем более совершенный кодек речи в нем используется. Ниже будут изложены теоретические основы и некоторые практические аспекты технической реализации систем кодирования речи, используемые в стандартах цифровой связи.

7.2 Кодирование речи методом LPC–LTP–RPE

Рассмотрим метод кодирования речи LPC–LTP–RPE, применяемый в сотовых системах связи европейского стандарта GSM [1, 2]. Данный метод сжатия является частью телекоммуникационного протокола GSM (Global System for Mobile), самого распространенного протокола для цифровых мобильных телефонов в Европе. GSM является телефонным стандартом, определенным Европейским Институтом Телекоммуникационных Стандартов (European Telecommunication Standards Institute – ETSI). Для сжатия речи используется часть стандарта, относящаяся к сжатию речи GSM 06.10 RPE–LTP “Regular Pulse Excitation Long Term Predictor” – метод регулярного импульсного возбуждения, используемый в европейских сотовых системах на 13,2 Кбит/с.

Рабочей группой по разработке стандарта GSM были предъявлены следующие основные требования к речевому кодеку [3, 4]:

- высокое качество речи, не уступающее по качеству передаче речи в лучших существующих аналоговых сотовых системах связи;
- низкая скорость передачи речи, которая обеспечивает возможность эффективного канального кодирования и результирующая скорость передачи в канале связи не выше 16 кбит/с;
- малая задержка сообщения в процессе преобразования речи;
- устойчивость к ошибкам в канале передачи;
- возможность работы в широком динамическом диапазоне входных воздействий как сигнала, так и шума;
- большой динамический диапазон выходных сигналов;

- незначительное снижение качества передачи при каскадном соединении кодеков;
- прозрачность для сигналов данных;
- прямое сопряжение со смежными устройствами терминалов;
- простота реализации;
- малое энергопотребление;
- низкая стоимость.

При использовании кодека, качество речи должно соответствовать качеству речи, передаваемой по ISDN, и превосходить качество речи в аналоговых радиотелефонных системах.

Идея кодирования методом линейного предсказания состоит в том, чтобы вместо оцифрованного речевого сигнала передавать его статистические характеристики [5]. Некоторые статистические характеристики случайного процесса несут достаточно полную информацию о речевом сигнале. Например, корреляционная функция дает достаточно полную характеристику сигнала во временной области. Хотя речевой сигнал, представленный различными фонемами, далеко не всегда имеет гауссово распределение, основную информацию о нем содержит именно корреляционная функция. Недостатком использования корреляционной функции в качестве полной характеристики речевого сигнала, является ее значительная длина, особенно для гласных звуков. Поэтому передавая вместо речевого сигнала его корреляционную функцию значительного сжатия сигнала не достигнуть.

Как показали исследования, асимптотически полную информацию о речевом сигнале несут коэффициенты АР и частная автокорреляционная функция. Длина частной автокорреляционной функции и количество коэффициентов АР модели сигнала совпадают. Поэтому частная автокорреляционная функция имеет значительно меньшую длину, чем автокорреляционная функция. Именно она используется для передачи основной информации о речевом сигнале в кодеках речи методом линейного предсказания. Из алгоритма Левинсона–Дарбина следует, что значения частной автокорреляционной функции равны коэффициентам отражения решетчатого фильтра.

В основе кодирования речи лежит модель АР выборки речевого сигнала. Модель АР имеет полюсную передаточную функцию. Поэтому она, как правило, применяется для моделирования узкополосных сигналов. Речевые сигналы имеют узкополосные многомодовые спектры, широкополосные и смешанные спектры. Поэтому применение для кодирования АР модели линейного предсказания несколько ухудшает адекватность модели анализируемым речевым сигналам. Однако использование моделей СС и АР–СС, описывающих сигналы с широкополосными и смешанными спектрами, нерационально с точки зрения вычислительных затрат.

Значения частной автокорреляции равны последнему коэффициенту АР для каждого порядка $K[n] = \Phi_n[n]$. Поэтому для нахождения значений частной автокорреляции можно использовать уравнения Юла–Уокера.

При таком способе расчета частной автокорреляции необходимо решать p систем уравнений и это может быть причиной получения неустойчивых решений. Длина частной автокорреляции равна порядку ее АР модели и для разных фонем или сегментов речевых сигналов речи может существенно варьироваться. Порядок модели подбирается при анализе сигнала с помощью некоторого информационного критерия. Несмотря на то, что известно множество методов оценки порядков моделей, их адаптивное использование для анализа речи вызывает затруднение. Поэтому при создании кодеков речи принято решение использовать фиксированную длину частной автокорреляции для передачи характеристик речевого сигнала.

Конструктивные достоинства моделей линейного предсказания дают возможность сравнительно просто синтезировать устройство анализа речи на основе обеляющего фильтра. В качестве синтезатора речи можно использовать формирующий АР фильтр. Однако существенным недостатком АР синтезатора речи, является его возможная неустойчивость из-за наличия обратной связи. Устойчивость такого фильтра определяется условием стационарности модели АР и зависит от параметров модели. Из условия устойчивости формирующего АР фильтра с рациональной передаточной функцией, следует условие стационарности АР процесса. Для определения стационарности случайного АР процесса используется характеристическое уравнение (1.16). Если корни характеристического уравнения лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости, то процесс АР удовлетворяет условию стационарности. Модель АР речевых сигналов не всегда удовлетворяет условию стационарности. Хотя методом спектральной факторизации можно перейти от нестационарной модели АР к стационарной модели с эквивалентным спектром, это влечет за собой вычислительные затраты.

Указанные выше сложности использования достаточно простых АР методов анализа и синтеза речи, заставило разработчиков кодеров обратиться к известному алгоритму Левинсона–Дарбина. Этот алгоритм позволил не только с помощью простого рекуррентного алгоритма рассчитать коэффициенты АР p -го порядка по коэффициентам АР меньших порядков, но и синтезировать РФ для обработки случайных коррелированных сигналов. На основе алгоритма Левинсона–Дарбина получены ряд эффективных способов вычисления коэффициентов отражения. Значения частной автокорреляции оказались равными коэффициентам усиления РФ, которые называются обычно коэффициентами отражения. Так как значения коэффициентов отражения РФ по модулю меньше единицы, то синтезирующий речевой сигнал РФ с обратной связью всегда устойчив. Поэтому кодеки речи по методу линейного предсказания построены на обеляющем и генерирующих решетчатых фильтрах, реализованных программно на микропроцессоре. Ниже рассмотрены принципы построения кодека речи в стандарте сотовой связи GSM.

На рис. 7.1 представлена структурная схема кодера речи, используемого в стандарте сотовой связи GSM [6]. Он состоит из кратковременного анализатора

речи (LPC–блок), долговременного анализатора речи (LTP–блок), взвешивающего фильтра и формирователя регулярных импульсов возбуждения (RPE–блок). Рассмотрим последовательность преобразований речевого сигнала в процессе кодирования речи. Непрерывный речевой сигнал дискретизируется с частотой квантования 8 кГц. Каждый отчет сигнала представляется 8–битовым словом. Для улучшения разборчивости восстанавливаемой в приемнике речи, осуществляется обработка входного сигнала цифровым полосовым фильтром, поднимающим уровень верхних частот речевого сигнала.

В кодере осуществляется блочная адаптивная обработка. С этой целью оцифрованный сигнал разбивается на выборки длиной 160 отсчетов. Длительность блоков составляет $160/8 \text{ кГц} = 20 \text{ мс}$. Для предотвращения резких скачков сигнала на краях сегментов при его восстановлении, выборки сигнала «взвешиваются» окном Хемминга. После такой обработки мгновенные значения сигнала плавно спадают от центра окна к его краям. Окно Хемминга описывается выражением $W(t) = 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi}{N}t$, $t = 0, 1, \dots, N - 1$.

Разность между максимальным уровнем лепестка и боковыми лепестками составляет 43 дБ.

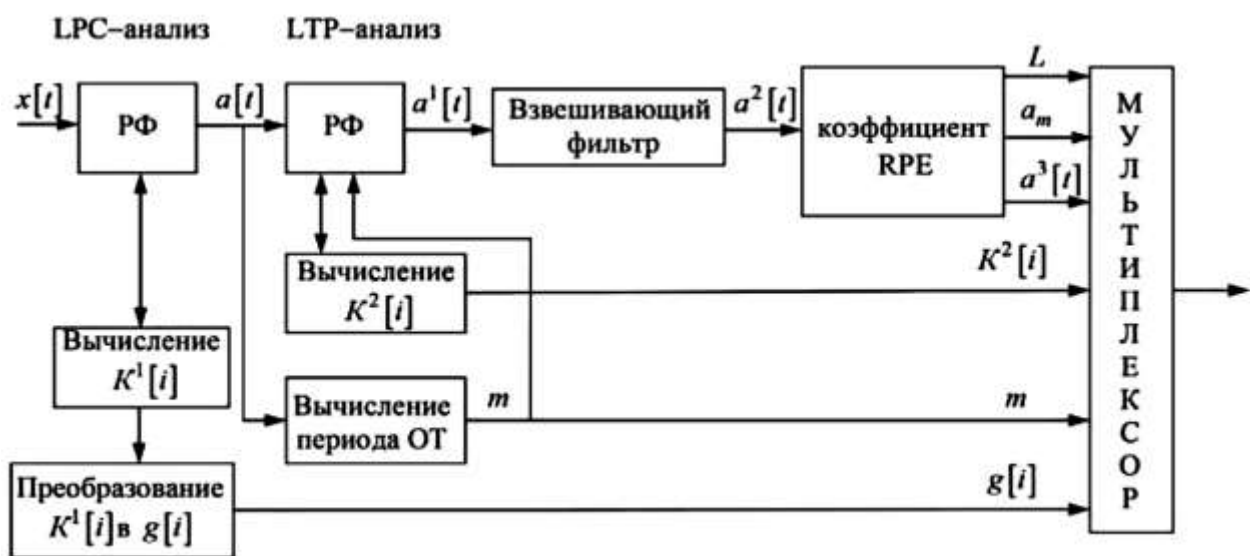


Рисунок 7.1 – Структурная схема кодера GSM на 13 кбит/с

Каждая 20–миллисекундная выборки сигнала поступает на блок LPC кратковременного предсказания. Блок LPC включает в себя анализирующий РФ фильтр 8–го порядка. Функцию анализирующего РФ выполняет фильтр линейного предсказания, работающий по принципу обеляющего фильтра, схема которого представлена на рис. 6.1. Коэффициенты усиления РФ (или так называемые коэффициенты отражения) вычисляются по мере прохождения речевого сигнала через звенья фильтра. После нахождения коэффициентов отражения в i –ом звене РФ, через звено пропускаются отсчеты

сигнала $(i-1)$ -го звена, являющиеся ошибками прямого и обратного предсказания. Полученные ошибки предсказания в i -ом звене используются для расчета коэффициентов отражения $(i+1)$ -го звена.

Значения автокорреляции прямого и обратного остатков предсказания после каждого звена будут уменьшаться. Решетчатая форма фильтра будет минимально-фазовой, если все коэффициенты отражения $K^1[i] < 1$. Здесь индекс вверху у коэффициента отражения указывает на первый вектор коэффициентов, рассчитанный в блоке LPC. Эти условия выполняются, если коэффициенты отражения будут определены по методу Берга, в основе которого лежит минимизация суммы среднего квадрата прямого и обратного остатков предсказания, т.е.

$$D_{ad} = \frac{1}{2N} \left[\sum_{t=i+1}^N |a_{i-1}[t]|^2 + \sum_{t=i+1}^N |d_{i-1}[t-1]|^2 \right].$$

Дифференцируя это выражение по $K^1[i]$, получаем формулу Берга

$$K^1[i] = - \frac{2 \sum_{t=i+1}^N a_{i-1}[t] d_{i-1}[t-1]}{\sum_{t=i+1}^N a_{i-1}^2[t] + \sum_{t=i+1}^N d_{i-1}^2[t-1]}.$$

Таким образом, коэффициенты отражения i -го звена РФ равны нормированным коэффициентам корреляции ошибок прямого и обратного предсказания в $(i-1)$ -м звене РФ. Отсюда следует, что коэффициенты отражения обладают важным свойством $|K^1[i]| \leq 1$. Это свойство является необходимым условием, чтобы инверсный фильтр с передаточной функцией $H(z)$ на передаче и синтезирующий фильтр с передаточной функцией $1/H(z)$ на приеме были минимально фазовыми функциями, т.е. чтобы нули $H(z)$ и полюсы $1/H(z)$ находились внутри единичного круга комплексной плоскости.

В идеальном случае, когда порядок анализируемого сегмента сигнала речи был бы равен восьми, выходом РФ будет белый шум с минимальной дисперсией. Это происходит в силу того, что АЧХ обеляющего фильтра имеет форму обратную СПМ анализируемого сегмента речи и коррелированный процесс преобразуется РФ в белый шум. Каждое звено последовательно трансформирует остаток коррелированного процесса в процесс с более низкой корреляцией. При этом учитываются ошибки округления и ошибки квантования, не устраненные предшествующим звеном фильтра.

Однако сегменты речи имеют разные порядки модели АР и обеление сегмента осуществляется не полностью. Поэтому на выходе LPC анализатора на РФ будет не ошибка предсказания типа белого шума, а слабо коррелированный остаток предсказания. Использование этого остатка предсказания в качестве порождающего сигнала в синтезаторе речи дает лучшее качество восстановленной речи, чем, если бы в качестве порождающего сигнала использовался белый шум.

Поскольку автокорреляция сигнала по мере прохождения через звенья РФ постепенно уменьшается, величина коэффициентов отражения также уменьшается, стремясь к нулю. Следовательно, наибольшее значение в формировании спектра синтезированного сигнала вносят коэффициенты отражения нескольких первых звеньев РФ. Существует неравномерная чувствительность спектра к изменениям коэффициентов отражения, например, за счет воздействия помех канала связи. Эта зависимость имеет неравномерный U – образный характер (рис. 7.2). Она имеет максимум при $K^1[i] = \pm 1$ и минимум при $K^1[i] = 0$. Это значит, что погрешности спектра восстановленного речевого сегмента в наибольшей степени зависят от наиболее важных значений $K^1[i]$, близких к ± 1 . Для устранения этого недостатка, применяется нелинейное преобразование коэффициентов отражения. Поэтому вместо передачи по каналу связи $K^1[i]$, передаются коэффициенты логарифма площади. Для их расчета необходимо предварительно сделать нелинейное преобразование $K^1[i]$ с помощью формулы

$$g[i] = \lg[(1 + K^1[i]) / (1 - K^1[i])].$$

Коэффициенты логарифма площади обеспечивают равномерную чувствительность спектра к значениям $K^1[i]$ при их искажении шумами канала. Они к тому же менее чувствительны к ошибкам квантования. Предварительное преобразование коэффициентов $K^1[i]$ в логарифмы площади сокращает требуемое число бит на передачу огибающей спектра почти в два раза при сохранении точности передачи сжатой речи [7]. Коэффициенты квантуют следующим образом: при i равном 1 и 2; 3 и 4; 5 и 6; 7 и 8 число бит на коэффициент соответственно равно 6; 5; 4; 2. Итого, на 8 коэффициентов отводится 36 бит в кадре длительностью 20 мс.

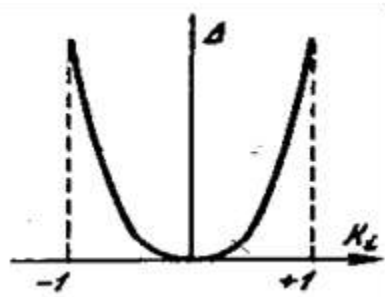


Рисунок 7.2 – Зависимость чувствительности спектра Δ от коэффициента $K^1[i]$

РФ кратковременного предсказания выделяет основную информацию о речевом сигнале, содержащуюся в быстрых изменениях мгновенных значений сигнала. Однако восьмизвенный РФ не в состоянии отслеживать медленные изменения речевого сигнала на интервале анализа, равного 160 отсчетов. К таким изменениям, прежде всего, относятся колебания сигнала с периодом ОТ. Длина периода ОТ обычно составляет 20–160 отсчетов сигнала (интервалов дискретизации) и соответствует диапазону 50–400 Гц. Такие низкочастотные изменения корреляционной функции, по которой рассчитываются параметры АР модели или коэффициенты отражения РФ, маскируются значительными высокочастотными колебаниями корреляционной функции. За некоторый промежуток времени, равный сдвигу корреляционной функции, степень изменения корреляционной функции за счет высокочастотных колебаний гораздо выше ее низкочастотных изменений. Поэтому вклад высокочастотных колебаний корреляционной функции при расчете параметров модели АР или коэффициентов РФ гораздо выше низкочастотных составляющих корреляционной функции. Поэтому РФ кратковременного предсказания не учитывает низкочастотные изменения в речевом сигнале. Это существенно усложняет алгоритм кодирования речи, требует использования вычислителя периода ОТ и фильтра долговременного предсказания. Остановимся подробнее на этих вопросах.

Мелодические характеристики речевого сигнала связаны с изменяющейся во времени частотой самой низкой составляющей в спектре звука – частотой ОТ. Частота ОТ является величиной, которая характеризует все периодические и квазипериодические звуки. Типичные средние значения частоты ОТ в речи составляют 132 Гц для мужчин, 223 Гц для женщин и 264 Гц для детей.

Изменение частоты ОТ во времени имеет сложную зависимость. Соседние периоды основного тона, как правило, отличаются по величине друг от друга, и эти различия передают разную информацию. В графике изменения частоты ОТ от времени наблюдаются постоянные флуктуации частоты, т.е. быстрые и сравнительно небольшие по диапазону колебания значений параметра на фоне более медленного его изменения во времени. Эти флуктуации передают интонацию человеческого голоса. Отсутствие их

в некоторых системах синтеза речи считается одной из причин "механического" звучания синтезированной речи. Наиболее важная для интонации составляющая флуктуации частоты ОТ – это значительные и плавные изменения, проявляющие себя в пределах слогов, слов и более крупных сегментов речи. Именно такие изменения составляющей флуктуации частоты ОТ передают интонационную информацию. Слух человека очень чувствителен к изменению периода ОТ. Поэтому его значения определяются в четыре раза чаще, чем коэффициенты отражения РФ кратковременного предсказания.

Значение периода ОТ для разных голосов может изменяться почти в 10 раз. Это обстоятельство создает трудности при оценке периода ОТ. Методов измерения периода ОТ предложено много. На международных конференциях ICASSP (International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing) часто предлагаются новые методы. Однако до сих пор пока не разработан метод достаточно надежный и простой и, вместе с тем, не требующий большой задержки времени из-за большого объема вычислений.

Для определения интервала, равного периоду ОТ, применяется также метод AMDF (Average Magnitude Difference Function). Используя отсчеты сигнала остатка LPC, определяют функцию среднего значения разности из выражения

$$S_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |a[i] - a[i + m]|, \quad (7.1)$$

где $a[i]$ – отсчеты сигнала остатка кратковременного предсказания, $m = 0, 1, 2, \dots, N$. Понятно, что на интервале, равного ОТ, различие между отсчетами будет незначительным, а функция S_m будет принимать минимальное значение.

Несмотря на относительную простоту выражения (7.1), анализ и удаление ОТ фильтром долговременного предсказания LTP является более сложной процедурой по сравнению с формантным анализом. Это обусловлено существенно большим периодом ОТ и сложностью выявления корреляции между отсчетами на большом временном интервале. Период ОТ и значение коэффициента усиления фильтра LTP очень важны для точного восстановления речи. Поэтому на этапе долговременного анализа выборку сигнала речи разделяют на 4 сегмента. Каждый сегмент имеет длительность 5 мс и содержит 40 отсчетов. Значения периода ОТ и коэффициента усиления фильтра LTP определяют для каждого сегмента по отдельности с учетом предшествующих 120 отсчетов, т.е. трех сегментов остатка LPC–предсказания.

Величина периода ОТ используется для вычисления коэффициента РФ первого порядка фильтра LTP.

Она определяется по максимуму взаимной корреляции

$$R[T_j] = \sum_{t=0}^{39} a[t + k_j] a'[t + k_j - T_j],$$

где $k_j = k_0 + 40 \times j$, $j = 0, 1, 2, 3$, $T_j = 40 \dots 120$, $a'[t + k_j - T_j]$ – отсчеты восстановленного остатка кратковременного предсказания. Взаимная корреляция рассчитывается для задержек времени больших чем длина одного сегмента ($T_j = 40$ отсчетов), но меньших чем $T_j = 120$ отсчетов. Период ОТ определяется по максимуму функции

$$R_j[m] = \max\{R_j[T_j]; T_j = 40 \dots 120\}.$$

Коэффициент усиления РФ фильтра LTP рассчитывается по выборке длиной 40 отсчетов остатка предсказания фильтра LPC через каждые 40 отсчетов. Его значение равно нормированному значению взаимной корреляции остатка предсказания и задержанного на период ОТ остатка предсказания

$$K_j^2[1] = \frac{R_j[m]}{\sum_{t=0}^{39} a'^2[t + k_j - m]}.$$

Коэффициент усиления РФ $K_j^2[1]$, в целях снижения скорости передачи речи, представляется двухбитовым кодом. Передается номер фиксированных коэффициентов усиления, значения которых хранятся в памяти. Номера квантованных таким способом коэффициентов $K_j^2[1]$ определяются по порогу принятия решения. Эти данные представлены в табл. 7.1. Если коэффициент $K_j^2[1]$ не превышает один из указанных порогов, то передается его номер и на принимающем мобильном терминале при декодировании используется хранящееся в памяти его дискретное значение. Как показали исследования, такой способ кодирования долговременной составляющей речи не приводит к заметному снижению ее качества.

Таблица 7.1 – Дискретизация $K_j^2[1]$

№ $K_j^2[1]$	Порог	Дискретное $K_j^2[1]$
0	0.2	0.10
1	0.5	0.35
2	0.8	0.65
3		1.00

Остаток долговременного предсказания получают долговременным фильтром предсказания, работа которого описывается выражением

$$a^l[t + k_j] = a[t + k_j] - K_j^2[1]a^l[t + k_j - m].$$

Таким образом фильтр LTP вычитает из текущей выборки остатка кратковременного предсказания, взвешенную на коэффициент отражения и задержанную на период ОТ, выборку остатка предсказания выхода фильтра LPC для каждого сегмента длительностью 5 мс.

В кодере речи применяется процедура, снижающая влияние на качество восстановленной речи шумов квантования. Шум квантования должен быть распределен так, чтобы большая часть его находилась в местах расположения формантных областей речевого сигнала, а меньшая – между формантными областями. Это требование может быть выполнено минимизацией взвешенной ошибки. Взвешивающий фильтр $W(z)$ подавляет шум в промежутках между формантными областями в спектре речевого сигнала и не подавляет в формантных областях, где он маскируется более мощным речевым сигналом. В результате, мешающее действие шума в синтезированной речи уменьшается (рис. 7.3).

Взвешивающий фильтр с передаточной функцией

$$W(z) = \frac{\Phi(z)}{\Phi(z/\gamma)} = \frac{1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i]\gamma^i z^{-i}},$$

где $\Phi[i]$ – коэффициенты АР предсказания, используется для корректировки формантных областей в спектре остатка предсказания относительно уровня шума квантования. Осуществляется это путем выбора γ . Оптимальное значение γ определено путем прослушивания. Оно оказалось равным 0.7 – 0.9. При этом воспринимаемое значение шума квантования становится минимальным. Длительность импульсной характеристики $W(z)$ составляет 11 отсчетов при частоте дискретизации 8 кГц. Значения импульсной

характеристики для соответствующих номеров с индексом t представлены в табл. 7.1 [8].

Таблица 7.1 – Значения импульсной характеристики

i	6	5(=7)	4(=8)
$W[i]$	1,000000	0.700790	0.250793
i	3(=9)	2(=10)	1(=11)
$W[i]$	0.000000	–0.045649	–0.016356

Выход взвешивающего фильтра для каждого сегмента, длительностью 5мс является $a^2[t]$, где $t = 0 \dots 39$ номер выборки сигнала в сегменте с частотой дискретизации 8 кГц.

$$a^2[t] = \sum_{i=1}^{11} W[i] a^1[t+5-i], \quad t = 0, \dots, 39.$$

Заметим, что полагают: $a^1[t+5-i] = 0$, для $t+5-i < 0$ и $t+5-i > 39$.

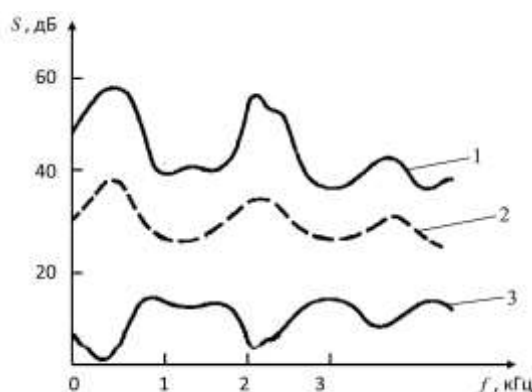


Рисунок 7.3 – Кратковременный спектр речи (кривая 1), частотная характеристика взвешивающего фильтра (кривая 2), спектр шума (кривая 3)

Использование анализирующих фильтров LPC и LTP фиксированной длины не позволяет получить остаток предсказания в виде белого шума. Следовательно, в остатке предсказания частично содержится информация о речевом сигнале. Для улучшения качества синтезируемой речи в качестве порождающего процесса рационально использовать именно остаток предсказания. Прореживание остатка предсказания в блоке RPE существенно не снижает качество синтезируемой речи. В соответствии с RPE алгоритмом для уменьшения количества передаваемых дискретных отсчетов процесса, он подвергается предварительной обработке. Сегменты выборки на выходе взвешивающего фильтра, состоящие из 39

отсчетов, подвергаются децимации (прореживанию) в соотношении 1:3 (рис. 7.4). В результате получаются три выборки по 13 отсчетов в каждой. Фазы этих выборок сдвинуты друг относительно друга на один отсчет (0.125 мс). Далее производится выбор номера L одной из этих трех последовательностей, обладающей с максимальной энергией

$$E_L = \max \sum_{i=1}^{13} a^2[i]^2.$$

В выбранной последовательности определяется импульс a_m с максимальной амплитудой (масштабный импульс). В каждом 5 мс сегменте на передачу номера последовательности L с максимальной энергией затрачивается 2 бита, а на передачу a_m – 6 бит. a_m кодируется по логарифмическому закону.

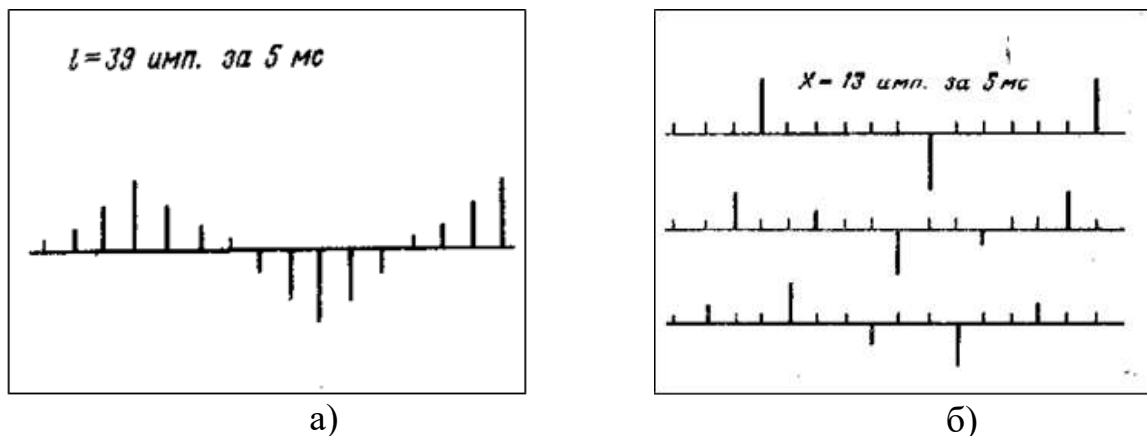


Рисунок 7.4 – Пример децимации и селекции импульсов

Кроме того, передаются амплитуды всех 13 импульсов выбранной последовательности с максимальной энергией. При этом на передачу каждого импульса затрачивается 3 бита. На всю последовательность затрачивается $3 \times 13 = 39$ бит в субкадре или $39 \times 4 = 156$ бит в кадре.

Ниже приводится распределение бит по передаваемым параметрам речевого сигнала в 20 мс кадре: 8 коэффициентов логарифма площади $g[i]$ – 36; 4 значения периода ОТ m – 28; 4 коэффициента предсказания блока LTP $K^2[i]$ – 8; 4 значения L – 8; 4 значения a_m – 24; 4 значения всех 13 импульсов $a^3[t]$ – 156. Итого 260 бит/кадр. При частоте кадров 50 Гц общая информационная скорость составляет $260 \times 50 = 13$ кбит/с. Для синхронизации и защиты от ошибок в канале связи отводится еще дополнительно 3 кбит/с.

Кодер речи сжимает исходный кадр из 160 значений речевого сигнала в кадр размером 260 бит. Секунда речи при этом составляет 1625 байт, мегабайт сжатой информации содержит 10 минут речи.

7.3 Исследование статистических характеристик фонемы в процессе кодирования речи

Ниже представлен анализ преобразования речевого сигнала в процессе его кодирования. Для наглядности и демонстрации изменения статистических характеристик сигнала анализировалась выборка большой длины (1024 отсчета). При исследовании использовался алгоритмический макет, выполненный с помощью разработанной программы в среде MATLAB. На рис. 7.5 представлен сигнал фонемы «У», поступающий на вход блока LPC. Как видно из графика, сигнал гласной является стационарным процессом. В нем присутствует колебания с несколькими различными частотами, что проявляется в форме корреляционной функции и СПМ.

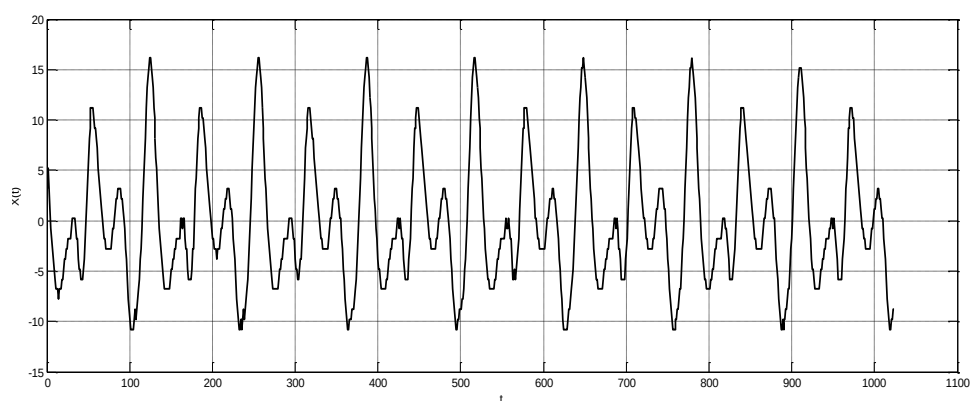


Рисунок 7.5 – Мгновенные значения фонемы «У»

Свойства сигнала наглядно видны по изменению корреляционной функции, представленной на Рисунок 7.6. Как видно из графика период OT составляет 130 отсчетов. В корреляционной функции также присутствуют колебания с различной частотой. Это приводит к росту порядка модели АР и многомодовости параметрической СПМ. Большой интервал затухания корреляционной функции свидетельствует об узкополосности сигнала фонемы «У». Квазипериодичность корреляционной функции характерна для гласных фонем.

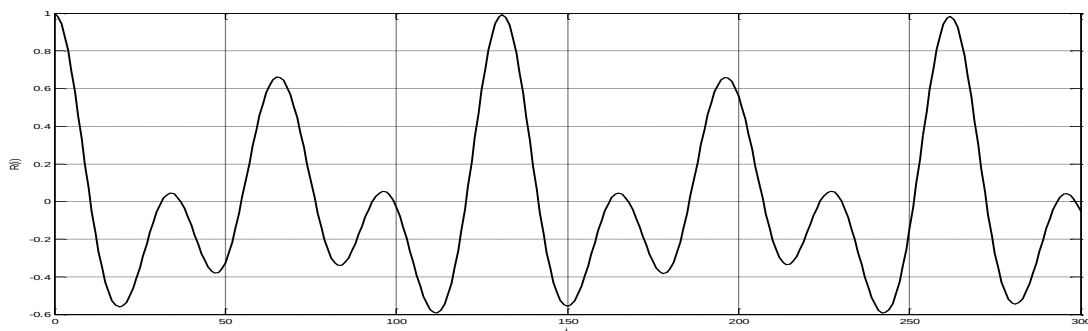


Рисунок 7.6 – Корреляционная функция фонемы «У»

На рис. 7.7 представлена СПМ, полученная преобразованием Фурье от корреляционной функции фонемы. Из графика видно наличие нескольких низкочастотных мод (150 – 400 Гц). Дисперсия оценки значительна, т.к. сглаживающее окно не использовалось.

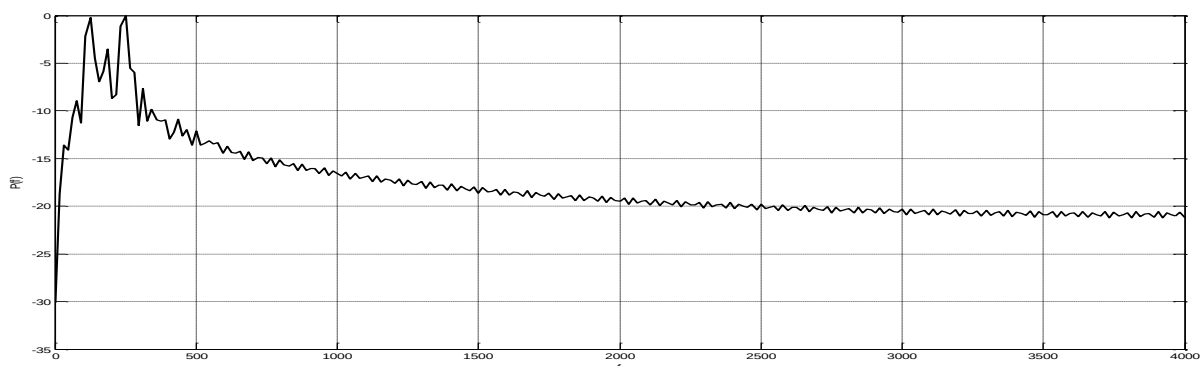


Рисунок 7.7 – СПМ фонемы «У», полученная преобразованием Фурье корреляционной функции.

Параметрическая оценка спектра на основе модели авторегрессии 16 порядка представлена на рис. 7.8. Как видно из графика, параметрический спектр АР (16) фонемы имеет две основные моды на частотах (примерно 200 Гц и 2400 Гц). Сравнение графиков спектра на рис. 7.7 и рис. 7.8 показывает достоинство параметрической оценки спектра, имеющей меньшую дисперсию. Однако для 16 порядка отсутствует разрешение пика в районе 200 Гц. Для повышения разрешающей способности на низких частотах можно использовать оценки СПМ по высоким порядкам АР модели. На рис. 7.9 приведен график СПМ, полученный по модели АР (50). Анализ графика показывает наличие двух мод на низкой частоте. Однако при высоких порядках проявляется недостаток параметрических спектров, заключающийся в появлении ложных пиков небольшой высоты. Поэтому для сложных сигналов с многомодовым спектром и близко расположенными пиками необходимо тщательно подбирать порядок модели.

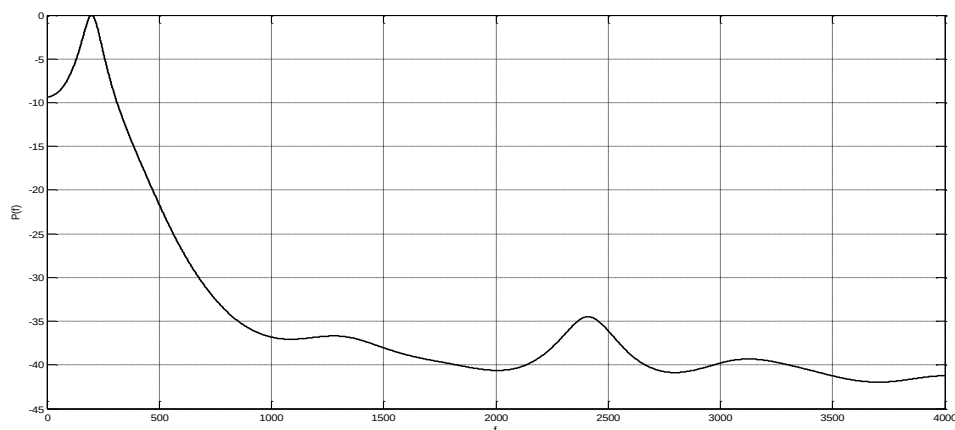


Рисунок 7.8 – Параметрическая СПМ фонемы «У», найденная по модели АР (16)

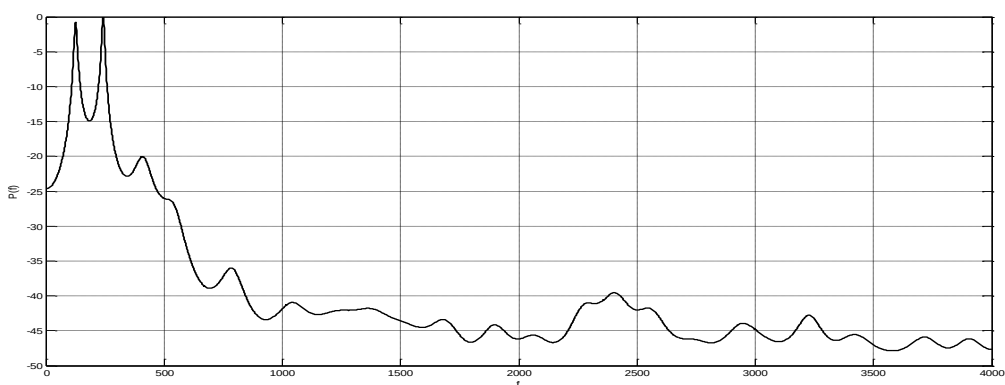


Рисунок 7.9 – Параметрическая СПМ фонемы «У», найденная по модели АР (50)

В процессе кодирования фонемы сигнал подвергается обелению. Восьмизвенный решетчатый фильтр кратковременного предсказания преобразовывает входной коррелированный процесс в квазишумовой сигнал. Поскольку в кодере речи стандарта GSM порядок фильтра не адаптируется к кодируемому сигналу, то на выходе LPC сигнал не является истинным белым шумом. На выходе фильтра получается не ошибка предсказания, а частично коррелированный остаток предсказания. Мгновенные значения остатка предсказания на выходе блока LPC представлены на рис. 7.10. Как видно из графика, процесс является существенно обеленным.

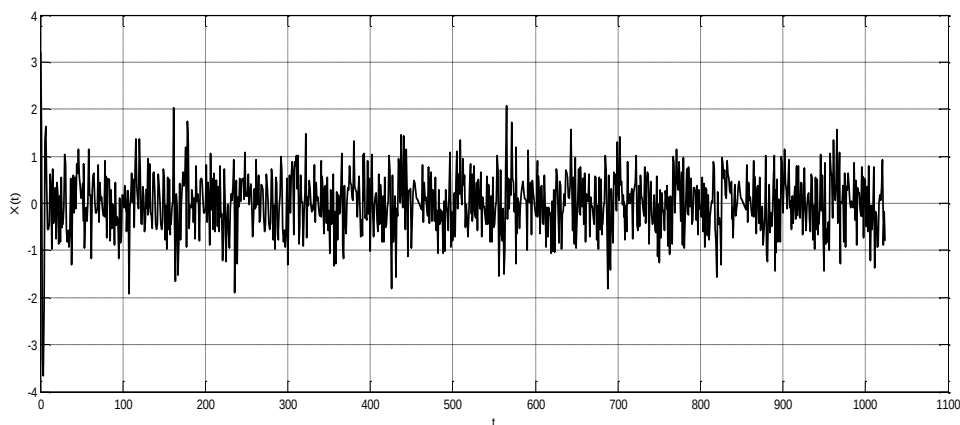


Рисунок 7.10 – Сигнал на выходе блока LPC для фонемы «У»

Частичная коррелированность остатка предсказания фонемы «У» видна на графике корреляционной функции, представленной на рис. 7.11. На близость анализируемого процесса к белому шуму указывает быстрое спадание к нулю корреляционной функции при малых сдвигах. В то же время наличие значительных колебаний корреляционной функции вокруг нулевой линии свидетельствует о наличии слабой корреляции. Наличие пиков для сдвигов 130 и 260 отсчетов указывают на присутствие периода ОТ в корреляционной функции остатка предсказания. Это связано с тем, что восьмизвенным фильтром невозможно обелить сигналы, имеющие колебания с большим периодом (для фонемы «У» это 130 отсчетов).

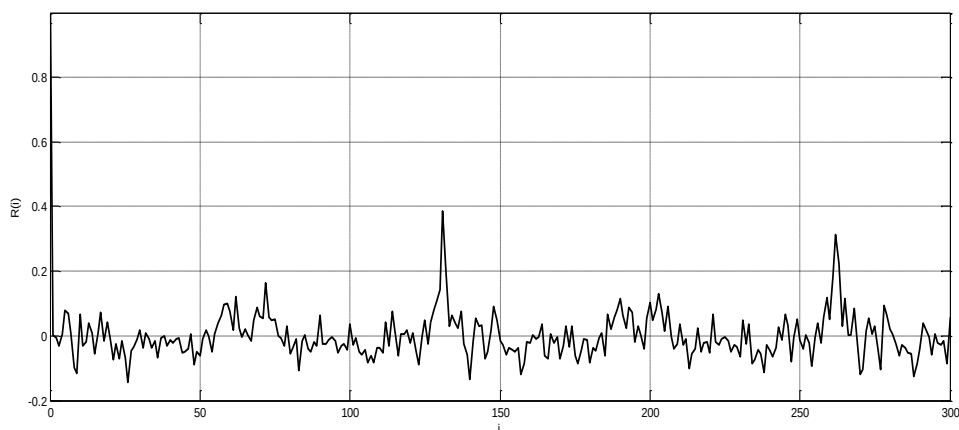


Рисунок 7.11 – Корреляционная функция сигнала на выходе блока LPC для фонемы «У»

Спектр Фурье фонемы «У» на выходе блока LPC представлен на рис. 7.12. Как видно из графика, он несколько отличается от равномерного спектра белого шума. Аналогичный вид (рис. 7.13) имеет СПМ, полученная по модели AP (50).

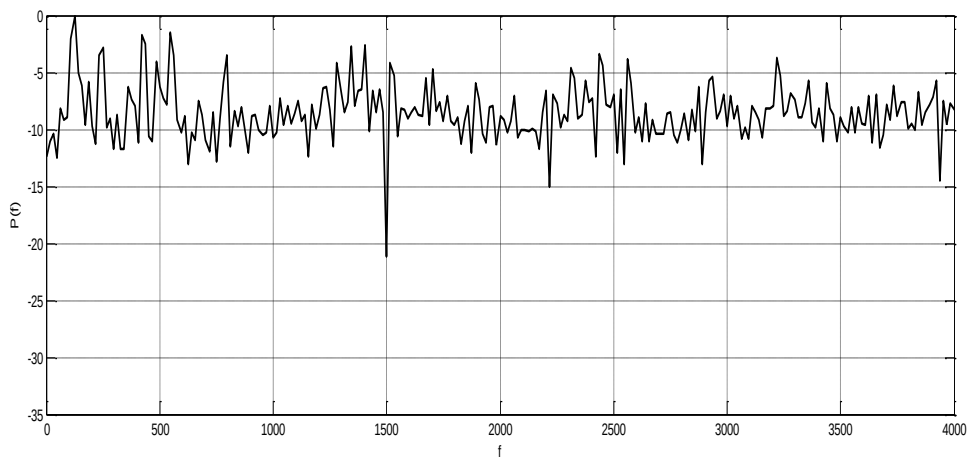


Рисунок 7.12. – Спектр Фурье сигнала на выходе блока LPC для фонемы «У»

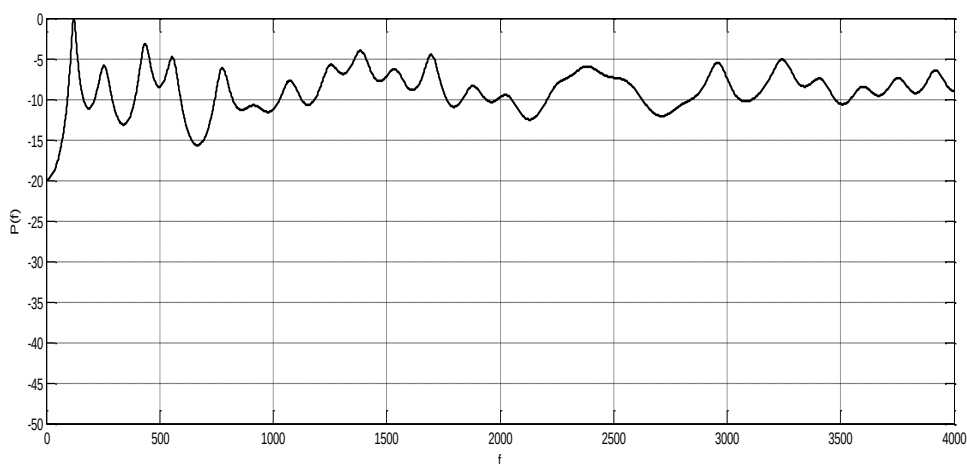


Рисунок 7.13 – Параметрическая СПМ сигнала на выходе блока LPC для фонемы «У», найденная по модели AP (50)

При прохождении остатка предсказания на выходе блока LPC через фильтр долговременного предсказания, происходит его дальнейшее обеление. Это наглядно видно из графика корреляционной функции остатка предсказания на выходе блока LTP, показанного на рис. 7.14. Анализ графика показывает уменьшение величины пиков корреляционной функции на интервалах, кратных периоду ОТ. Однако пики с периодом ОТ остаются еще значительными.

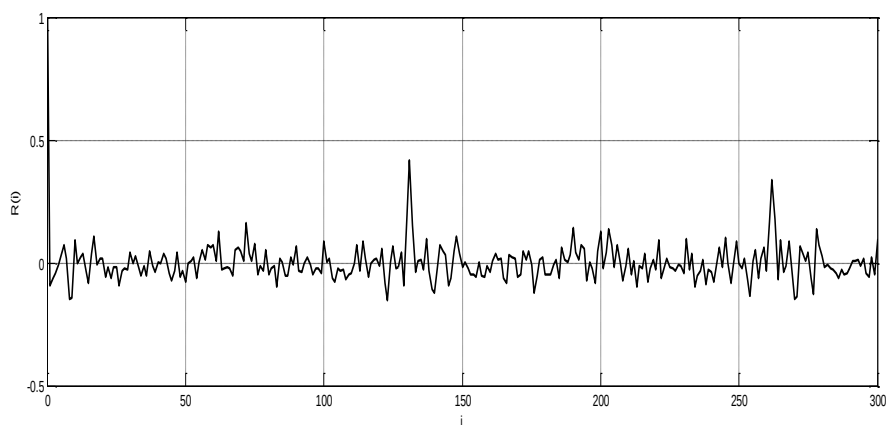


Рисунок 7.14 – Корреляционная функция сигнала на выходе блока LTP для фонемы «У»

Параметрическая оценка спектра остатка предсказания на выходе блока LTP показана на рис. 7.15. Из графика видно наличие слабых пиков, особенно на низких частотах. Отличие остатка предсказания от белого шума требует его передачи после прореживания на приемник мобильной станции абонента.

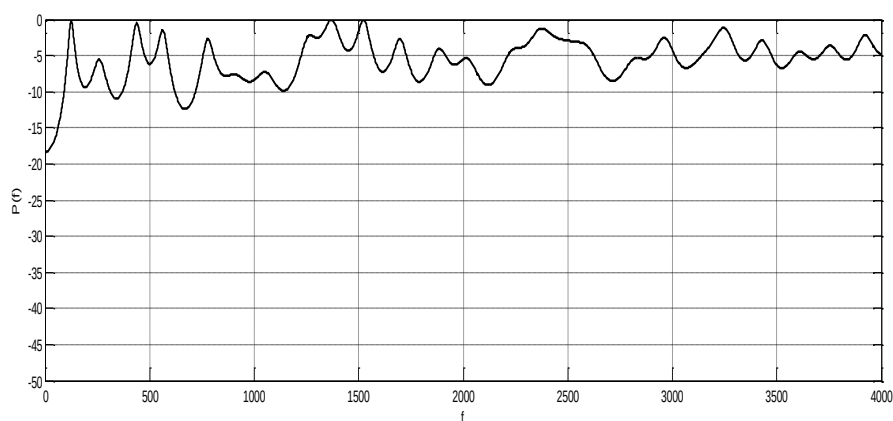


Рисунок 7.15 – Параметрическая СПМ сигнала по модели AP (50) на выходе блока LTP для фонемы «У»

7.4 Структура декодера речи в стандарте GSM

Структурная схема декодера речи в стандарте GSM представлена на рис. 7.16.

В декодере речевой сигнал восстанавливается по откликам последовательности регулярного импульсного возбуждения двухступенчатым синтезирующим фильтром.

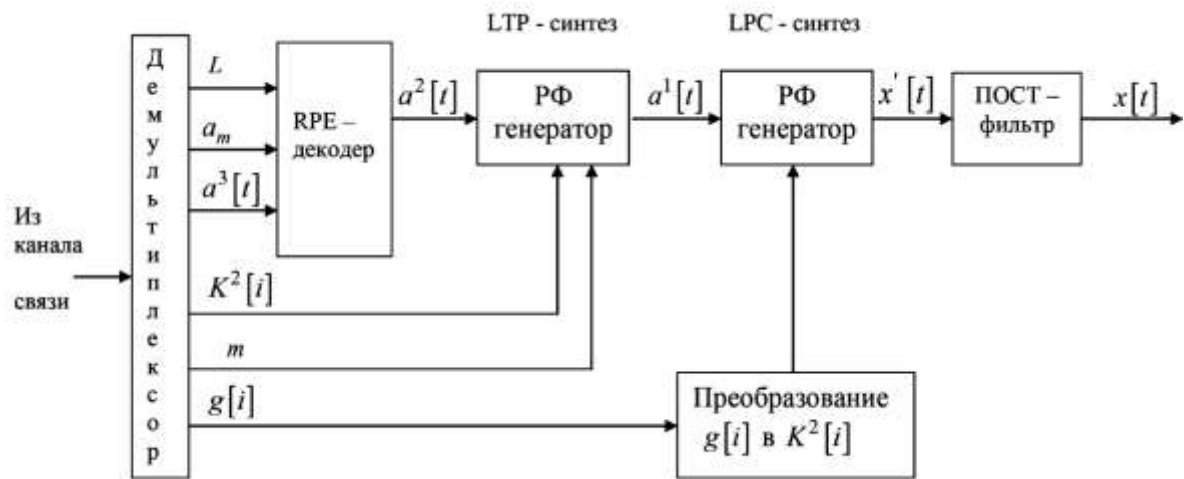


Рисунок 7.16 – Структурная схема декодера речи стандарта GSM.

Рассмотрим кратко структуру и работу декодера – синтезатора речи, показанного на рисунке 7.16. Из канала связи данные с помощью демультимплексора распределяются по различным блокам декодера. На блок RPE декодера поступают номер последовательности L , максимальное значение импульса a_m выборки $a^3[t]$, представляющей собой прореженный остаток предсказания. Здесь отсчеты выборки масштабируются и дополняются нулями в точках децимации. Восстановленная таким образом выборка $a^2[t]$ подается на LTP – синтезатор. Его функции выполняет генератор на трехзвенном РФ. На него подаются с демультимплексора коэффициенты отражения долговременного предсказания $K^2[i]$ и период ОТ m . Синтезированный сигнал $a^1[t]$ с восстановленной долговременной составляющей, подается на блок LPC синтезатора, представляющий собой генератор кратковременного предсказания на РФ восьмого порядка. Коэффициенты отражения на этот РФ поступают с демультимплексора через преобразователь коэффициента логарифма площади $g[i]$ в $K^1[i]$ по формуле

$$K^1[i] = \frac{10^{g[i]} - 1}{10^{g[i]} + 1}.$$

Сигнал $x'[t]$ с выхода LPC – синтезатора для уменьшения шумов квантования подается на постфильтр, на выходе которого получают декодированный (синтезированный) речевой сигнал $x[t]$. Кодеры с линейным предсказанием создают речь хорошего и отличного качества при скоростях передачи 9,6 кбит/с и выше. При скоростях ниже 9,6 кбит/с качество речи становится хуже из-за увеличения шумов квантования. Для уменьшения их влияния осуществляется так называемая постфильтрация, с помощью которой

изменяется спектр речевого сигнала так, что субъективно уменьшает восприятие шума квантования.

Постфильтр получается с помощью LPC – анализатора, в котором содержится инверсный фильтр

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] z^{-i}.$$

Во взвешивающем инверсном фильтре

$$\Phi(\alpha, z) = \sum_{i=1}^p \Phi[i] \alpha^i z^{-i}, \quad 0 < \alpha < 1$$

коэффициент взвешивания α не изменяет положение формантных частот, а изменяет только ширину формантных областей. Взвешенный инверсный фильтр $\Phi(\alpha, z)$ определяет полюса фильтра. Нули постфильтра определяет взвешенный инверсный фильтр вида

$$B(\beta, z) = \sum_{i=1}^n b_i \beta^i z^{-i}, \quad 0 < \beta < 1.$$

При этих обозначениях передаточная характеристика постфильтра примет вид

$$F(z) = \frac{1 + B(\beta, z)}{1 - \Phi(\alpha, z)} = \frac{1 + \sum_{i=1}^n b_i \beta^i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] \alpha^i z^{-i}},$$

где α и β – коэффициенты взвешивания; p и n – порядок взвешивающих фильтров.

Параметры постфильтра обеспечивают необходимый вид спектральной характеристики постфильтра и формирование формантных областей. При одних значениях α области формант обостряются, при других – расширяются. При значениях $\beta > \alpha$ постфильтр имеет провалы в местах расположения формант, т. е. происходит искажение формантной структуры. Поэтому должно соблюдаться условие $\beta < \alpha$.

Постфильтр распределяет шумы квантования таким образом, что их величина становится больше в формантных областях и меньше между формантными областями в спектральных впадинах. Таким путем уменьшается

субъективное восприятие шума. В местах расположения формант шумы квантования маскируются речевым сигналом.

Но одновременно постфильтр искажает речевой сигнал. Параметры постфильтра выбираются так, чтобы не допустить больших искажений речи и по возможности уменьшить шумы квантования. Параметры постфильтра α и β были определены экспериментально прослушиванием речи на выходе кодера. Они оказались равными $\alpha=0.95$, $\beta=0.5\dots0.7$. При этих значениях α и β получено повышение сегментального отношения сигнал/шум на 7...8 дБ и повышение разборчивости речи. Таким образом, постфильтрация позволяет не только улучшить качество звучания, но и повысить разборчивость речевого сигнала на выходе кодера.

Теоретически время задержки речевого сигнала в кодеке равно длительности сегмента и составляет 20 мс. Реальное время задержки, с учетом операций канального кодирования и перемежения, а также физического выполнения рассматриваемых операций, составляет 70 – 80 мс.

Реальные алгоритмы функционирования элементов структуры кодеков речевых сигналов могут несколько отличаться от описанных выше. Недостаток информации по этой теме в отечественной литературе в значительной мере связан с коммерческими вопросами создания и производства аппаратуры цифровой связи. Вместе с тем, материал, изложенный в данной главе не только демонстрирует использование моделей линейного предсказания в современных системах цифровой связи, но и подчеркивает роль РФ в анализе и синтезе речевых сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сукачев З.А. Сотовые сети связи с подвижными объектами: Учебн. пособ. – Одесса: УГАС им. Попова, 2000.
2. Громаков Ю.А. Стандарты и системы подвижной связи. – М.: Мобильные ТелеСистемы – Эко-Трендз, 1997. – 239 с.
3. Ратынский М.В. Основы сотовой связи. – М.: Радио и связь, 2000. – 248 с.
4. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. М.В. Назарова, Ю.Н. Прохорова. – М.: Радио и связь, 1981. – 495 с.
5. Маркел Д.Д., Грэй А.Х. Линейное предсказание речи. – М.: Связь, 1980. – 308 с.
6. Коротаев Г.А. Анализ и синтез речевого сигнала методом линейного предсказания // Зарубежная радиоэлектроника. – 1990. – №3. – С. 31–51.
7. Коротаев Г.А. Некоторые аспекты линейного предсказания при анализе и синтезе речевого сигнала // Зарубежная радиоэлектроника. – 1991. – №7. – С. 3–31.
8. Коротаев Г.А. Эффективный алгоритм кодирования речевого сигнала на скорости 4,8 кбит/с и ниже // Зарубежная радиоэлектроника. – 1996. – №3. С. 57–68.

8 МЕТОДЫ РАСПОЗНАВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

8.1 Введение

Задачам распознавания сигналов в условиях априорной неопределенности уделяется значительное внимание. Такие задачи решались независимо в радиотехнике – как различение сигналов и в кибернетике – как распознавание образов [1–4]. При этом преодоление априорной неопределенности осуществлялось с использованием обучающих выборок распознаваемых сигналов. Характерно, что в обоих случаях затраты на реализацию решающих правил либо вообще не учитывались, либо учитывались в неформализованном виде. Кроме того, обычно полагалось, что число проверяемых гипотез M равно числу распознаваемых сигналов. Однако в реальных прикладных задачах возникают ситуации, когда наблюдаемый сигнал может не принадлежать к числу заданных классов и должен быть отнесен к $(M + 1)$ -му, не заданному в статистическом смысле классу сигналов. Причем его обучающие выборки по ряду причин либо вообще не могут быть получены, либо являются непредставительными. Такие нетрадиционные задачи распознавания названы задачами распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности. В математической статистике близкие условия принятия решений рассматривались для задач проверки простой гипотезы против сложной альтернативы [5]. Известны также подобные задачи классификации аномальных наблюдений [6], обнаружения сигналов с использованием t -статистики Стьюдента [7], а также обнаружения сигналов с применением небайесовского критерия оптимальности, обеспечивающего заданную вероятность правильного обнаружения при минимизации собственной области сигналов [8,9]. Для задач распознавания сигналов предложены подходы, позволяющие в некоторых случаях строить решающие правила распознавания без использования обучающих выборок $(M + 1)$ -го сигнала [10 – 12].

Рассмотрим особенности применения при синтезе алгоритмов распознавания в условиях априорной неопределенности на основе вероятностной модели сигналов в виде процессов авторегрессии, а также с использованием методов многокритериальной оптимизации.

Вначале на основе работ [10 – 12] рассмотрим обобщение решения задачи распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности, когда среди распознаваемых сигналов появляются неизвестных сигналов, для которых отсутствует вероятностное описание и не могут быть получены классифицированные обучающие выборки реализаций.

8.2 Постановка задачи распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности

Предположим, что распознаваемые сигналы представлены конечномерными случайными векторами некоторых статистик $\vec{\varepsilon}$, по реализациям которых принимаются решения. Зададим $(M+1)$ -у гипотезы, которые могут быть сделаны в отношении наблюдаемых сигналов: $H^i, i = \overline{1, M}$ – для заданных сигналов, H^0 – для неизвестных сигналов, объединенных в $(M+1)$ -й класс. Плотности вероятности заданных сигналов $W(\vec{\varepsilon} / H^i, \vec{\alpha}^i), i = \overline{1, M}$ заданы с точностью до случайных векторных параметров $\vec{\alpha}^i, i = \overline{1, M}$, а для $(M+1)$ -го класса плотность вероятности неизвестна.

Заданы также априорные вероятности гипотез $P(H^i) = P_i$, причем $\sum_{i=0}^M P_i = 1$.

Полагается, что заданы обучающие выборки для M сигналов $\vec{\varepsilon}_r, r = \overline{1, n_i}; i = \overline{1, M}$, а обучающая выборка для $(M+1)$ -го сигнала ($i = 0$) отсутствует либо является непредставительной. Такие исходные данные для распознавания сигналов могут быть определены термином «повышенная априорная неопределенность» [10]. Ограничения на структуру задаются в виде требований учета затрат на реализацию распознавания и проектирования системы распознавания сигналов.

Оговоренные условия и ограничения определяют необходимость многокритериальной постановки задачи распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности. С этой целью введем некоторый критерий, определяемый совокупностью показателей, характеризующих качество распознавания сигналов $k_{\gamma}(\vec{\gamma}), k_g(\vec{\gamma})$, а также затраты на реализацию k_{zp} и проектирование системы распознавания k_{3i}

$$k(\vec{\gamma}) = (k_{\gamma}(\vec{\gamma}), k_g(\vec{\gamma}), k_{zp}, k_{3n}) \quad (8.1)$$

где $\vec{\gamma}$ – вектор параметров для заданных сигналов. Необходимо синтезировать структуру системы распознавания сигналов, оптимальных по указанному векторному критерию.

При такой многокритериальной постановке нахождение оптимальных систем распознавания сигналов может осуществляться в несколько этапов. На первом этапе методом последовательных уступок находится решающее правило, определяющее структуру системы распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности, которая оптимальна по сокращенной совокупности показателей $k_{\gamma}(\vec{\gamma}), k_g(\vec{\gamma})$. Затем, на основе полученной структуры с учетом показателя затрат на реализацию, вводится некоторое множество более простых в реализации вариантов структуры систем распознавания при сокращении размерности представления

сигналов путем выбора разных информативных признаков, а также других упрощений полученной структуры системы распознавания. Объем этого множества определяется ограничениями затрат на проектирование системы. В заданном множестве допустимых структур систем распознавания выделяется подмножество нехудших систем, которые являются слабо оптимальными по Парето с учетом введенного векторного критерия.

Вначале будем рассматривать первый этап решения сформулированной многокритериальной задачи распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности.

8.3 Общий вид решающих правил распознавания заданных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов

Найдем структуру решающего правила, оптимального по сокращенной совокупности показателей качества

$$k'(\vec{\gamma}) = (k_g(\vec{\gamma}), k_9(\vec{\gamma})). \quad (8.1, a)$$

Вначале проанализируем вид показателя качества распознавания сигналов $k_g(\vec{\gamma})$ при наличии всей необходимой информации о распознаваемых сигналах. В этом случае показатель $k_g(\vec{\gamma})$ может характеризоваться средним риском

$$R = \sum_{i=0}^M \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^M c_{li} P_i P(G^l / i) = \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^M c_{li} P_i P(G^l / i) + \sum_{i=1}^M c_{0i} P_i P(G^0 / i) + P_0 \sum_{l=0}^M c_{l0} P(G^l / 0), \quad (8.2)$$

где c_{li} – функция потерь; $P(G^l / i)$ – вероятность ошибки в случае принятия решения в пользу l -го сигнала при действии i -го сигнала.

Нерандомизированное решающее правило осуществляет разбиение выборочного пространства сигналов на $(M + 1)$ -ную непересекающуюся область. С учетом этого в выражении (8.2) первое слагаемое – это составляющая среднего риска за счет перепутывания M заданных сигналов между собой, второе слагаемое – за счет отнесения заданных сигналов к $(M + 1)$ -му, третье слагаемое – за счет отнесения $(M + 1)$ -го сигнала к заданным сигналам.

В соответствии с имеющейся априорной информацией можно найти оценки первых двух составляющих в (8.2). Оценить величину третьей составляющей не представляется возможным. Для учета третьей составляющей предлагается ввести скалярный показатель $k_g(\vec{\gamma})$ объема критической области отклонения гипотезы H_0 о действии $(M + 1)$ -го сигнала. Эта область имеет смысл собственной области M заданных сигналов. С содержательной точки

зрения рассматриваемая задача распознавания заключается в принятии решения о действии M заданных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов.

Рассмотрим решение сформулированной задачи для простой функции потерь

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{0, M}. \quad (8.3)$$

Введем в выборочном пространстве статистик сигналов векторную решающую функцию, выделяющую M непересекающихся областей

$$\vec{\phi}(\vec{\varepsilon}) = (\vec{\phi}_1(\vec{\varepsilon}), \dots, \vec{\phi}_i(\vec{\varepsilon}), \dots, \vec{\phi}_M(\vec{\varepsilon})), \quad (8.4)$$

$$\text{где } \vec{\phi}_l(\vec{\varepsilon}) = \begin{cases} 1, & \vec{\varepsilon} \notin G^i, \\ 0, & \vec{\varepsilon} \in G^i, \end{cases} \quad l = \overline{1, M}.$$

Для определения показателя $k_g(\vec{\gamma})$ будем использовать первые две составляющие риска, т.е. контролируемую часть риска в выражении (8.2), которая может быть оценена при имеющейся априорной информации в виде

$$R_k(\vec{\phi}(\vec{\varepsilon})) = 1 - P_0 - \sum_{i=1}^M P_i \int_G \hat{W}(\vec{\varepsilon} / H^i) \phi_i(\vec{\varepsilon}) d\vec{\varepsilon} \quad (8.5)$$

где $\hat{W}(\vec{\varepsilon} / H^i)$, $i = \overline{1, M}$ – оценки плотностей распределения вектора $\vec{\varepsilon}$, найденные по обучающим выборкам заданных сигналов.

Вместо неконтролируемой части риска, определяемой третьей составляющей в выражении (8.2), введем целевой функционал $k_g(\vec{\gamma})$, определяемый объемом собственной области заданных сигналов, где решение принимается в пользу M заданных сигналов

$$V_M(\vec{\phi}(\vec{\varepsilon})) = \int_G d\vec{\varepsilon} \quad (8.6)$$

Введем векторную функцию

$$\hat{W}(\vec{\varepsilon}) = (P_1 \hat{W}(\vec{\varepsilon} / H^1), \dots, P_l \hat{W}(\vec{\varepsilon} / H^l), \dots, P_M \hat{W}(\vec{\varepsilon} / H^M)) \quad (8.7)$$

Тогда решение оптимизационной задачи по сокращенной совокупности показателей качества можно свести к решению следующей вариационной задачи

$$\begin{cases} \max_{G, \vec{\phi}(\vec{\varepsilon})} \int_G W(\vec{\varepsilon}) \vec{\phi}(\vec{\varepsilon}) d\vec{\varepsilon}, \\ \int_G d\vec{\varepsilon} = V_{G_{\partial on}}. \end{cases} \quad (8.8)$$

где $G = \bigcup_{i=1}^M G^i$; $V_{G_{\partial on}}$ – допустимый объем собственной области заданных сигналов.

В выражении (8.8) первый максимум берется по всевозможным собственным областям G в выборочном пространстве, а второй – по разбиениям области G на подобласти G^l , которые определяются соответствующими компонентами векторной решающей функции $\vec{\phi}(\vec{\varepsilon})$. По существу, решение задачи (8.8) обеспечивает максимум вероятности правильного распознавания заданных сигналов при фиксированном объеме их собственной области.

Независимо от конфигурации области G максимум в (8.8) достигается, если компоненты векторной решающей функции $\vec{\phi}(\vec{\varepsilon})$ имеют вид

$$\phi_{onm}(\vec{\varepsilon}) = \begin{cases} 1, & \vec{\varepsilon} \notin G^i : P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i) \geq P_i W(\vec{\varepsilon} / H^l), l = \overline{1, M}, l \neq i; \\ 0, & \vec{\varepsilon} \notin G^i, l = \overline{1, M}, l \neq i. \end{cases} \quad (8.9)$$

Соотношения (8.8) с учетом (8.9) могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} \max_G \int \max_{i=1, M} \{P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i)\} d\vec{\varepsilon}, \\ \int_G d\vec{\varepsilon} = V_{G_{\partial on}}. \end{cases} \quad (8.10)$$

Эта задача на условный экстремум называется изопериметрической. Решая эту задачу методом множителей Лагранжа, можно перейти к следующему решающему правилу:

Если

$$H^0 : \max_{i=1, M} \{P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i)\} < \lambda \quad (8.11, a)$$

то принимается гипотеза H_0 о действии $(M + 1)$ -го сигнала;

Если

$$H^i : \max_{l=1, \overline{M}} \left\{ P_l W(\vec{\varepsilon} / H^l) \right\} \geq \lambda \quad (8.11, б)$$

$$P_i W(\vec{\varepsilon} / H_i) \geq P_l W(\vec{\varepsilon} / H_l), l = \overline{1, M}, l \neq i, \quad (8.11, в)$$

то принимается гипотеза H^i о действии заданного i -го сигнала.

Здесь порог λ определяется из условия

$$\int_{G_{дон}} d\varepsilon = V_{G_{дон}}, \quad \text{когда} \quad \max_{l=1, \overline{M}} \left\{ P_l W(\vec{\varepsilon} / H^l) \right\} \geq \lambda. \quad (8.11, г)$$

Решающее правило является оптимальным по сокращенной совокупности показателей (8.1, а). Заметим, что при нахождении структуры этого решающего правила не использовалась информация о плотности распределения $(M+1)$ -го сигнала и не требовалась его обучающая выборка.

Постановка и решение рассмотренной задачи – это формализация требования содержательного характера о необходимости распознать M заданных сигналов и отнести в $(M+1)$ -й класс все остальные сигналы, информация о которых недостаточна для их распознавания. Нетрудно показать, что рассмотренная выше общая постановка задачи распознавания сигналов в условиях повышенной неопределенности для других видов функции потерь может привести к решениям, которые уже встречались в литературе.

В частности, рассмотрим решение задачи для случая, когда функция потерь имеет вид

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, M}, \\ 0, & i = 0, \quad j = 0, \\ 1, & i = \overline{1, M}, \quad j = 0, \\ 1, & i = 0, \quad j = \overline{1, M}. \end{cases} \quad (8.12, а)$$

При этом вводятся потери лишь за счет перепутывания $(M+1)$ -го сигнала с M заданным (безразлично, с каким конкретно). В этом случае приходим к различению двух гипотез: H^i – о действии одного из M заданных сигналов; H^0 – о действии $(M+1)$ -го неизвестного сигнала. При указанной функции потерь аналогично предыдущему случаю можно получить следующее решающее правило:

$$\begin{aligned}
H^0 : \sum_{i=1}^M P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i) &\leq \lambda, \\
H^i : \sum_{i=1}^M P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i) &> \lambda.
\end{aligned} \tag{8.12, б}$$

Здесь решается задача обнаружения (селекции) M заданных сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности. Нетрудно видеть, что это же правило можно использовать и для решения иногда встречающейся на практике противоположной задачи – обнаружения новых (неизвестных) сигналов.

При реализации на практике решающих правил (8.11) и (8.12) необходимо в режиме обучения по классифицированным выборкам заданных сигналов оценить неизвестные векторные параметры $\vec{\alpha}^i$ плотностей распределения заданных сигналов $W(\vec{\varepsilon} / H^i, \vec{\alpha}^i), i = \overline{1, M}$, а также пороговые значения λ . Для нахождения порогового значения λ следует решать уравнение (8.11, г), что может оказаться неудобным на практике. Эти трудности могут быть преодолены при использовании квазиоптимальных решающих правил, в которых решение принимается в два этапа: сначала производится обнаружение (селекция) заданных сигналов, а затем, в случае принятия решения в пользу заданных сигналов, осуществляется их распознавание. В этом случае решающее правило распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных имеет следующий вид:

– если хотя бы для одного значения i ($i = \overline{1, M}$) выполняется неравенство

$$P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i, \vec{\alpha}^i) \geq \lambda_i, \tag{8.13, а}$$

то принимается решение в пользу заданных сигналов;

– если же при всех значениях $i = \overline{1, M}$:

$$P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i, \vec{\alpha}^i) < \lambda_i, \tag{8.13, б}$$

то принимается решение в пользу $(M + 1)$ -го неизвестного сигнала.

На втором этапе при выполнении условия (8.13, а) распознаются заданные сигналы согласно следующему решающему правилу:

$$P_i W(\vec{\varepsilon} / H^i, \vec{\alpha}^i) \geq P_l W(\vec{\varepsilon} / H^l, \vec{\alpha}^l), \quad i = \overline{1, M}, \quad l \neq i. \tag{8.13, в}$$

Для задачи обнаружения (селекции) заданных сигналов решающее правило определяется соотношениями (8.13, а) и (8.13, б). Это квазиоптимальное решающее правило основано на построении собственных областей в отдельности для каждого

из M заданных сигналов. При этом пороговые значения λ^i в решающем правиле (8.13) определяются отдельно для каждого сигнала. Геометрический смысл распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных поясняется на рис. 8.1.

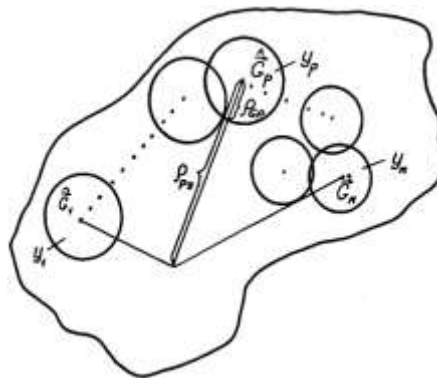


Рисунок 8.1 – Геометрический смысл решения задачи распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных сигналов

Рассмотренное общее решение задачи распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности включает как частные случаи известные решения таких задач. Подобного типа задача обнаружения рассматривалась в работе [9], где предлагалось строить собственную область заданного сигнала для случая $M = 1$. В работе [8] рассмотрено решение задачи обнаружения M заданных сигналов при наличии новых неизвестных классов для частного случая гауссовых распределений сигналов. В основу полученного решения положена гипотеза компактности. Предложено охватить ядро многомерного распределения каждого заданного сигнала оболочкой, выбираемой из заданной вероятности правильного обнаружения каждого сигнала. В работе [10] рассмотрена задача распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных также для частного случая представления сигналов оценками спектра мощности в базисе Карунена–Лоэва. В работе [11] решается задача распознавания образов при наличии новых классов. Решение получено методами байесовской теории в предположении равномерного распределения новых (неизвестных) классов. Решающее правило в конечном виде такое же, как и без использования информации об $(M + 1)$ -м классе.

Остановимся на особенностях выбора пороговых значений в решающих правилах (8.11) – (8.13), что очень важно при их практическом использовании [13]. В перечисленных работах этому вопросу не уделяется должного внимания.

8.4 Выбор пороговых значений в решающих правилах распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных сигналов

Поскольку оценивание векторных параметров плотностей распределений $\vec{\alpha}^i$ по обучающим выборкам сигналов не вызывает принципиальных трудностей, то рассмотрим особенности практического

оценивания пороговых значений λ в решающих правилах (8.11) – (8.13). Можно показать, что при сформулированных выше условиях решения задачи распознавания с использованием решающего правила (8.11) пороговые значения λ находятся из уравнения

$$\sum_{j=1}^M P_j \int_G I \left[\lambda - \max_{l=1, M} P_l W(\vec{\varepsilon} / H^i) \right] \times$$

$$\left[\max_{l=1, M} P_l W(\vec{\varepsilon} / H^i) - P_l W(\vec{\varepsilon} / H^i) \right] W(\vec{\varepsilon} / H^i) d\vec{\varepsilon} = \Delta P_0 \quad (8.14)$$

где $I[\cdot]$ – индикаторная функция в виде

$$I[d] = \begin{cases} 1, & d \geq 0, \\ 0, & d < 0, \end{cases}$$

ΔP_0 – уступка на увеличение вероятности ошибки распознавания M сигналов за счет принятия решения в пользу $(M + 1)$ -го сигнала.

Для нахождения порогового значения λ из условия (8.14) может быть использован метод интегрирования Монте–Карло с использованием обучающей выборки M заданных сигналов $\left\{ \vec{\varepsilon}_r^i, r = \overline{1, n_i}; i = \overline{1, M} \right\}$. Практически решение уравнения (8.14) заключается в следующем. Вычисляются значения решающих статистик для всех реализаций обучающей выборки, то есть значения $\rho_r = P_i W(\vec{\varepsilon}_r^i / H^i, \vec{\alpha}^i)$, $r = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, M}$. Затем составляется и ранжируется по возрастанию массив из значений статистик для правильно распознанных реализаций обучающей выборки. В ранжированном ряду определяется значение λ , соответствующее задаваемой уступке ΔP_0 на увеличение средней вероятности ошибочного распознавания заданных сигналов за счет принятых решений в пользу неизвестных сигналов.

Для частного случая, когда собственные области строятся в отдельности для каждого из M заданных сигналов и решающее правило распознавания имеет вид (8.13), пороговые значения $\lambda^i, i = \overline{1, M}$ могут быть определены следующим образом. Для каждой реализации обучающей выборки i -го сигнала оцениваются значения $\rho_r^i = P_i W(\vec{\varepsilon}_r^i / H^i, \vec{\alpha}^i)$, $r = \overline{1, n_i}$. Пороговые значения λ^i можно

определить из условия $P(G^i / i) = \int_0^{\lambda_i} W^i(\rho) d\rho$. Оценки неизвестных плотностей в общем случае могут быть найдены при их аппроксимации

в следующем виде:

$$W^i(\rho) = \sum_{k=0}^m c_k^i \varphi_k(\rho), \quad (8.15)$$

где $c_k^i = \frac{1}{n_i} \sum_{r=1}^{n_i} \varphi_k(\rho_r)$ – оценки коэффициентов разложения, определяемые по обучающим выборкам. В качестве $\varphi_k(\rho)$ в данном случае можно использовать функции на основе полиномов Лаггера $L_k(\rho)$ с интервалом ортогональности $[0, \infty)$ относительно весовой функции $\exp(-\rho/2)$

$$\varphi_k(\rho) = \frac{\exp(-\rho/2) L_k(\rho)}{k!}. \quad (8.16)$$

В частном случае гауссовых плотностей распределений заданных сигналов распределения решающих статистик ρ имеют χ^2 -распределение. При этом пороговые значения λ^i , $i = \overline{1, M}$ для решающего правила (8.13) могут быть приближенно найдены из условия $\lambda^i = \sqrt{L} + b^i$, где L – размерность вектора $\vec{\varepsilon}$, b^i – константа, определяющая вероятности обнаружения заданных сигналов $P(G^i/i)$. Например, при $b^i = 2$ обеспечивается значение $P(G^i/i) = 0.997$, при $b^i = 1$ – значение $P(G^i/i) = 0.93$.

8.5 Алгоритмы распознавания случайных сигналов на основе авторегрессионной модели

Приведем особенности решающих правил распознавания случайных сигналов при их описании вероятностной моделью в виде авторегрессионных (АР) процессов [12 – 19]. Рассмотрены случаи, когда распознаваемые сигналы имеют гауссовское и негауссовское распределение. Кроме того, рассмотрены также случаи, когда на распознавание кроме заданных в вероятностном смысле сигналов предъявляются неизвестные сигналы, вероятностное описание которых отсутствует и отсутствуют их обучающие выборки. Приведены особенности получения алгоритмов распознавания сигналов, оптимальных по совокупности показателей эффективности и быстродействия распознавания.

Полагается, что распознаванию подлежит M случайных сигналов $x^i[t]$, $i = \overline{1, M}$, заданных на конечном интервале времени $(0, T)$ вектором, определяемым как совокупность равноотстоящих отсчетов $x[l]$, $l = \overline{1, L}$. Сигналы различаются на уровне корреляционных функций, которые априори неизвестны, однако задается классифицированная обучающая выборка сигналов

$\left\{ \vec{x}_r^i | l, l = \overline{1, L}; r = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, M} \right\}$. Это классическая постановка задачи

распознавания сигналов в условиях априорной неопределенности. Предположим, что для их вероятностного описания сигналов используется АР модель, которая определяется процессами авторегрессии. Введем показатель эффективности распознавания случайных сигналов через средний риск $k_9(s) = \rho(s)$, который определяется аналогично (8.2). Быстродействие алгоритма распознавания будем определять затратами времени на распознавание, которое в общем случае включает время наблюдения сигналов $T_n = L\Delta t$ (Δt – интервал дискретизации сигналов по времени), а также время на принятие решений T_n с помощью выбранного алгоритма распознавания. При использовании быстродействующих вычислительных средств, реализующих алгоритм распознавания, обычно выполняется условие $T_n \gg T_n$. Полагая Δt – фиксированным, введем показатель быстродействия в виде $k_6(s) = L$.

Очевидно, что введенные показатели качества взаимосвязаны и конкурируют (антагонистичны) между собой. Поэтому невозможно добиться потенциально наилучших значений каждого из показателей в отдельности. При сформулированных условиях решением поставленной оптимизационной задачи является согласованный оптимум по Парето введенных показателей качества. Найденный оптимум в критериальном пространстве (пространстве показателей качества $(k_9(s), k_6(s))$) определяет многомерные потенциальные характеристики (МПХ) алгоритмов распознавания сигналов. Каждой точке МПХ соответствует алгоритм распознавания из множества Парето–оптимальных алгоритмов распознавания сигналов.

При априорной неопределенности для решения поставленной задачи может быть использован адаптивный байесовский подход. В случае гауссовых плотностей распределений сигналов он приводит к асимптотически оптимальному алгоритму распознавания, определяемому квадратичным классификатором [13]

$$i = \arg \min \left[\left(\vec{x} - \vec{\mu}^k \right)^{tr} \hat{R}_k^{-1} \left(\vec{x} - \vec{\mu}^k \right) - \ln \frac{P_k}{\hat{R}} \right], k = \overline{1, M} \quad (8.17)$$

где $\vec{\mu}^k, \hat{R}_k, |\hat{R}_k|$ – оценки соответственно среднего вектора, корреляционной матрицы и ее определителя, полученные по обучающей выборке сигналов.

Основная трудность при реализации квадратичного классификатора (8.17) состоит в вычислении квадратичных форм. При большой размерности исходного представления сигналов L их вычисление потребует значительных затрат, что при ограниченности вычислительных ресурсов может затруднить практическую реализацию алгоритмов распознавания сигналов в реальном масштабе

времени. Кроме того, при этом возникает необходимость накопления обучающих выборок сигналов большого объема, поскольку при вычислении обратных корреляционных матриц должно выполняться условие $n_i > L$. Поэтому в задачах распознавания образов вводится этап сокращения размерности представления сигналов за счет выбора небольшого числа информативных признаков [1 – 4]. Рассмотрим особенности выбора информативных признаков и построения решающих правил, определяющих алгоритмы распознавания сигналов в рамках АР модели.

8.5.1 Особенности описания распознаваемых сигналов вероятностной моделью в виде АР модели.

Линейная АР модель случайного сигнала описывается рекуррентным уравнением [21 – 23]

$$x^i[j] = \sum_{l=1}^{p_i} \Phi^i[l] x^i[j-l] + \sigma_a^i a^i[j], \quad j = \overline{1, L}, \quad (8.18)$$

где $\Phi^i[l]$, $l = \overline{1, p_i}$ – коэффициенты АР модели i -го сигнала; $a[j]$ – независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; p_i – порядок модели АР i -го сигнала; $(\sigma_a^i)^2$ – дисперсия ошибки предсказания i -го сигнала.

Первое слагаемое в (8.18) называется предсказанием или оценкой j -го отсчета сигнала, а величина $\sigma_a^i a^i[j] = (x^i[j] - \sum_{l=1}^{p_i} \Phi^i[l] x^i[j-l])$ – ошибкой предсказания j -го отсчета сигнала при использовании АР модели p_i -го порядка. Построение АР модели i -го случайного сигнала сводится к нахождению порядка и параметров модели p_i , $\Phi^i[l]$, $(\sigma_a^i)^2$. Для этого применяются разные способы их оценки [22, 23]. Требуемые при этом оценки коэффициентов корреляции сигналов находятся по обучающим выборкам сигналов. Порядок модели p_i определяется по различным критериям. Однако следует отметить, что при решении задач распознавания порядок модели АР выбирается в первую очередь исходя из требуемого качества распознавания сигналов.

Дисперсии ошибок предсказания $(\sigma_{a_j}^i)^2$ для АР модели p_i -го порядка находятся по реализации сигнала из соотношения

$$(\sigma_a^i)^2 = \frac{1}{L - p - 1} \sum_{j=p+1}^L \left[x^i[j] - \sum_{l=1}^{p_i} \Phi^i[l] x^i[j-l] \right]^2. \quad (8.19)$$

Соответствующие коэффициенты АР для наблюдаемого сигнала

минимизируют дисперсию ошибки предсказания.

Существует соотношение для параметрического оценивания спектральной плотности сигналов через параметры АР, которое при коротких реализациях сигналов обладает преимуществом перед традиционными способами оценивания спектральной плотности сигналов. Сигналы, представляемые АР моделью, однозначно описываются дробно рациональной спектральной плотностью в виде [22, 23]

$$\left| P_x^i(f) \right|^2 = \frac{(\sigma_a^i)^2}{\left| 1 - \sum_{l=1}^{p_i} \Phi^i[l] \exp(-j 2 \pi f l \Delta t) \right|^2}, \quad f = \overline{1, 2 / \Delta t}. \quad (8.20)$$

Из этого соотношения видно, что оценка спектральной плотности сигнала полностью определяется коэффициентами авторегрессии $\Phi^i[l]$ и дисперсией ошибки предсказания $(\sigma_a^i)^2$.

Нетрудно видеть, что процесс АР является частным случаем линейного случайного процесса с дискретным временем, формируемым на выходе линейного АР фильтра при порождающем процессе в виде дискретного белого шума [20]. Отсчеты АР процесса получаются путем взвешенного суммирования p предыдущих отсчетов процесса с добавлением отсчетов белого шума. Взвешивающие коэффициенты равны коэффициентам АР, а число звеньев фильтра – порядку модели АР.

Поиски эффективных алгоритмов вычисления коэффициентов АР привели к построению решетчатых фильтров (РФ). Параметрами РФ являются коэффициенты отражения, которые однозначно связаны с коэффициентами АР. Число звеньев РФ равно порядку модели АР. При использовании РФ случайные сигналы представляются моделью, аналогичной АР модели [23]

$$x^i[j] = - \sum_{l=1}^{p_i} K^i[l] d_{l-1}^i[j-1] + \sigma^i a^i[j], \quad (8.20, a)$$

где $d_{l-1}^i[j-1]$ – ошибка обратного предсказания в $(l-1)$ -м звене; $K^i[l]$ – коэффициенты отражения РФ для i -го сигнала.

Отличие моделей (8.18) и (8.20, а) состоит в том, что модель (8.20, а) использует регрессию на предыдущие ошибки обратного предсказания $d_{l-1}^i[j-1]$. При этом коэффициентами регрессии являются коэффициенты отражения РФ. Несмотря на то, что в основе АР фильтров и РФ лежит одна и та же вероятностная модель, между ними есть ряд различий, существенных с практической точки зрения. В частности, РФ менее чувствительны к шуму округления при их реализации средствами вычислительной техники. На качество работы РФ

менее влияют погрешности квантования по сравнению с АР фильтрами.

Аналитическое выражение для многомерной плотности вероятности гауссовых случайных процессов, полученное через параметры АР модели определяется выражением [22]

$$W(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} \sigma^{L-p} |R_p|^{1/2s}} \exp(-S(\vec{x})), \quad (8.21)$$

$$S(x) = (\vec{x}_p - \vec{m}_p)^{tr} R_p^{-1} (\vec{x}_p - \vec{m}_p) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{l=p+1}^L \left[x[l] - \mu_k - \sum_{j=1}^p \Phi[j] (x[l-j] - \mu_k) \right]^2, \quad (8.22)$$

где $\vec{x}_p = (x[1], \dots, x[p])^{tr}$, $\vec{m}_p = (\mu[1], \dots, \mu[p])^{tr}$, $R_p, \vec{\mu}$ – соответственно вектор наблюдения, средний вектор, корреляционная матрица и математическое ожидание сигнала.

Видно, что плотность распределения полностью определяется корреляционной матрицей размерности $p \times p$, а также параметрами АР модели сигнала. Для многих практических задач, когда порядок модели p оказывается небольшим (единицы, десятки) при значениях L , составляющих сотни и тысячи, может быть использовано приближенное выражение для плотности распределения. При этом в выражении (8.21) можно пренебречь первым слагаемым, представляющим собой квадратичную форму. Тогда плотность распределения будет определяться только ошибкой предсказания, вычисляемой для заданных параметров АР модели сигналов. Нетрудно видеть, что при этом существенно упрощается практическая реализация алгоритмов распознавания.

Таким образом, из анализа приведенных особенностей АР модели следует, что с точки зрения описания гауссовых сигналов она является полной. Поэтому в качестве информативных признаков распознаваемых сигналов могут быть выбраны коэффициенты АР либо коэффициенты отражения РФ. При заданном виде порождающего процесса эти параметры наряду с дисперсией ошибки предсказания полностью определяют вероятностное описание распознаваемых сигналов в рамках АР модели.

Получение таких признаков сводится к нахождению оценок коэффициентов АР (либо коэффициентов отражения) по наблюдаемой реализации сигнала $x[l]$, $l = \overline{1, L}$. В частности, для этого следует оценить корреляционную функцию сигнала, и вычислить коэффициенты АР известными способами. В обычном случае, когда $p \ll L$, использование таких информативных признаков позволяет существенно сократить размерность описания сигналов. Следует отметить, что такое описание удобно использовать на практике для экономного хранения больших объемов выборок сигналов. При необходимости, реализации сигналов могут быть просто восстановлены

с помощью рекуррентного соотношения (8.20).

При распознавании негауссовых сигналов пространство признаков, полученных по АР модели (8.20) будет неполным, поскольку эта модель описывает сигналы только в рамках корреляционной теории, без учета его негауссовых свойств. Хотя корреляционная функция негауссова сигнала содержит основную информацию о случайном сигнале, использование моментных или куммулянтных функций позволяет учитывать более сложные статистические связи, чем корреляционные. Учет статистических связей высших порядков может повысить точность распознавания негауссовых сигналов, которые плохо распознаются по признакам, полученным по функции корреляции.

Поэтому необходимо использовать вероятностную модель, параметры которой определяются моментными или куммулянтными функциями и могут быть использованы в качестве информативных признаков. В качестве такой модели можно использовать обобщенную АР модель негауссовых случайных сигналов. Такая модель основана на использовании многомерных моментных или куммулянтных функций. Правда, ее использование связано с определенными трудностями, вызванными существенным ростом размерности пространства признаков.

Уравнение обобщенной АР модели совпадает по виду с (8.20), однако отсчеты порождающего процесса в такой модели являются негауссовыми случайными величинами с нулевой моментной функцией некоторого r -го порядка. Если параметры обобщенной АР модели находятся по значениям моментной функции r -го порядка негауссова сигнала, то такая модель называется обобщенной АР моделью r -го ранга.

В частности, АР модель третьего ранга описывается рекуррентным уравнением

$$x[l] = \sum_{i=1}^p \Phi_3[i]x[l-i] + a_3[l], \quad (8.23, a)$$

где $\Phi_3[i]$ – коэффициенты АР модели третьего ранга, p – порядок АР модели третьего ранга, $a_3[t]$ – ошибка предсказания АР модели третьего ранга. Аналогично записывается АР модель четвертого ранга

$$x[l] = \sum_{i=1}^p \Phi_4[i]x[l-i] + a_4[l]. \quad (8.23, б)$$

Коэффициенты обобщенной АР модели определяют параметры линейной системы, описываемой АР моделью, с помощью которой можно получить моментную функцию негауссова сигнала по моментной функции негауссова белого шума на входе системы. Тогда вектор коэффициентов обобщенной АР модели характеризует линейное преобразование многомерных моментных функций, что значительно понижает размерность признаков.

Коэффициенты обобщенной АР модели находятся на основе статистических средних произведений отсчетов сигналов с соответствующими сдвигами. Параметры АР модели третьего ранга находятся из уравнения

$$m_3[j, j-l] - \sum_{i=1}^p \Phi_3[i] m_3[j-i, j-l] = 0, \quad 1 \leq j \leq p, l \geq 0$$

по моментным функциям третьего порядка негауссова сигнала. Для нахождения коэффициентов АР четвертого ранга используется уравнение

$$m_4[j, j-l, j-k] - \sum_{i=1}^p \Phi_4[i] m_4[j-i, j-l, j-k] = 0, \\ 1 \leq j \leq p, l \geq 0, k \geq 0.$$

Аналогично можно записать уравнение для произвольного ранга обобщенной АР модели. Набор векторов коэффициентов АР каждого ранга дает более полную модель АР негауссова сигнала и может служить дополнительными признаками при их распознавании. Теория обобщенных АР моделей изложена в гл. 13.

8.5.2 Парето–оптимальные алгоритмы распознавания сигналов на основе авторегрессионной модели.

Многокритериальный подход к решению задачи распознавания сигналов отличает данные результаты от других работ, в которых рассматриваются авторегрессионные алгоритмы распознавания случайных сигналов [13]. Представляет интерес аналитическое решение поставленной задачи синтеза Парето–оптимальных алгоритмов распознавания случайных сигналов в рамках АР модели. Для решения задачи выберем метод рабочих характеристик, суть которого сводится к поиску алгоритмов распознавания сигналов s путем оптимизации одного из показателей качества при фиксированных, но произвольных значениях остальных показателей.

Решение поставленной задачи синтеза Парето–оптимальных алгоритмов распознавания случайных сигналов S_{onm} означает поиск оптимума функционала, определяемого средним риском на множестве допустимых алгоритмов распознавания S_{don} при ограничениях типа равенства

$$S_{onm} = \arg \text{extr} \{ k_3(s) = \phi[k_6(s)], k_6(s) = k_3 \}, \\ s \in S_{don} \quad (8.24)$$

где k_3 – фиксированные, но произвольные значения показателя затрат.

Взаимосвязь показателей качества $k_3(s) = \phi[k_6(s)]$ определяется через

функционал среднего риска, в котором плотности распределения сигналов находятся из соотношений (8.21), (8.22). При фиксированных, но произвольных значениях $k_{\sigma}(s) = k_3$ оптимизационная задача (8.24) эквивалентна некоторому множеству задач скалярной минимизации среднего риска при разных значениях L . Их решения определяют множество Парето–оптимальных вариантов алгоритмов распознавания, каждому из которых в критериальном пространстве соответствует своя точка на многомерных потенциальных характеристиках.

В частном случае простой функции потерь, когда средний риск определяется средней вероятностью ошибочного распознавания, решением указанной задачи является известный алгоритм распознавания

$$l = \arg \max_{i=1, M} \left\{ P_i W(\vec{x} / i) \right\}, \quad (8.25)$$

При разных значениях размерности L вектора $\vec{x}$ структура алгоритма не изменяется, а обеспечивается лишь другое потенциальное значение средней вероятности ошибочного распознавания.

С учетом приближенного соотношения (8.21) для плотности распределения сигналов структура алгоритма распознавания (8.24) конкретизируется и определяется следующей системой неравенств

$$\frac{S_k(\vec{x})}{2\sigma_k^2} - \frac{S_i(\vec{x})}{2\sigma_i^2} + \ln \frac{\sigma_i^{p_i L} |R_i^{p_i}|^{\frac{1}{2}}}{\sigma_k^{p_k L} |R_k^{p_k}|^{\frac{1}{2}}} \geq \ln \frac{P_k}{P_i}, \quad k = 1, M, \quad k \neq i. \quad (8.26)$$

Здесь $S_k(\vec{x})$ – определяется выражением (8.23), вычисленным при подстановке параметров АР модели k -го сигнала.

Когда размерность представления сигналов L значительно больше P_k , можно воспользоваться приближенным выражением для плотности вероятности. Так, если пренебречь первым слагаемым в (8.20), можно получить более простое решающее правило

$$E_k(\vec{x}) - E_i(\vec{x}) + \ln \frac{(2\pi\sigma_i)^{p_i - L}}{(2\pi\sigma_k)^{p_k - L}} \geq \ln \frac{P_k}{P_i}, \quad k = \overline{1, M}, \quad k \neq i. \quad (8.27)$$

Здесь

$$E_k(\vec{x}) = \frac{1}{2\sigma_k^2} \sum_{l=p+1}^L \left[x[l] - \mu_k - \sum_{j=1}^p \Phi[j] (x[l-j] - \mu_k) \right]^2 \quad (8.27, a)$$

Решающее правило (8.27) фактически реализует алгоритм распознавания по минимуму среднеквадратической ошибки предсказания.

В полученных алгоритмах полагается, что параметры моделей для распознаваемых сигналов заданы. При неизвестных параметрах моделей можно получить их оценки через корреляционные функции, найденные по классифицированным обучающим выборкам сигналов. Оценки параметров АР модели могут быть найдены, в частности, из уравнения Юла – Уокера либо из рекуррентной процедуры Левинсона – Дарбина. При ограниченной длительности реализации сигнала, полученные оценки коэффициентов отражения являются случайными величинами, дисперсия которых существенно снижается с увеличением длительности используемых при этом реализации сигнала. Эти свойства оценок могут быть использованы при построении алгоритмов распознавания сигналов по оценкам параметров АР модели.

8.6 Алгоритмы распознавания сигналов по оценкам параметров авторегрессионной модели

Остановимся на выборе решающих правил распознавания для случая использования в качестве информативных признаков сигналов коэффициентов отражения РФ и коэффициентов АР, определяемых АР моделью [14 – 16].

Как показали экспериментальные исследования, распределение оценок коэффициентов отражения РФ может быть аппроксимировано гауссовым распределением с p – мерной плотностью вероятности

$$W(\vec{K}/\vec{m}_i, R_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^p \frac{1}{\sqrt{|R_i|}^p} e^{-\frac{1}{2}(\vec{K}-\vec{m}_i)^T R_i^{-1}(\vec{K}-\vec{m}_i)} \quad (8.28)$$

где $\vec{m}_i, R_i$ – математическое ожидание и матрица корреляционных моментов оценок коэффициентов отражения i -го сигнала, которые вычисляются по n_i реализациям обучающей выборки из выражений:

$$\vec{m}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \vec{K}_j^i, \quad R_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\vec{K}_j^i - \vec{m}_i \right) \left(\vec{K}_j^i - \vec{m}_i \right)^T, \quad (8.29)$$

Асимптотически оптимальное в смысле минимума средней вероятности ошибок распознавания решающее правило в пространстве выбранных

информативных признаков имеет вид

$$\left(\vec{K} - \vec{m}_i\right)^{tr} R_i^{-1} \left(\vec{K} - \vec{m}_i\right) - \lambda_i \leq \left(\vec{K} - \vec{m}_h\right) R_h^{-1} \left(\vec{K} - \vec{m}_h\right) - \lambda_h, \quad h = 1, M, \quad h \neq i \quad (8.30)$$

где $\lambda_i = \ln \left[\frac{|R_i|^{\frac{1}{2}}}{P_i} \right]$.

Если не учитывать взаимную корреляцию коэффициентов отражения, решающее правило (8.30) упрощается и принимает вид

$$\sum_{j=1}^p \left(\frac{k_j - m_j^i}{\sigma_j^i} \right)^2 \leq \sum_{j=1}^p \left(\frac{k_j - m_j^h}{\sigma_j^h} \right)^2, \quad h = \overline{1, M}, \quad h \neq i, \quad (8.31)$$

где $(\sigma_j^i)^2$ – дисперсия оценки j -го коэффициента отражения k_j , найденная по обучающей выборке для i -го сигнала.

Рассмотренные информативные признаки и решающие правила определяют достаточно простые алгоритмы распознавания, которые могут работать даже при значительной размерности исходного представления сигналов. В режиме обучения для каждой реализации обучающей выборки сигналов известными процедурами находятся оценки коэффициентов отражения РФ и по ним вычисляются параметры выбранного решающего правила (средние векторы, обратные корреляционные матрицы, дисперсии оценок коэффициентов отражения). На этапе распознавания для предъявленной реализации сигнала вычисляются оценки коэффициентов отражения и с применением решающего правила (8.30) либо (8.31) выносится решение о принадлежности сигнала к одному из M распознаваемых сигналов.

Аналогично строятся решающие правила для случая, когда распознавание производится в пространстве информативных признаков сигналов, определяемых коэффициентами АР модели. В пространстве таких информативных признаков могут быть получены довольно простые решающие правила, основанные на использовании статистических свойств оценок коэффициентов АР, найденных по реализациям сигналов конечной длины. Как показывают экспериментальные исследования, уже при $L > 50$ распределение этих оценок может быть достаточно точно описано гауссовым распределением. При этом в предположении некоррелированности коэффициентов АР может быть использовано решающее правило

$$i = \arg \min_{h=1, M} \left[\sum_{j=1}^p \left\{ \frac{(\hat{\Phi}[j] - \hat{m}_j^h)^2}{(\hat{\sigma}_j^h)^2} - \ln \frac{(\hat{\sigma}_j^h)^2}{P_h^2} \right\} \right]. \quad (8.32)$$

Здесь $(\hat{\sigma}_j^h)^2 = \frac{1}{n_h} \sum_{r=1}^{n_h} (\hat{\Phi}_r^h[j] - \hat{m}_j^h)^2$; $\hat{m}_j^h = \frac{1}{n_h} \sum_{r=1}^{n_h} \hat{\Phi}_r^h[j]$ – соответственно

оценки дисперсий и математического ожидания оценок коэффициентов АР, полученных по классифицированным выборкам сигналов на этапе обучения; $\hat{\Phi}_r^h[j]$ – оценка j -го коэффициента АР h -го сигнала, вычисленная по r -й реализации обучающей выборки.

Если дисперсии оценок коэффициентов АР близки между собой, рационально использовать упрощенное решающее правило

$$i = \arg \min_{h=1, \overline{M}} \left[\sum_{j=1}^p (\hat{\Phi}^h[j] - \hat{m}_j^h)^2 \right]. \quad (8.33)$$

В решающих правилах (8.32), (8.33) решение принимается по текущим оценкам коэффициентов АР $\hat{\Phi}^h[j]$, найденным по наблюдаемой реализации распознаваемого сигнала.

При описании сигналов АР моделью решающие правила можно также строить, используя характерное свойство авторегрессионного (либо решетчатого) фильтра минимизировать ошибку предсказания. В этом случае для предъявленной реализации сигнала решение в пользу одного из сигналов принимается по минимуму дисперсии ошибки предсказания на выходе одного из M фильтров, параметры которых найдены по обучающим выборкам распознаваемых сигналов. При использовании АР фильтров такое решающее правило имеет вид

$$i = \arg \min \left[\sum_{l=p}^L (x[l] - \sum_{j=1}^p \hat{\Phi}^h[j] x[l-j])^2 \right], \quad h = \overline{1, M}. \quad (8.34)$$

По существу, в этом решающем правиле в качестве информативного признака сигнала используется дисперсия ошибки предсказания. При этом в режиме распознавания для наблюдаемой реализации сигнала вычисляется значение лишь этого признака. Нетрудно видеть, что это приводит к существенно меньшим вычислительным затратам по сравнению с решающими правилами (8.32), (8.33), в которых необходимо в режиме распознавания вычислять текущие оценки коэффициентов АР (коэффициенты отражения РФ).

Когда используются решетчатые фильтры, решающее правило имеет аналогичный вид с тем лишь отличием, что в нем ищется ошибка прямого предсказания, а коэффициенты отражения РФ оцениваются на этапе обучения с использованием известной процедуры Левинсона–Дарбина. В этой процедуре при определении коэффициентов АР для модели p -го порядка последовательно вычисляются коэффициенты АР более низких порядков. При этом последние

коэффициенты АР для модели каждого порядка являются коэффициентами отражения РФ. Коэффициенты отражения также могут вычисляться и другими способами, приведенными в разделе 6.

Рассмотренные способы построения информативных признаков и соответствующие решающие правила определяют структуры устройств распознавания сигналов при их описании АР моделью. Устройства работают в режиме обучения и распознавания. На этапе обучения с использованием обучающих выборок сигналов выбирается порядок АР модели и вычисляются оценки коэффициентов АР (либо коэффициентов отражения РФ), которые определяют параметры соответствующих решающих правил. В режиме распознавания по наблюдаемой реализации сигнала оцениваются значения выбранных информативных признаков, и с помощью соответствующей решающей процедуры определяется номер сигнала, к которому относится предъявленная реализация сигнала.

8.7 Особенности авторегрессионных алгоритмов распознавания заданных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов

Следует отметить, что в приведенных выше алгоритмах распознавания неизвестные сигналы, будут отнесены к одному из заданных классов сигналов, что соответствует ошибочному распознаванию. Поэтому для учета при распознавании класса неизвестных сигналов следует применять специальные методы. Общее решение задачи распознавания заданных сигналов при наличии класса неизвестных рассмотрено в п. 8.1. Алгоритмы распознавания получены из условия максимизации вероятности правильного распознавания заданных сигналов при фиксированном объеме собственных областей заданных сигналов, построенных в пространстве сигналов либо их некоторых статистик. Конкретизируем общий алгоритм распознавания (8.13) с учетом выражения для плотности вероятности распознаваемых сигналов (8.22). При этом решающее правило распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных сигналов на основе АР модели определяется соотношениями [17, 19]:

$$H^i : E_k(\vec{x}) \leq \Lambda_k, \quad k = \overline{1, M}, \quad (8.35, \text{ а})$$

$$E_k(\vec{x}) - E_i(\vec{x}) + \ln \frac{(2\pi\sigma_i)^{p_i-L}}{(2\pi\sigma_k)^{p_k-L}} \geq \ln \frac{P_k}{P_i}, \quad (8.35, \text{ б})$$

$$H^{M+1} : E_k(\vec{x}) > \Lambda_k, \quad k = \overline{1, M} \quad (8.35, \text{ в})$$

где $E_k(\bar{x})$ определяется соотношением (8.22); $\Lambda_k = \ln \frac{(2\pi)^{\frac{L}{2}} \sigma_k^{L-p_k} \lambda_k}{P_k}$ – некоторое

пороговое значение, определяемое из условия обеспечения заданной вероятности правильного распознавания заданного k -го сигнала. Согласно этому правилу, решение в пользу i -го заданного сигнала принимается в два этапа: при выполнении хотя бы одного из неравенств (8.35, а) и при выполнении системы неравенств (8.35, б). Когда выполняются неравенства (8.35, в), решение принимается в пользу сигналов из $M+1$ -го класса.

В ряде случаев для принятия решений может быть использовано более простое решающее правило, основанное на использовании в качестве информативных признаков распознавания коэффициентов АР либо коэффициентов отражения РФ модели для каждого заданного сигнала. С учетом того, что распределение оценок коэффициентов АР может быть аппроксимировано гауссовым законом, а также в предположении некоррелированности и близости дисперсии оценок коэффициентов АР может быть получено следующее упрощенное решающее правило:

$$H^i : \sum_{j=1}^{p_k} (\hat{\Phi}^k[j] - m_j^k)^2 \leq \lambda_k, \quad k = \overline{1, M}, \quad (8.36, \text{ а})$$

$$\sum_{j=1}^{p_i} (\hat{\Phi}^i[j] - m_j^i)^2 \leq \sum_{j=1}^{p_k} (\hat{\Phi}^k[j] - m_j^k)^2, \quad k = \overline{1, M}, \quad i \neq k; \quad (8.36, \text{ б})$$

$$H^{M+1} : \sum_{j=1}^{p_k} (\hat{\Phi}^k[j] - m_j^k)^2 > \lambda_k, \quad k = \overline{1, M}. \quad (8.36, \text{ в})$$

Здесь $\hat{\Phi}^k[j]$ – оценки параметров АР модели, найденные по наблюдаемой реализации распознаваемого сигнала; m_j^k – математическое ожидание оценок коэффициентов АР, полученное по обучающей выборке реализаций k -го заданного сигнала; λ_k – некоторые пороговые значения, определяемые из условия обеспечения заданных вероятностей правильного распознавания заданных сигналов.

Аналогично могут быть получены решающие правила с использованием и других параметров АР модели – коэффициентов отражения, дисперсии ошибки предсказания на выходе авторегрессионного либо решетчатого фильтра, как это было сделано для классической постановки задачи распознавания сигналов.

8.8 Исследование рабочих характеристик авторегрессионных алгоритмов распознавания сигналов

В задачах распознавания аналитическими методами оценить рабочие

характеристики алгоритмов распознавания не представляется возможным. Поэтому их исследования проведены методом статистического моделирования на ЭВМ. Статистические испытания проведены на выборках шести гауссовых случайных сигналов с различным видом корреляционных функций (рис. 8.2).

Для исследований разработан пакет программ, включающий программы моделирования выборок реализаций сигналов, оценивания параметров решающих правил в режиме обучения, исследования рабочих характеристик алгоритмов в режиме распознавания при учете совокупности показателей качества. Выборки сигналов получены с помощью программного имитатора, основанного на АР модели сигналов. Сформированы обучающие и контрольные выборки из 400 реализаций по 1024 отчета для каждого сигнала. По обучающим выборкам реализаций оценивались параметры решающего правила, а контрольные выборки использовались для оценивания качества распознавания сигналов.

Вначале исследовалась зависимость средней вероятности ошибочного распознавания сигналов $\hat{P}_e$ от числа используемых при распознавании коэффициентов АР в рамках выбранного порядка модели АР. Полученная зависимость при использовании решающего правила (8.22) для АР модели 10-го порядка приведена на рис. 8.3. Видно, что достаточно хорошее качество распознавания сигналов обеспечивается уже при небольшом числе используемых коэффициентов АР. Это свидетельствует о том, что распознаваемые сигналы хорошо описываются АР моделью низкого порядка. Поэтому дальнейшее возрастание размерности пространства информативных признаков при увеличении порядка АР модели приводит к снижению качества распознавания сигналов. Это обусловлено, в частности, увеличением дисперсии оценок коэффициентов АР с большими значениями индексов.

Проведены также исследования зависимости $\hat{P}_e$ от длительности (размерности дискретного описания) сигналов L (рис. 8.4). При увеличении длительности реализаций сигнала существенно улучшается качество распознавания сигналов. Как показали сравнительные исследования, при малых значениях L лучшее качество распознавания сигналов получается с использованием алгоритма распознавания по минимуму дисперсии ошибки предсказания (8.22). Это видно из рис. 8.4, на котором приведены зависимости $\hat{P}_e$ от длительности реализаций распознаваемых сигналов L при разных порядках АР модели ($p=2, 3, 4$). Лучшее качество распознавания объясняется тем, что структура решающего правила близка к асимптотически оптимальному решающему правилу по критерию минимума средней вероятности ошибочного распознавания сигналов $\hat{P}_e$ для сформулированных условий.

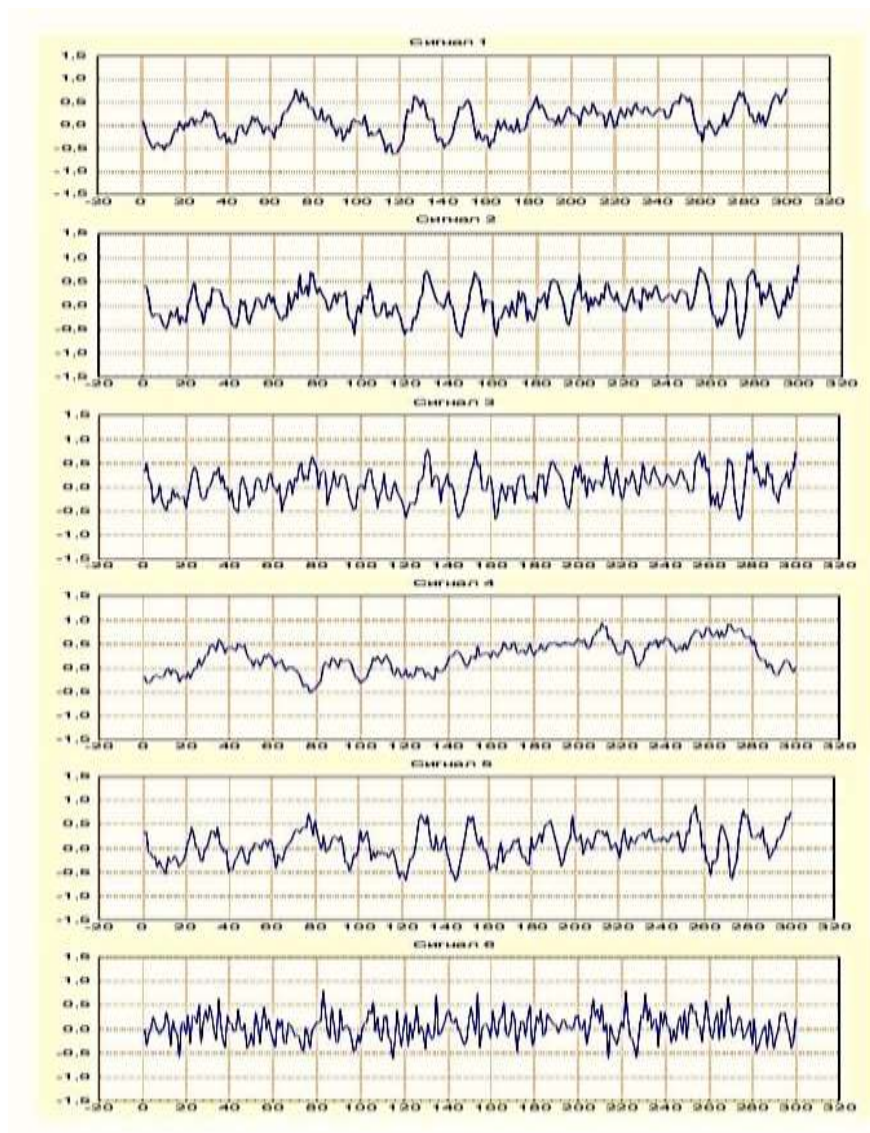


Рисунок 8.2 – Реализации гауссовых случайных сигналов с различным видом корреляционных функций

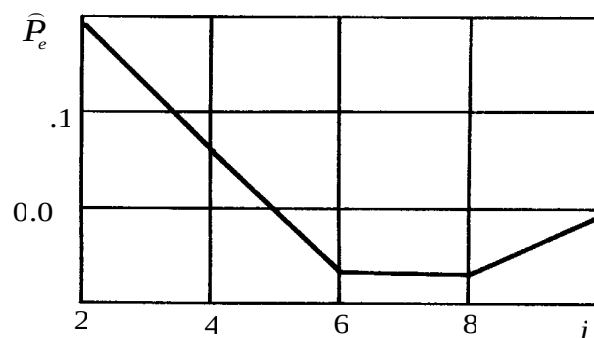


Рисунок 8.3 – Зависимость средней вероятности ошибочного распознавания сигналов $\hat{P}_e$ от числа используемых коэффициентов АР при порядке модели $p = 10$

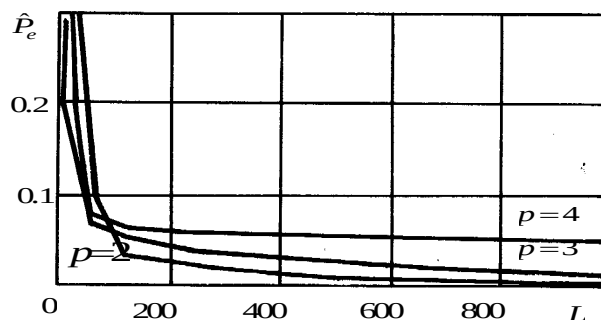


Рисунок 8.4 – Зависимость средней вероятности ошибочного распознавания сигналов $\hat{P}_e$ от длины реализации L при разном порядке АР модели p

Исследования алгоритмов распознавания по оценкам коэффициентов отражения РФ показали, что учет корреляционных связей оценок коэффициентов отражения в малой степени сказывается на качестве распознавания сигналов. Поэтому в основном проводились исследования распознавания сигналов на основе более простого решающего правила (8.27) с использованием двух и четырех коэффициентов отражения при различной длительности реализаций сигналов L . Получено, что качество распознавания по двум коэффициентам отражения существенно выше, чем по четырем. При этом последние коэффициенты отражения для АР модели четвертого порядка являются малоинформативными, поскольку для них дисперсии оценок гораздо выше, чем для первых двух коэффициентов отражения. На рис. 8.5 приведена зависимость средней вероятности ошибки распознавания от длительности реализаций сигналов L . Распознавание производилось по двум коэффициентам отражения ($p=2$). Как следует из графика, длительность предъявляемых реализаций сигналов существенно влияет на качество их распознавания.

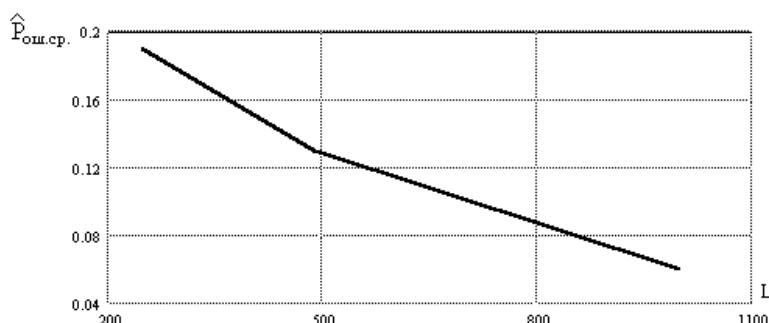


Рисунок 8.5 – Зависимость средней вероятности ошибочного распознавания сигналов по коэффициентам отражения РФ ($p=2$) от длительности сигналов

Для того чтобы оценить многомерные потенциальные характеристики авторегрессионных алгоритмов распознавания сигналов, исследованы рабочие характеристики в виде зависимости значений показателя качества распознавания сигналов от показателя быстродействия. Исследования проведены для алгоритма распознавания, оптимального по критерию минимума средней вероятности ошибочного распознавания (8.22). На рис. 8.6 приведена диаграмма обмена введенных показателей качества и быстродействия распознавания: оценки средней вероятности ошибочного распознавания сигналов $\hat{P}_e$ и длительности реализации сигнала L , которая фактически определяет быстродействие алгоритма распознавания сигналов. Каждая точка полученной диаграммы обмена характеризует потенциально достижимые значения одного показателя качества при фиксированных значениях другого показателя. Эта зависимость показывает, как осуществляется «обмен» значений введенных показателей качества.

Отметим, что найденная диаграмма обмена показателей качества характеризует алгоритм распознавания лишь для рассмотренных в данном примере модельных сигналов. При решении каждой конкретной задачи распознавания МДО должны находиться с использованием выборок реальных сигналов, характерных для этой задачи.

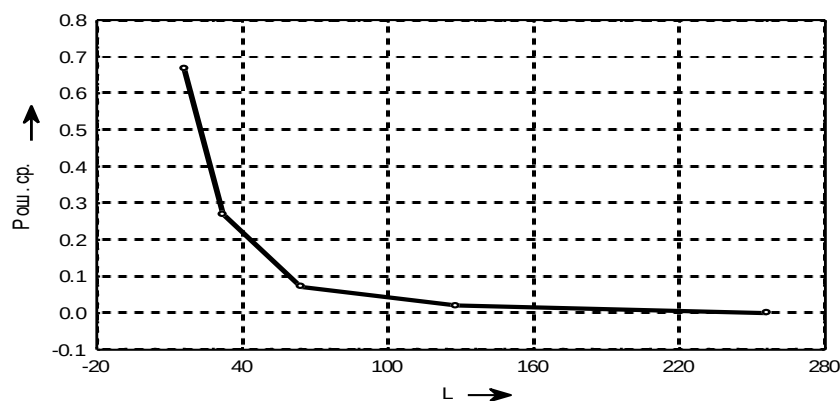


Рисунок 8.6 – Диаграмма обмена средней вероятности ошибки распознавания сигналов и быстродействия, определяемого длительностью наблюдения сигналов

Исследованы также особенности решения задачи распознавания M заданных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов. В качестве заданных использовались три первых сигнала описанной выше выборки шести случайных сигналов. Остальные три сигнала представляли $(M+1)$ -й класс неизвестных сигналов. Для этой задачи оценивались такие показатели качества распознавания: вероятность $\hat{P}_{M+1/M}$ (ошибочного принятия решений в пользу

($M+1$)-го класса при условии, что предъявлялись заданные M сигналов); а также вероятность $\hat{P}_{M/M+1}$ (ошибочного принятия решений в пользу заданных M сигналов при условии, что предъявлялись неизвестные сигналы из ($M+1$)-го класса).

Указанные показатели качества связаны и конкурируют между собой. Поэтому в результате проведения многократных исследований получены диаграммы обмена указанных показателей качества распознавания $\hat{P}_{M/M+1}$ от $\hat{P}_{M+1/M}$ и быстродействия (длительностях наблюдения сигналов).

На рис. 8.7 приведены двумерные диаграммы обмена при $L=256$ и $L=512$, которые являются хорошей иллюстрацией многокритериального характера задач распознавания сигналов. Хорошо видно, что невозможно достигать одновременного улучшения всех показателей качества распознавания. Улучшение одного показателя качества может быть достигнуто за счет ухудшения другого показателя.

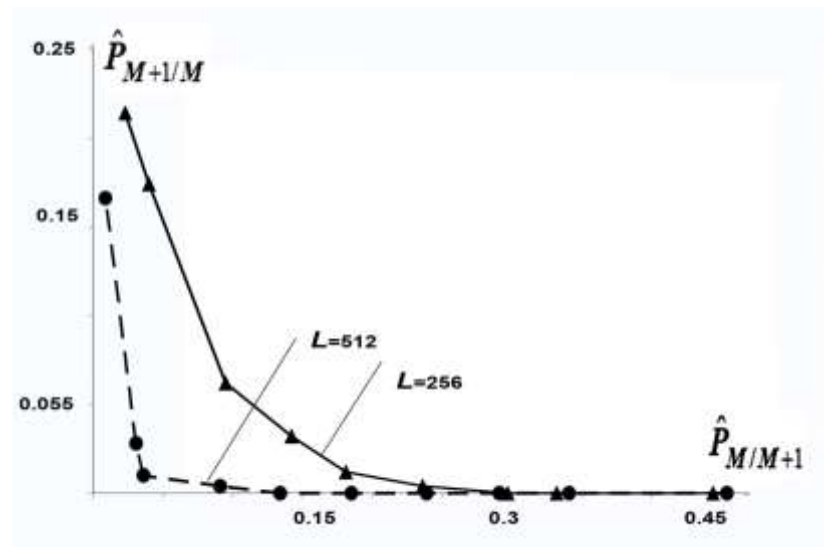


Рисунок 8.7 – Диаграммы обмена показателей качества распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных сигналов

Итак, в результате исследований установлено, что при распознавании сигналов в качестве информативных признаков могут быть выбраны коэффициенты АР и коэффициенты отражения РФ, получаемые на основе АР модели сигналов. При этом строятся достаточно простые алгоритмы распознавания, работающие при больших размерностях исходного представления сигналов.

Результаты исследований подтверждают возможность получения приемлемого качества распознавания сигналов при небольшом числе информативных признаков. Предложенные алгоритмы распознавания могут быть использованы при решении различных прикладных задач распознавания сигналов, в частности в области радиолокации, радиоконтроля, медицинской

диагностики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патрик Э. Основы теории распознавания образов. – М.: Сов. радио, 1980. – 407 с.
2. Ту Дж., Гонсалес Р. Принципы распознавания образов. – М.: Мир, 1978. – 411 с.
3. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. – М.: Мир, 1976. – 541 с.
4. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. – М.: Наука, 1979. – 367 с.
5. Айвазян С.А., Бежаева З.И., Староверов О.Л. Классификация многомерных наблюдений. – М.: Статистика, 1974. – 239 с.
6. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 755 с.
7. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П. А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
8. Либенсон М.Н. Нелинейный статистический метод распознавания многих классов // Проблемы случайного поиска. – Рига: ИК АН Латвии, 1978. – Вып.6. – С. 299–317.
9. Сенин А.Г. Распознавание случайных сигналов. – Новосибирск: Наука, 1974. – 76 с.
10. Омельченко В.А. Основы спектральной теории распознавания сигналов. – Харьков: Вища школа, 1983. – 156 с.
11. Фефелов Н.А. Распознавание образов при наличии нового класса // Отбор и обработка информации. – 1988. – Вып. 2. – С. 84–89.
12. Омельченко В.А., Балабанов В.В., Безрук В.М., Омельченко А.В., Фефелов Н.А. Распознавание неполностью описанных случайных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов // Отбор и обработка информации. – 1992. – Вып.8. – С. 71–80.
13. Безрук В.М., Певцов Г.В. Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля: Монография. – Харьков: Колегиум, 2006. – 430 с.
14. Безрук В.М., Тихонов В.А., Тихонов Д.В. Распознавание случайных сигналов по параметрам их авторегрессионной модели // АСУ и приборы автоматики. – 2001. – Вып.114. – С. 28–32.
15. Безрук В.М., Голиков В.С., Тихонов В.А. Распознавание случайных сигналов, описываемых авторегрессионной моделью // Изв. Вузов. Серия «Радиоэлектроника». – 2004. – №4. – С. 59–65.
16. Кравченко Н.И., Безрук В.М., Тихонов В.А. Структуры устройств распознавания гауссовских сигналов при их описании авторегрессионной моделью // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – Вып.4. – С. 49–54.
17. Безрук В.М., Коваленко Н.П. Синтез и анализ алгоритмов распознавания гауссовских случайных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов на основе авторегрессионной модели // АСУ и приборы

автоматики. – 2000. – Вып.111. – С. 115–120.

18. Безрук В.М. Оптимизация авторегрессионных алгоритмов распознавания сигналов по совокупности показателей качества // Інформаційно–керуючі системі на залізничному транспорті. – 2001. – №2. – С. 10–13.

19. Безрук В.М. Распознавания заданных случайных сигналов при наличии неизвестных сигналов // Прикладная радиоэлектроника. – 2006. – т.5, №3. – С. 395–398.

20. Марченко Б.Г., Щербак Л.Н. Линейные случайные процессы и их приложение. – К.: Наукова думка, 1975. – 142 с.

21. Шпилевский Э.К. Принципы динамической классификации стохастических процессов и систем // Статистические проблемы управления. – Вильнюс: ИМ АН Литвы, 1978. – Вып. 28. – 139 с.

22. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1972. – 287 с.

23. Марпл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 432 с.

9 РАДИОЛОКАЦИОННОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ МЕТЕООБЪЕКТОВ ПО ФЛУКТУАЦИЯМ ИНТЕНСИВНОСТИ ОТРАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ

9.1 Введение

Несмотря на широкое применение метеорологических спутников радиолокационные методы измерения параметров облачности часто являются единственным источником метеорологической информации, поскольку верхняя кромка облачности маскирует сложные процессы в её нижних слоях [1–4]. Среди всех типов облачности кучево–дождевые облака (Cb) являются практически основным источником опасных явлений в атмосфере, включая шквалы, смерчи, сильные ливни [5]. Для эффективного штормового оповещения с целью обеспечения безопасности полетов авиации, предупреждения градобитий и других опасных метеоявлений определяющее значение имеет оперативность принятия решения о характеристиках исследуемой облачности. Поэтому актуальными являются исследования возможностей автоматического распознавания метеообъектов с использованием информации, поступающей от радиолокатора. Технические характеристики существующих метеорадаров позволяют обеспечить надежное измерение характеристик облачности, что дает веские основания для разработки методов и аппаратуры радиолокационного распознавания метеообъектов.

При зондировании метеообъектов импульсным радиолокатором последовательность отраженных сигналов имеет междупериодные флуктуации, а их статистические характеристики содержат информацию о типе и структуре метеообъектов [2,3,7]. В работе [6] предложен метод распознавания метеообъектов по оценкам энергетических спектров флуктуаций интенсивности эхо–сигналов, поступающих с выхода некогерентного импульсного радиолокатора. В работе [7] рассмотрены особенности косвенных методов извлечения информации о гидрометеорах на основе анализа корреляционных матриц междупериодных флуктуаций сигналов когерентного импульсного радиолокатора и предложено использовать эту информацию для классификации метеоявлений.

В данном разделе рассмотрены особенности решения задачи радиолокационного распознавания метеообъектов с помощью алгоритма распознавания, основанного на АР модели флуктуаций интенсивности отраженных сигналов импульсного некогерентного радиолокатора [8]. Приведены результаты экспериментальных исследований эффективности радиолокационного распознавания метеообъектов на примере высоко–кучевых непросвечивающихся облаков, кучево–дождевых облаков и «ангел–эхо». При этом использован измерительный комплекс на базе метеорадара МРЛ–1, в котором реализован алгоритм распознавания метеообъектов по флуктуациям интенсивности отраженных сигналов.

9.2 Алгоритм распознавания метеообъектов по флуктуациям интенсивности отраженных сигналов

Сформулируем постановку задачи распознавания метеообъектов по отраженным сигналам. Пусть распознаванию подлежат метеообъекты, представленные M случайными сигналами $x^i[t]$, $i = \overline{1, M}$, заданными на конечном интервале времени наблюдения $(0, T)$ последовательностью равноотстоящих отсчетов $x[l]$, $l = \overline{1, L}$. Эти отсчеты характеризуют междупериодные флуктуации интенсивности сигналов, отраженных от разных метеообъектов. Заданы априорные вероятности предъявления сигналов на распознавание P_i . Предполагается, что отраженные сигналы различаются на уровне корреляционных функций, которые априори неизвестны, но могут быть найдены их оценки по классифицированным обучающим выборкам отсчетов сигналов $\{x_r^i[l], l = \overline{1, L}; r = \overline{1, n_i}; i = \overline{1, M}\}$ для заданных метеообъектов. Необходимо получить алгоритм распознавания, оптимальный по критерию минимума средней вероятности ошибочного распознавания сигналов. Такие исходные данные соответствуют классической постановке задачи распознавания сигналов в условиях априорной неопределенности.

Рассмотрены особенности решения поставленной задачи распознавания метеообъектов для случая, когда вероятностное описание флуктуаций интенсивности отраженных сигналов определяется авторегрессионной моделью. Использовались алгоритмы распознавания сигналов, представленные в п. 8.6. Порядок АР модели p для разных сигналов выбирался одинаковым и задавался, исходя из обеспечения требуемого качества распознавания метеообъектов.

При исследованиях эффективности радиолокационного распознавания метеообъектов использовался алгоритм распознавания сигналов (8.29). При этом решение о номере распознаваемого сигнала (типа метеообъекта) принимается по номеру АР фильтра, на выходе которого достигается минимум дисперсии ошибки предсказания

$$i^* = \arg \min_{i=1, M} \{D_{a_i}\}.$$

Здесь D_{a_i} – дисперсия ошибки предсказания на выходе i -го АР фильтра. Параметрами АР фильтров являются коэффициенты АР, полученные на этапе обучения по классифицированным выборкам распознаваемых сигналов.

Кроме того, проводились исследования эффективности радиолокационного распознавания метеообъектов для случая алгоритма распознавания по минимуму ошибки предсказания на выходе решетчатых фильтров.

В режиме обучения производится оценивание неизвестных параметров АР либо РФ фильтра по классифицированным обучающим выборкам реализаций отраженных сигналов. В рабочем режиме производится автоматическое распознавание метеообъектов по наблюдаемой реализации отраженных сигналов.

9.3 Радиолокационный измерительный комплекс для проведения исследований

Для экспериментальных исследований эффективности алгоритма радиолокационного распознавания метеообъектов использовался радиолокационный измерительный комплекс на основе импульсного некогерентного метеорологического радиолокатора типа МРЛ–1 [9]. Комплекс включал в себя (рис. 9.1): блок управления антенны (БУА), оптико–телевизионное устройство (ОТВУ) для визуального наблюдения исследуемых объектов, блок калибровки (БК), приемник, блок сопряжения (БС) радиолокатора с персональным компьютером (ПК), а также ПК для управления радаром и обработки отраженных сигналов.

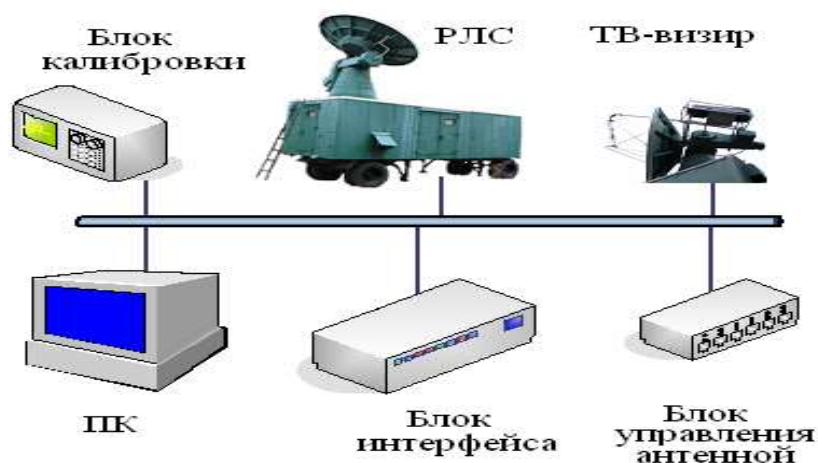


Рисунок 9.1– Состав радиолокационного измерительного комплекса

Использование ПК позволило осуществить программируемое сканирование антенной радара с заданной скоростью и в заданном секторе углов. Использование блока калибровки чувствительности приемного устройства, встроенного измерителя мощности передатчика и специально разработанного программного обеспечения для ПК, позволяет измерять абсолютные значения интенсивности отраженных сигналов. При этом осуществляется компенсация нелинейности амплитудной характеристики приемного устройства в диапазоне 45 дБ, что обеспечивает абсолютные измерения радиолокационной отражаемости исследуемых объектов с точностью не хуже $\pm 1,0$ дБ с учетом калибровки усиления антенны и потерь в антенно–фидерном тракте.

Предварительная обработка и передача оцифрованных данных в ПК осуществляется между зондирующими импульсами, следующими с частотой повторения 600 Гц. Время обзора сектора углов места $0^\circ - 80^\circ$ составляет ≈ 150 с при шаге сканирования антенны $\approx 0.5^\circ$. При максимальной дальности 37.5 км количество ячеек по дальности составляет 150. Основные характеристики радиолокационного комплекса приведены в табл. 9.1.

Для получения устойчивых оценок статистических характеристик флуктуаций интенсивности отраженных сигналов для каждой ячейки дальности производилось накопление 512 импульсов, характеризующих интенсивности отраженных сигналов при стробировании соответствующей ячейки дальности. Таким образом, получались обучающие выборки реализаций последовательностей отсчетов сигналов для распознаваемых метеообъектов.

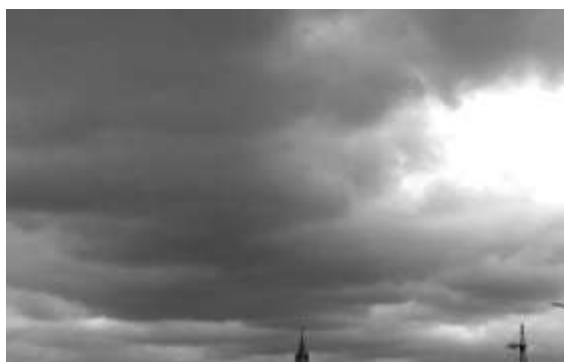
Таблица 9.1 – Параметры радиолокационного измерительного комплекса

№	Параметр	Значение
1	Длина волны, см	3.2
2	Импульсная мощность, кВт	250
3	Длительность импульса, мкс	1.0
4	Частота повторения, Гц	300
5	Предельная чувствительность, дБ/Вт	-132
6	Полоса пропускания, МГц	1.0
7	Линейный динамический диапазон, дБ	45
8	Коэффициент усиления антенны, дБ	48
9	Диаметр антенны, м	3.0
10	Уровень боковых лепестков, дБ	-21
11	Ширина луча антенны по уровню -3 дБ, град	0.75
12	Энергетический потенциал, дБ	215
13	Частота дискретизации, МГц	2.0
14	Количество отсчетов на ячейку дальности	2
15	Интерфейс связи с ПК	USB

9.4 Результаты исследований эффективности распознавания метеообъектов

Исследования эффективности радиолокационного распознавания метеообъектов проводились с использованием выборок реализаций отраженных сигналов, полученных с помощью описанного радиолокационного измерительного комплекса для разных метеообъектов. Вначале для распознавания были выбраны три метеообъекта: два вида облаков, которые наиболее характерны для Харьковского региона в весенне-летний период и классифицируются как высококучевые непросвечивающиеся (Alto cumulus opacus) (рис. 9.2) и кучево-дождевые (Cumulonimbus) (рис. 9.2). В качестве третьего метеообъекта

было выбрано оптически ненаблюдаемое метеоформирование в виде «ангел - эхо», образованного брэгговским отражением от неоднородностей атмосферы, вызванных флуктуациями коэффициента преломления в нижних слоях тропосферы.



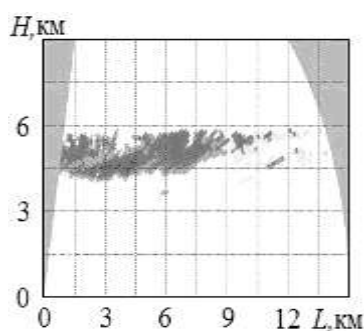
а)



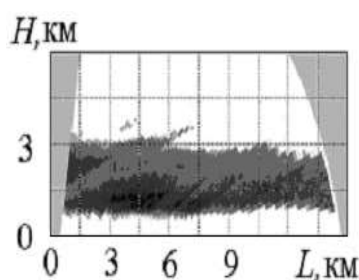
б)

Рисунок 9.2 – Фотографии исследованных облаков:
высоко–кучевые непросвечивающиеся (а), кучево–дождевые (б)

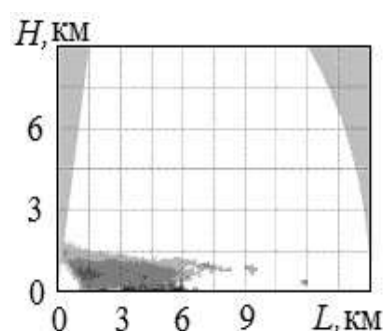
На рис. 9.3 приведены радиолокационные изображения указанных метеообъектов при угломестном сканировании антенны с шагом $0,5^\circ$ в секторе $0^\circ\text{--}80^\circ$ при постоянном азимуте, которые построены в системе координат «дальность–высота».



а)



б)



в)

Рис. 9.3 – Радиолокационное изображение метеообъектов в координатах «дальность–высота»: высоко–кучевые непросвечивающиеся облака (а), кучево–дождевые облака (б), «ангел–эхо» (в)

При этом интенсивность изображения пропорциональна радиолокационной отражаемости метеообъектов, в связи с чем можно сделать определенные выводы о радиолокационной плотности исследуемых объектов по виду изображений. Кроме того, важными являются вероятностные свойства последовательности отсчетов интенсивности отраженных сигналов, которые позволяют судить о конвективных процессах в облаках.

В результате радиолокационных измерений были накоплены классифицированные обучающие выборки по $N = 100$ реализаций отраженных сигналов, соответствующих каждому выбранному метеообъекту. Аналогично

были накоплены контрольные выборки по $N=100$ реализаций отраженных сигналов для тех же метеообъектов, но наблюдаемых в другие периоды времени. Каждая реализация сигналов составляла последовательность длиной $L=512$ отсчетов интенсивности отраженных сигналов, наблюдаемых в течении 0,85 с. Обучающие и контрольные выборки включали такие реализации отраженных сигналов, полученные для разных ячеек дальности и углов места. На этапе обучения тип метеообъектов определялся путем их визуального наблюдения и сравнению по атласу облаков.

Обучающие выборки реализаций сигналов служили для оценивания корреляционных функций флуктуаций интенсивности отраженных сигналов. По выборкам реализаций сигналов, соответствующим разным участкам облачности (по дальности и углу места), найдены усредненные оценки корреляционных функций сигналов. На рис. 9.4 приведены полученные оценки корреляционных функций флуктуаций интенсивности сигналов, отраженных от выбранных метеообъектов.

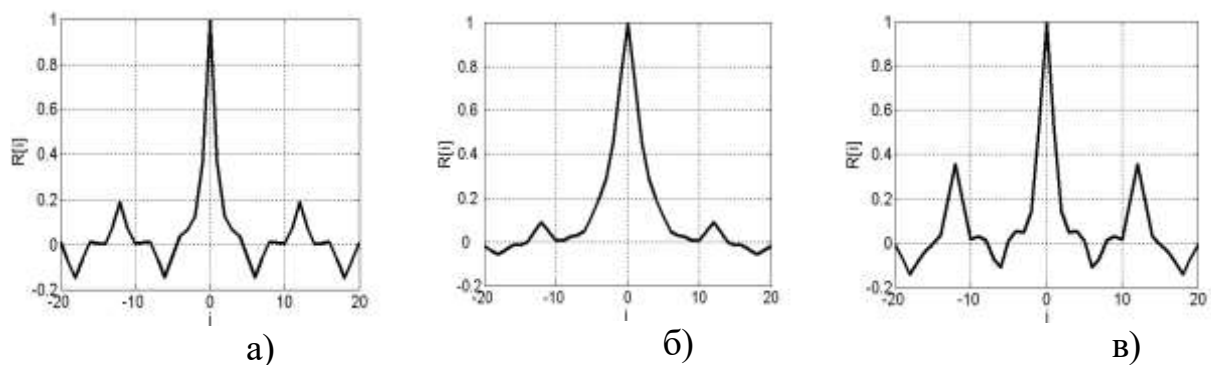


Рисунок 9.4 – Усредненные корреляционные функции соответственно для указанных трёх метеообъектов

С использованием полученных оценок корреляционных функций сигналов из уравнения Юла–Уокера вычислены коэффициенты АР модели отраженных сигналов для каждого выбранного метеообъекта, которые определяют соответствующие параметры алгоритма распознавания метеообъектов. Контрольные выборки отраженных сигналов, полученные для тех же метеообъектов в другие периоды времени, использованы для оценивания эффективности распознавания заданных метеообъектов методом статистических испытаний. В результате исследований для каждого типа метеообъекта были получены оценки вероятности правильного распознавания

$\hat{P}_{np}^i = \frac{n_{np}^i}{N}$. Здесь n_{np}^i – число правильно распознанных реализаций сигналов контрольной выборки i -го сигнала, объем контрольных выборок сигналов $N=100$.

В табл. 9.2 приведены результаты исследований эффективности радиолокационного распознавания указанных метеообъектов с использованием алгоритма распознавания по минимуму ошибки предсказания на выходе АР

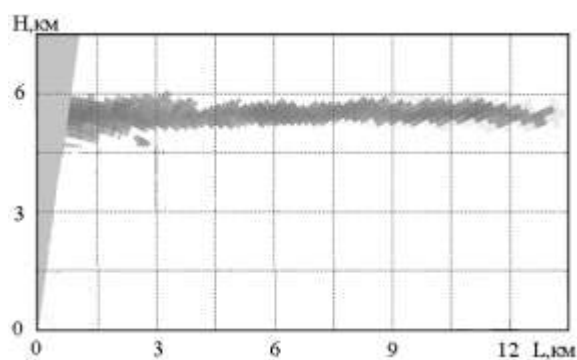
фильтров при разном числе используемых коэффициентов АР (порядке АР модели p).

Таблица 9.2 – Результаты распознавания метеообъектов с использованием алгоритма распознавания на основе АР фильтров

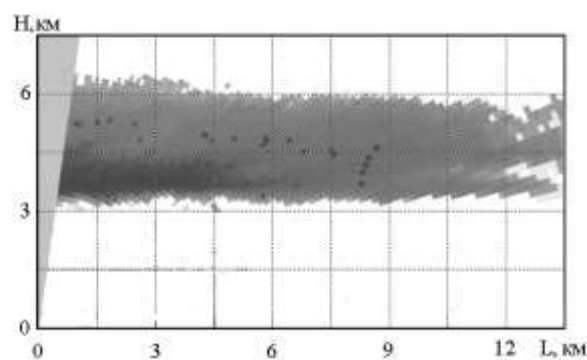
Порядок АР модели p	Оценки вероятностей правильного распознавания метеообъектов $\hat{P}_{np}^i$		
	Высоко–кучевые непросвечивающиеся облака	Кучево–дождевые облака	«Ангел–эхо»
2	0.94	0.79	0.42
4	0.96	0.8	0.44
8	0.98	0.81	0.44
16	0.99	0.86	0.56

Видно, что для указанных типов облачности алгоритм радиолокационного распознавания метеообъектов на основе АР фильтров обеспечивает достаточно высокую вероятность правильного распознавания (0.8 – 0.9) при невысоком порядке модели АР. Это свидетельствует о достаточно высокой информативности описания флуктуаций интенсивности отраженных сигналов с помощью АР модели. В то же время, видно, что сигналы, отраженные от «ангел-эхо», хуже отличаются от других сигналов при их описании АР моделью.

Проводились также исследования эффективности радиолокационного распознавания метеообъектов с использованием алгоритма распознавания по минимуму ошибки предсказания на выходе решетчатых фильтров. Параметры РФ фильтров оценивались по обучающим выборкам отраженных сигналов для заданных типов метеообъектов. При исследованиях были выбраны четыре типа метеообъектов: перьевые, сплошные серые, высококучевые и кучевые мощные облака. На рис. 9.5 приведены типичные радиолокационные изображения указанных метеообъектов при сканировании антенны по углу места с шагом $1,0^\circ$ в секторе $0^\circ \div 80^\circ$ при фиксированном азимуте.



а)



б)

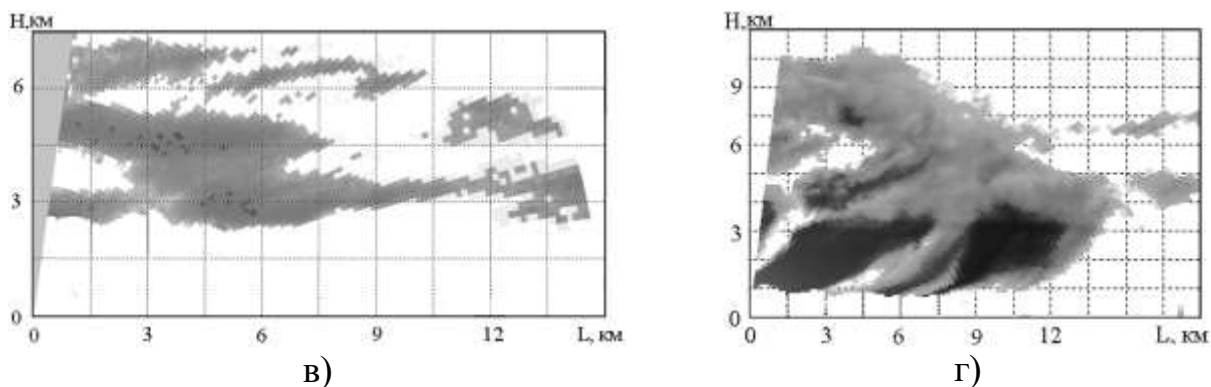


Рисунок 9.5 – Радиолокационное изображение метеобъектов в координатах «дальность–высота»: а) – перьевые, б) – сплошные серые, в) – высококучевые, г) – кучевые мощные облака.

Обучающие выборки отраженных сигналов от этих облаков использовались для оценивания коэффициентов РФ, соответствующих заданному метеобъекту. На рис. 9.6 приведены значения полученных оценок в зависимости от номера коэффициентов РФ. При этом хорошо видны отличия значений коэффициентов РФ для различных типов облаков, что дает основание для их эффективного распознавания на основе РФ.

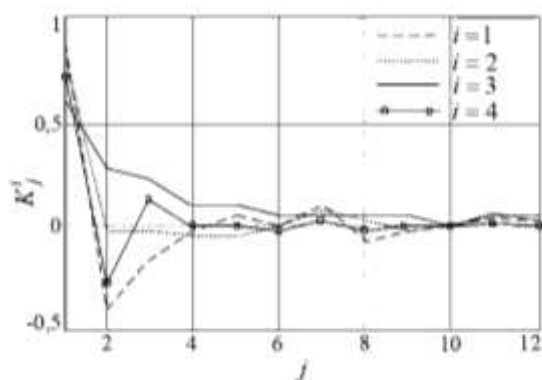


Рисунок 9.6 – Оценки коэффициентов РФ, полученные по отраженным сигналам для различных типов облаков

Контрольные выборки отраженных сигналов для этих метеобъектов использовались для оценивания вероятностей правильного распознавания метеобъектов $P_{np}^i = \frac{n_{np}^i}{N}$, где n_{np}^i – число правильно распознанных реализаций контрольной выборки i -го сигнала объемом N реализаций. В табл. 9.3 приведены результаты исследований эффективности радиолокационного распознавания заданных типов облаков при использовании алгоритма распознавания на основе решетчатых фильтров.

Таблица 9.3 – Результаты распознавания типов облаков с использованием алгоритма распознавания на основе РФ

Тип облаков	Вероятность правильного распознавания P_{np}^i		
	$p=2$	$p=4$	$p=8$
Перьевые	0.79	0.89	0.89
Сплошные серые	0.64	0.67	0.67
Высококучевые	0.74	0.89	0.91
Кучевые мощные	0.63	0.68	0.68

Полученные оценки вероятностей правильного радиолокационного распознавания типов облаков P_{np}^i при небольших порядках РФ свидетельствуют об информативности выбранного описания флуктуаций интенсивности отраженных сигналов на основе АР модели, что и определило достаточно высокую эффективность радиолокационного распознавания заданных типов облаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метеорологические автоматизированные радиолокационные сети. – Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 2002. – 311с.
2. Степаненко В.Д. Радиолокационная метеорология. – Л.: Гидрометеиздат, 1973. – 324 с.
3. Golden J. N. Weather Radar Networking. – Brussels, 1989. – 358 p.
4. Чедуик Р. Б. Радиолокационное зондирование ясного неба. Обзор. // ТИИЭР. – 1983. – Т. 71, №6. – С. 64–70.
5. Атлас облаков / Под ред. А.Х. Хургина. – Л.: Гидрометеиздат, 1957. – 68 с.
6. Омельченко В.А., Безрук В.М., Корытцев И.В., Пилипенко Ю.Л., Прошкин Е.Г. Распознавание метеорологических объектов по энергетическому спектру флуктуаций интенсивности эхо-сигналов // Радиотехника. – Харьков, 1981. – Вып. 57. – С.69–78.
7. Леховицкий Д.И., Жуга Г.А., Вовшин Б.М., Лаврукевич В.В. Извлечение метеоинформации на основе спектрального и корреляционного анализа отражений в импульсных доплеровских метеорологических РЛС // Прикладная радиоэлектроника. – 2007. – Т. 6, № 4. – С. 496–510.
8. Безрук В.М., Белов Е.Н., Войтович О.А., Нетребенко К.А., Тихонов В.А., Руднев Г.А., Хлопов Г.И., Хоменко С.И. Радиолокационное распознавание метеообъектов на основе авторегрессионной модели отраженных сигналов // Прикладная радиоэлектроника. – 2010. – Том 9, № 2. – С. 209–215.
9. Белов Е.Н., Войтович О.А., Макулина Т.А., Руднев Г.А., Хлопов Г.И., Хоменко С.И. Аппаратурно-программный комплекс для исследования радиолокационных отражений от метеообразований // Радиофизика и электроника. – 2009. – Т. 14, №1. – С. 63–67.

10 РАДИОЛОКАЦИОННОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПО ПАЧКЕ ОТРАЖЕННЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ШИРОКОПОЛОСНОМ ЗОНДИРОВАНИИ

10.1 Введение

При радиолокационном распознавании объектов с широкополосным зондированием и накоплением пачки отраженных сигналов могут быть получены дальностно–частотные портреты (ДЧП) и использованы соответствующие корреляционные методы распознавания объектов по ДЧП [1]. Дальностно–частотные портреты характеризуются высоким разрешением по дальности за счет широкополосности зондирующих сигналов и высоким разрешением по доплеровской частоте за счет протяженности по времени пачки отраженных сигналов. С одной стороны, ДЧП содержат информацию о форме объекта вдоль линии зондирования, а с другой стороны, модуляционные составляющие спектров сигналов указывают местонахождение вращающихся элементов распознаваемых объектов. Поэтому ДЧП представляют собой информативное исходное описание для распознавания объектов.

В данном разделе рассматривается метод радиолокационного распознавания типов объектов, в которых информация, имеющаяся в пачке дальностных портретов, описывается АР моделью. Предлагается для математического описания отраженных сигналов в виде пачки дальностных портретов использовать векторную АР модель. Это дает возможность получить новый авторегрессионный алгоритм распознавания, который в отличие от известного корреляционного алгоритма распознавания требует меньшего времени наблюдения объектов при том же качестве распознавания. Материалы данного раздела основаны на работе [2].

10.2 Корреляционный метод распознавания объектов по дальностно-частотным портретам

Рассмотрим особенности известного корреляционного метода радиолокационного распознавания объектов по ДЧП [1]. При распознавании объектов по ДЧП полагается, что принимается пачка из N широкополосных радиоимпульсов. Считается, что после когерентной обработки и сжатия в согласованном фильтре и дискретизации по времени на распознавание предъявляется выборка из N дальностных портретов, представленных L дискретными отсчетами

$$\xi_{lr}, \quad l = \overline{1, L}; \quad r = \overline{1, N}. \quad (10.1)$$

Каждому элементу дальностного разрешения при фиксированном l соответствует N элементов согласованного частотного разрешения

Ξ_{lp} , $p = \overline{1, N}$. Отсчеты отраженных сигналов во временной и частотной областях связаны дискретным преобразованием Фурье

$$\Xi_{lk} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \xi_{lr} \exp(-j2\pi kr / N), \quad (10.2)$$

$$\xi_{lr} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Xi_{lk} \exp(j2\pi kr / N). \quad (10.3)$$

Возможны разные условия приема отраженных сигналов. В частности, для модели сигналов с неизвестной начальной фазой для всей пачки β , общим неизвестным амплитудным множителем b при аддитивном гауссовом белом шуме принимаемые сигналы имеют вид $\xi_{lr} = b e^{-j\beta} X_{lr} + N_{lr}$. Возможен также прием сигналов с различающимися в разных периодах зондирования неизвестными начальными фазами β_r и общим неизвестным амплитудным множителем b . В частном случае оценивания неизвестных начальных фаз в каждом зондировании вычисление ДЧП выполняется согласно выражению

$$\Xi_{lk} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N (\xi_{lr} e^{-\beta_r}) \exp(-j2\pi kr / N). \quad (10.4)$$

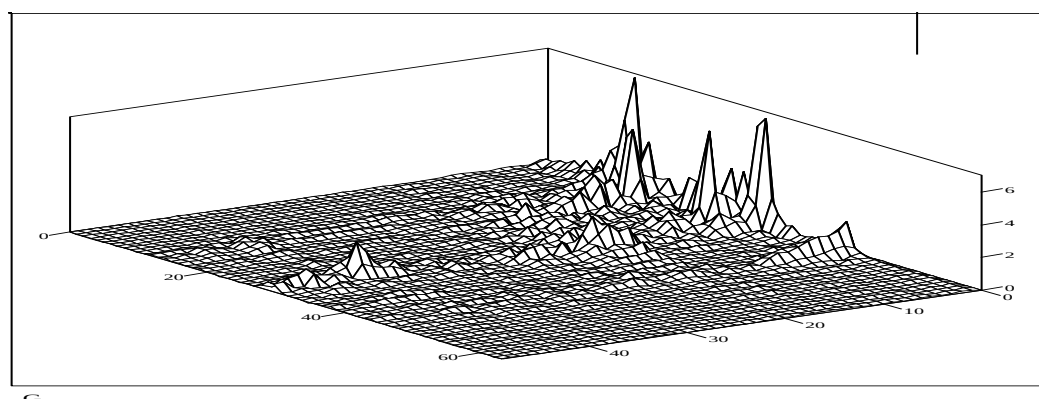
Распознавание типов объектов по ДЧП для указанных условий может осуществляться по максимуму отношения правдоподобия, что приводит к корреляционному алгоритму распознавания объектов по ДЧП [1]

$$i = \arg \max \left(\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^N \left(\|\Xi_{lk}\| \|\Xi_{lk}^j\| \right)^2 \right), \quad j = \overline{1, M}. \quad (10.5)$$

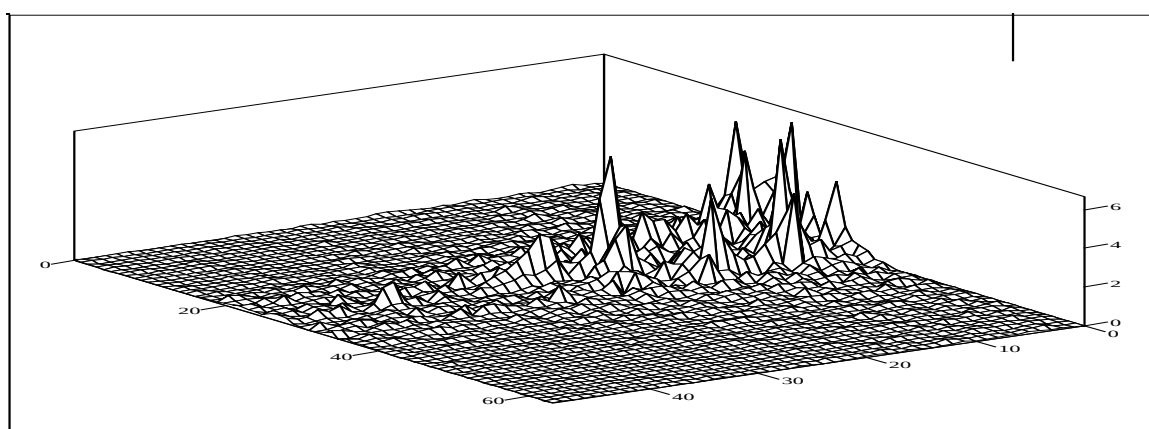
Здесь Ξ_{lk}^j – эталонный ДЧП j -го объекта, найденный согласно (10.4) на этапе обучения по выборкам дальностных портретов X_{lr}^j , $l = \overline{1, L}$; $r = \overline{1, N}$ без действия шума. Значения Ξ_{lk}^j нормированы так, чтобы $P \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^N \left| \Xi_{lk}^j \right|^2 = 1$.

На рис. 9.1 для иллюстрации приведены ДЧП для 3-х типов объектов: крупных, средних и малых размеров [1]. Эти ДЧП были вычислены по выборкам дальностных портретов, смоделированных для случая зондирующих сигналов в виде когерентной пачки широкополосных ЛЧМ-импульсов для носового сектора ракурсов при длине волны – 3 см, девиации частоты – 80 МГц, длительности импульсов – 1 мкс, частоте следования – 50 кГц,

длительность пачки импульсов – 5 мс. Видно, что ДЧП представляют собой достаточно информативное для распознавания исходное описание объектов.

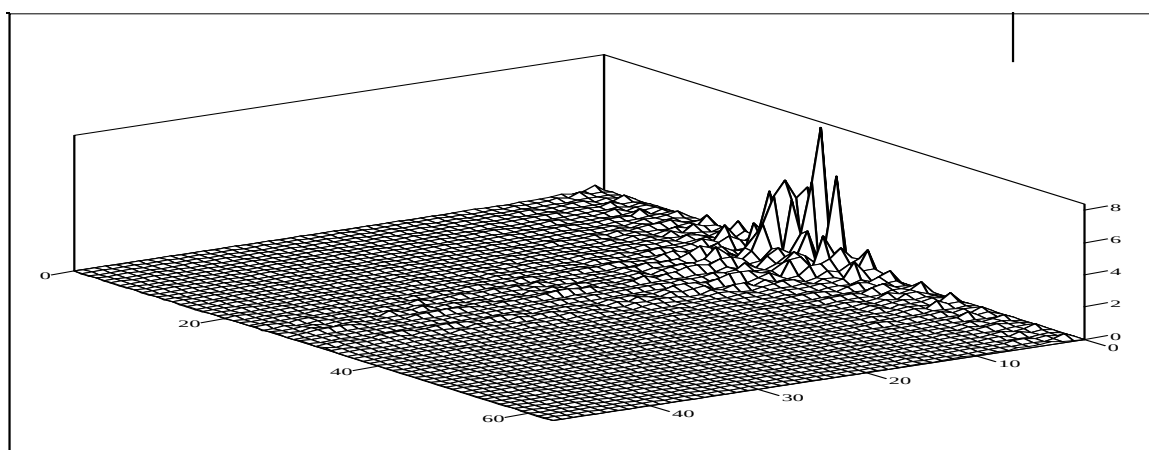


а



б

б



в

в

Рисунок 10.1 – Дальностно–частотные портреты для разных объектов:
а – крупных, б– средних, в – малых размеров

10.3 Метод радиолокационного распознавания объектов по пачке дальностных портретов на основе векторной авторегрессионной модели

Рассмотрим особенности метода радиолокационного распознавания типов объектов, в которых информация, имеющаяся в пачке отраженных сигналов, описывается АР моделью. Предлагается для математического описания сигналов в виде пачки (выборки) дальностных портретов использовать векторную АР модель. При этом выборку дальностных портретов ξ_{lr} , $l = \overline{1, L}$; $r = \overline{1, N}$ можно рассматривать как L -компонентную векторную последовательность. Каждая компонента – это дискретная последовательность длительностью N отсчетов, которая характеризует изменение интенсивности отраженного сигнала от l -го элемента разрешения по дальности на интервале времени накопления пачки отраженных сигналов. Эта векторная последовательность может быть описана векторным АР процессом с последующим применением соответствующих алгоритмов распознавания.

Выборку дальностных портретов ξ_{lr} , $l = \overline{1, L}$; $r = \overline{1, N}$ можно описывать векторным АР процессом $\vec{X} = (\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_r, \dots, \vec{X}_N)$, где $\vec{X}_r = \vec{\xi}_r$. Полагается, что этот векторный АР процесс является выходным сигналом дискретной линейной многомерной динамической системы, на вход которой поступает векторная гауссовая некоррелированная последовательность $\vec{V} = (\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_r, \dots, \vec{V}_N)$, где $\vec{V}_r = (V_{1r}, \dots, V_{lr}, \dots, V_{Lr})^T$ – совокупность (L -мерный вектор) независимых гауссовых случайных величин.

Таким образом, при описании наблюдаемой выборки дальностных портретов вероятностной моделью в виде векторного АР процесса для каждого r -го момента наблюдения она определяется соотношением [3]

$$\begin{aligned} \vec{X}(r) = & \vec{\mu}(r) - A_1(r) [\vec{X}_{r-1} - \vec{\mu}(r-1)] - A_2(r) [\vec{X}_{r-2} - \vec{\mu}(r-2)] - \dots \\ & \dots - A_p(r) [\vec{X}_{r-p} - \vec{\mu}(r-p)], \end{aligned} \quad (10.1)$$

где

$$A_j(r) = \begin{pmatrix} a_{11}(j, r) & a_{12}(j, r) & \dots & a_{1L}(j, r) \\ a_{21}(j, r) & a_{22}(j, r) & \dots & a_{2L}(j, r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1}(j, r) & a_{N2}(j, r) & \dots & a_{LL}(j, r) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, p(r)} \quad (10.2)$$

$$B(r) = \begin{pmatrix} b_1(r) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2(r) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_L(r) \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

$\vec{\mu}(r) = (\mu_1(r), \mu_2(r), \dots, \mu_L(r))^T$ – вектор математического ожидания случайного процесса $\vec{X}_r$; $a_{nm}(j, r)$, $j = \overline{1, p(r)}$, $n = \overline{1, L}$, $m = \overline{1, L}$ – параметры АР модели процесса; $b_l(r)$, $l = \overline{1, L}$ – коэффициенты, определяющие дисперсию входных воздействий.

Параметры системы $Z_r = (A_1(r), A_2(r), \dots, A_p(r), \vec{\mu}(r))$ в каждый момент наблюдения r удовлетворяют условиям устойчивости системы и принадлежат одному из классов, т.е. $Z_r = g^{(i)}$, $i = \overline{1, M}$. Полагается, что параметры АР модели $g^{(i)} = (A_1^{(i)}(r), A_2^{(i)}(r), \dots, A_{p_i}^{(i)}(r), \vec{\mu}^{(i)}(r), p_i)$ для каждого i -го сигнала известны либо они оцениваются по классифицированным обучающим выборкам отраженных сигналов для заданных типов объектов на этапе обучения. На этапе распознавания необходимо определить, какому типу заданных объектов соответствует векторный процесс, описывающий пачку наблюдаемых дальностных портретов. При этом возможно использование различных методов распознавания, основанных на описании пачки дальностных портретов векторной АР моделью. Рассмотрим один из простейших АР методов распознавания – по минимуму дисперсии ошибки прогноза (предсказания).

Прогнозные значения $\hat{\vec{X}}_r^{(i)}$, которые получаются по предыдущим наблюдаемым отсчетам векторного случайного процесса $\vec{X}_{r-1}, \vec{X}_{r-2}, \dots, \vec{X}_{r-p_i}$ определяется соотношением

$$\hat{\vec{X}}_r^{(i)} = \vec{\mu}_r - A_1^{(i)}(\vec{X}_{r-1} - \vec{\mu}_r) - A_2^{(i)}(\vec{X}_{r-2} - \vec{\mu}_r) - A_{p_i}^{(i)}(\vec{X}_{r-p_i} - \vec{\mu}_r). \quad (10.4)$$

Моментная ошибка прогноза $e_r^{(i)}$ может быть выражена в виде квадрата евклидовой нормы вектора отклонения прогнозных отсчетов, вычисленных по параметрам АР модели i -го сигнала и наблюдаемого векторного случайного процесса в r -й момент наблюдения

$$e_r^{(i)} = \left| \hat{\vec{X}}_r^{(i)} - \vec{X}_r \right|^2 = \sum_{l=1}^L (X_{lr}^{(i)} - X_{lr})^2. \quad (10.5)$$

Значения моментных квадратов ошибок прогноза для N моментов наблюдения векторного случайного процесса $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_N^{(i)}$ используются для вычисления суммарной ошибки прогноза

$$S^{(i)} = \sum_{r=1}^N e_r^{(i)}. \quad (10.6)$$

Естественно предположить, что чем меньше суммарная ошибка прогноза, тем лучше набор параметров АР модели для i -го сигнала, использованный при прогнозе, описывает данную реализацию векторного случайного процесса. Поэтому можно считать, что наблюдаемая реализация векторного случайного процесса $\vec{X}_l$ относится к классу $\hat{i}$, если выполняется условие

$$\hat{i} = \arg \min_{i=1, \overline{M}} S^{(i)}. \quad (10.7)$$

Как показывают сравнительные исследования спектральных и авторегрессионных алгоритмов распознавания сигналов, такое же качество распознавания, что и у спектральных алгоритмов распознавания сигналов, можно получить с использованием авторегрессионного алгоритма распознавания, однако при меньшей длительности наблюдения сигналов. Это дает основание делать предположение, что рассмотренный выше авторегрессионный алгоритм распознавания объектов по выборкам дальностных портретов при том же качестве распознавания потребует меньшего времени наблюдения объектов, то есть меньшего объема пачки отраженных сигналов. Это очень важно для реальных условий радиолокационного распознавания объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы радиолокационного распознавания и их моделирование / Я.Д. Ширман, С.А. Горшков, С.П. Лещенко, Г.Д. Братченко, В.М. Орленко // Научно–технические серии. Радиолокация и радиометрия. – М.: ИПРЖ, 2000. – С. 5 – 64.
2. Безрук В.М., Лебедев О.Г. Метод радиолокационного распознавания типов объектов при широкополосном зондировании на основе векторной авторегрессионной модели // Прикладная радиоэлектроника. – Харьков, 2005. – Т.4, №3. – С. 336 – 339.
3. Шпилевский Э.К. Принципы динамической классификации стохастических процессов и систем // Статистические проблемы управления. – Вильнюс: ИМ АН Литвы, 1978. – Вып.28. – 139 с.

11 АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ СТАДИЙ СНА ПО ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММАМ

11.1 Введение

Изучение структуры сна и его нарушений занимает важное место в современной экспериментальной и клинической медицине. Анализ структуры ночного сна играет важную роль в диагностике заболеваний головного мозга. При функциональных заболеваниях нервной системы и при психозах жалобы на нарушения сна нередко бывают основными, а иногда и единственными. Исследование структуры ночного сна оказывается полезным и при анализе функции и механизмов сна. В частности, актуальными становятся исследования структуры сна в кардиологической клинике у больных ишемической болезнью сердца, поскольку опасные кризы сердечно-сосудистой системы – нарушения сердечного ритма, инфаркт миокарда – часто возникают во время ночного сна [1, 2].

При изменении функционального состояния мозга изменяется и характер его электрической активности. Установлено, что электроэнцефалограмма (ЭЭГ) может служить индикатором уровня бодрствования мозга и адекватно отражать глубину сна. Успехи, достигнутые в области изучения организации сна, тесно связаны с применением электроэнцефалографических методов исследования. Однако распознавание стадий сна по записи ЭЭГ связано со значительными затратами времени, труда и средств, поскольку запись ЭЭГ ночного сна занимает сотни метров бумажной ленты. Кроме того, при визуальном анализе используются только описательные критерии для идентификации стадий сна, что порождает расхождения среди специалистов при оценке моментов перехода между стадиями. Поэтому возникает необходимость объективизации и автоматизации процесса исследования структуры сна. Для этого могут быть использованы разные математические методы распознавания сигналов [2–5]. Однако автоматизированное определение стадий сна по ЭЭГ с использованием математических методов связано с определенными трудностями, вызванными близостью спектрального состава ЭЭГ для отдельных фаз и стадий сна, отличием соответствующих ЭЭГ у разных людей, наличием артефактов.

Возможны различные подходы к решению указанной задачи, которые определяются выбранным математическим описанием (математической моделью) ЭЭГ и соответствующим ему алгоритмом распознавания. Можно использовать спектральные методы распознавания стадий сна, основанные на описании ЭЭГ коэффициентами разложения в ряды по некоторым базисным функциям (дискретным экспоненциальным функциям, Уолша, Хаара) [1]. Известно также применение АР модели для описания ЭЭГ [2]. Это дает возможность синтезировать АР алгоритмы распознавания сигналов.

В данном разделе для учета влияния артефактов предложено использовать АР алгоритмы распознавания заданных сигналов при наличии класса неизвестных сигналов [6]. Это позволит снизить вероятность

ошибочных решений в задаче автоматического распознавания стадий сна в реальных условиях. Приведено описание предложенного АР метода распознавания стадий сна по ЭЭГ, а также некоторые результаты его исследований, проведенные путем статистического моделирования на выборках реализаций ЭЭГ для 6-ти характерных стадий сна.

Изложение материалов данного раздела основано на работе [6].

11.2 Математическая модель ЭЭГ и алгоритм распознавания стадий сна

Предполагается, что ЭЭГ для разных стадий сна адекватно описывается математической моделью в виде процесса АР

$$x[t] = \Phi^i[1]x[t-1] + \Phi^i[2]x[t-2] + \dots + \Phi^i[p]x[t-p] + \sigma^i a^i[t].$$

Параметры АР модели $A_i = (\Phi^i[1], \Phi^i[2], \dots, \Phi^i[p_i], \sigma^i, p_i)$ в каждый момент времени t удовлетворяют условиям стационарности и принадлежат к одному из M классов. Полагается, что параметры модели АР, выбранной для описания ЭЭГ, известны либо могут быть оценены по классифицированным обучающим выборкам реализаций ЭЭГ. Принято также считать, что параметры модели ЭЭГ остаются неизменными на значительном промежутке времени.

После получения очередного отсчета $x[t]$ реализации ЭЭГ при уже имеющихся отсчетах $\tilde{x}[t] = (x[t], \dots, x[t-T])$ необходимо ответить на вопрос, к какому классу принадлежит анализируемый участок ЭЭГ в момент времени $t \geq T$ (T – длительность анализируемого участка ЭЭГ). В [4] показано решение такой задачи методом последовательной классификации по максимуму правдоподобия. Считается, что параметры модели в момент времени t принадлежат классу $\hat{i}_t$, если выполняется система неравенств

$$L_{t, \hat{i}_t} (A_{\hat{i}_t} / \tilde{x}[t]) \geq L_{t,i} (A_i / \tilde{x}[t]), \quad i \neq \hat{i}_t, \quad i = 1, \dots, M, \quad (11.1)$$

где $L_{t,i}(A_i / \tilde{x}_t)$ – логарифмическая функция правдоподобия параметров.

Логарифмическая функция правдоподобия $L_{t,i}(A_i / \tilde{x}_t)$ имеет вид [5]

$$L_{t,i}(B_i / \tilde{x}[t]) = -T \ln \sqrt{2\pi(\sigma^i)^2} + \frac{1}{2(\sigma^i)^2} \sum_{j=T-p_i}^T (x[t] + \Phi^i[1]x[t-1] + \dots + \Phi^i[p_i]x[t-p_i])^2. \quad (11.2)$$

Следует заметить, что в решающем правиле (11.1) функцию правдоподобия $L_{t,i}(B_i / \tilde{x}[t])$, $i = 1, \dots, M$ необходимо вычислять для каждого момента времени t , из-за чего для принятия решений необходимо выполнять

значительный объем вычислений. Сокращение объема вычислений достигается при рекуррентном вычислении функции правдоподобия, хотя и в этом случае процесс принятия решения оказывается очень трудоемким с точки зрения вычислительных затрат.

В ряде практических случаев длительность интервала времени анализа ЭЭГ T , по которому следует принимать решение, оказывается значительно меньше интервала времени постоянства параметров модели АР, выбранной для описания ЭЭГ. При этом можно предложить более простое по затратам решение поставленной задачи автоматизированного распознавания стадий сна с использованием рассмотренных в главе 8 авторегрессионных алгоритмов распознавания сигналов. Кроме того, для учета появляющихся в реальных условиях работы артефактов в решающем правиле распознавания предлагается ввести дополнительный $(M + 1)$ -й класс неизвестных сигналов [6]. С учетом выражения для многомерной плотности вероятности для гауссовых авторегрессионных последовательностей алгоритм автоматизированного распознавания M заданных стадий сна по ЭЭГ при наличии класса неизвестных сигналов определяется соотношением (8.35).

Согласно этому алгоритму распознавания решение в пользу i -й стадии сна принимается в два этапа: при выполнении хотя бы одного из неравенств (8.35, а), а также при выполнении системы неравенств (8.35, б). Когда выполняются неравенства (8.35, в), решение принимается в пользу $(M + 1)$ -го класса неизвестных сигналов.

В алгоритме распознавания (8.36) полагаются известными параметры АР моделей. При неизвестных параметрах следует получить их оценки по классифицированным обучающим выборкам ЭЭГ для заданных стадий сна. При этом данный алгоритм работает в двух режимах: обучения и распознавания. В режиме обучения по классифицированным выборкам ЭЭГ для заданных стадий сна вычисляются оценки корреляционных функций, через которые определяются параметры модели АР (в частности из уравнения Юла–Уокера). На этапе распознавания по предъявленной для анализа реализации ЭЭГ длительностью T принимается решения о принадлежности ее к одному из M классов (соответствующих стадиям сна) либо принимается решение о ее принадлежности к классу неизвестных сигналов.

Геометрический смысл правила распознавания заданных стадий сна согласно (8.35) состоит в том, что для ЭЭГ заданных стадий сна в пространстве сигналов строятся замкнутые собственные области. При попадании наблюдений в одну из собственных областей принимается решение в пользу соответствующей стадии сна. В противном случае наблюдаемая реализация ЭЭГ относится к $(M + 1)$ -му классу неизвестных сигналов.

Решающее правило (8.35) можно обобщить на случай принятия решений по ЭЭГ, поступающих из нескольких каналов регистрации. Для описания такой совокупности ЭЭГ может быть использована более сложная математическая модель в виде векторного процесса авторегрессии.

11.3 Результаты исследований автоматического распознавания стадий сна по ЭЭГ

В разделе 8 на выборках гауссовых случайных сигналов с различными корреляционными функциями были проведены исследования практических особенностей и рабочих характеристик авторегрессионных алгоритмов распознавания сигналов. Практический интерес представляет проведение исследований предложенного алгоритма распознавания заданных сигналов при наличии неизвестных сигналов для случая решения задачи распознавания стадий сна по ЭЭГ. Класс неизвестных сигналов определяется разными артефактами.

Приведем некоторые результаты исследований алгоритма распознавания стадий сна (8.35), которые выполнены на выборках реализаций ЭЭГ для 6-ти стадий сна. В табл. 11.1 приведены параметры АР модели, которые были получены по реальным ЭЭГ для каждой из 6-ти стадий сна [2].

Таблица 11.1 – Значения параметров авторегрессионной модели, полученные по реальным ЭЭГ для 6-ти разных стадий сна

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
σ_i	25.4	18.3	21.5	15.7	15.9	11.23
a_1	-0.61	-0.51	-0.24	0.06	0.12	-0.38
a_2	-0.67	-0.42	-0.33	-0.18	-0.5	-0.26
a_3	-0.75	-0.37	-0.25	-0.13	-0.11	-0.33
a_4	-0.62	-0.24	-0.06	0.08	0.09	-0.28
a_5	-0.32	-0.13	-0.06	0.03	0.07	-0.17
a_6	-0.16	-0.17	-0.17	-0.04	-0.04	-0.12
a_7	-0.17	-0.22	-0.14	-0.08	-0.06	-0.16
a_8	-0.15	-0.18	-0.05	-0.02	-0.01	-0.15
a_9	-0.09	-0.13	-0.05	-0.04	-0.01	-0.09
a_{10}	-0.03	-0.04	-0.05	-0.01	-0.01	-0.03

На рис. 11.1 для иллюстрации приведены полученные с помощью этой модели реализации ЭЭГ для разных стадий сна.

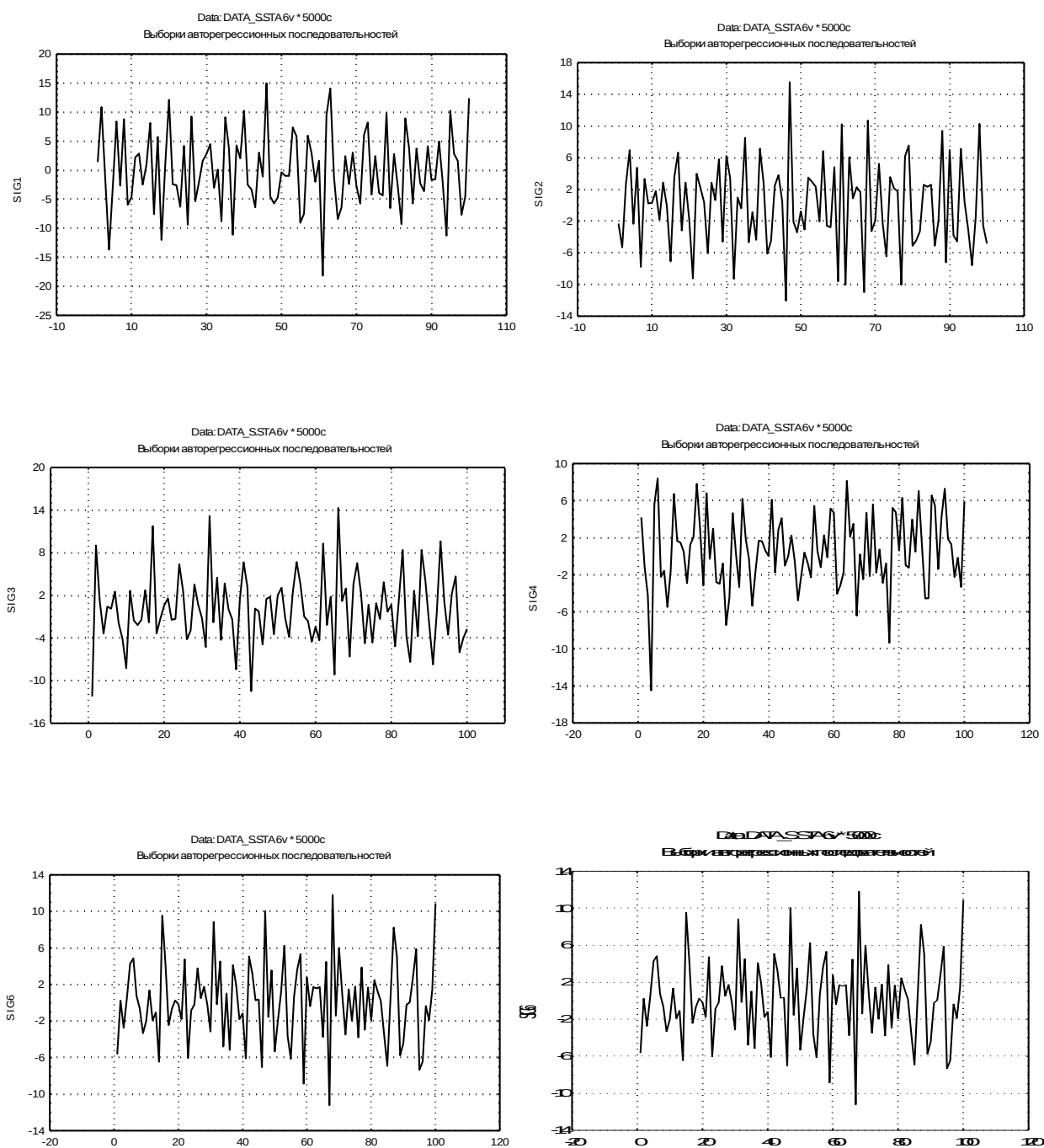


Рисунок 11.1 – Выборки реализаций ЭЭГ для 6-ти стадий сна

Соответствующие им энергетические спектры ЭЭГ приведены на рис.11.2.

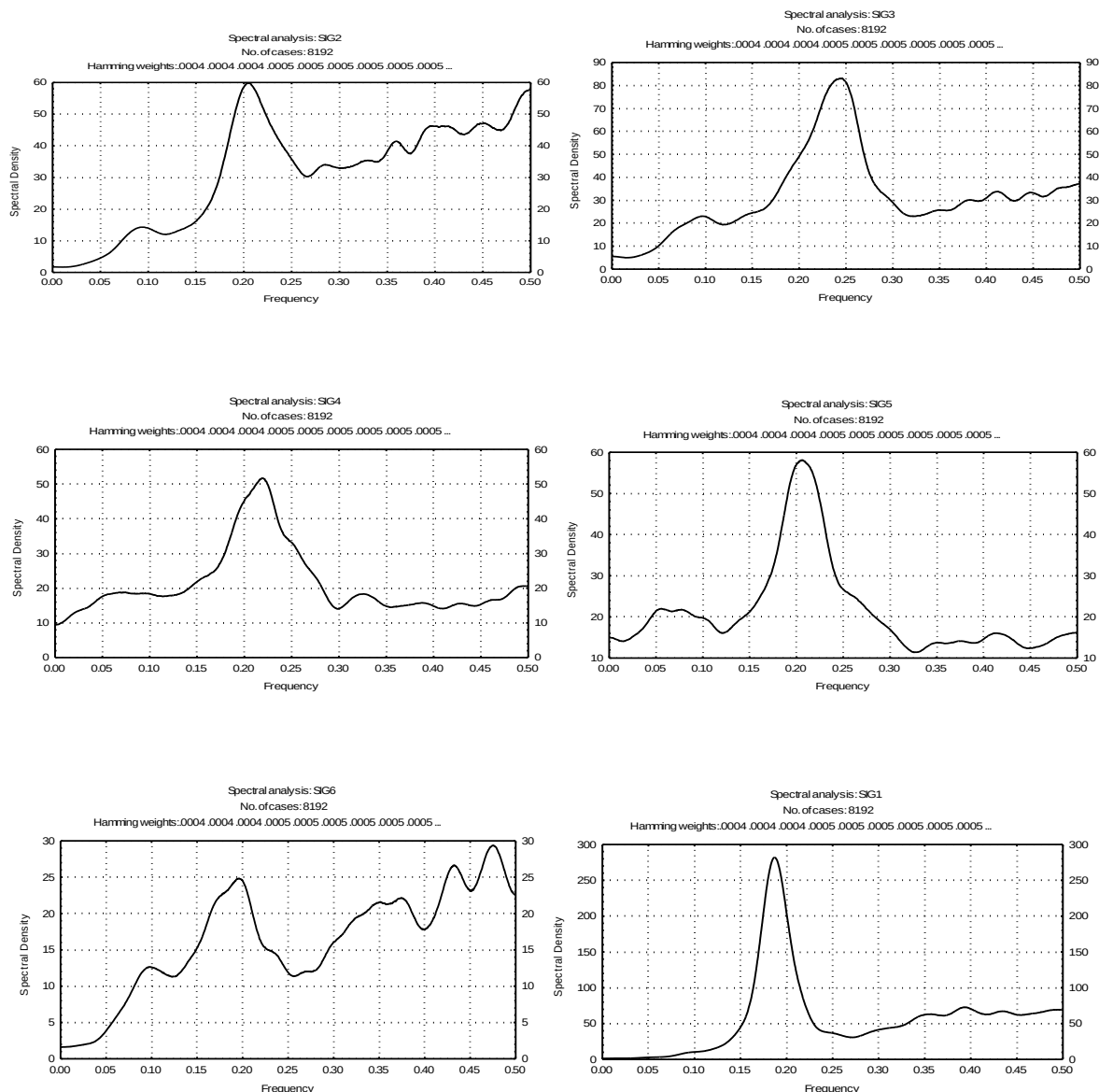


Рисунок 11.2 – Энергетические спектры ЭЭГ для 6-ти стадий сна

При исследованиях использовались выборки реализаций ЭЭГ объемом по 50000 отсчетов для каждой из 6-ти стадий сна. По классифицированным обучающим выборкам ЭЭГ найдены параметры решающего правила распознавания. Контрольные выборки использованы при исследованиях практических особенностей решения задачи автоматизированного распознавания стадий сна по ЭЭГ. Исследована зависимость качества распознавания стадий сна от значений интервала наблюдения ЭЭГ T , по которому производится принятие решения о текущей стадии сна (рис. 11.3).

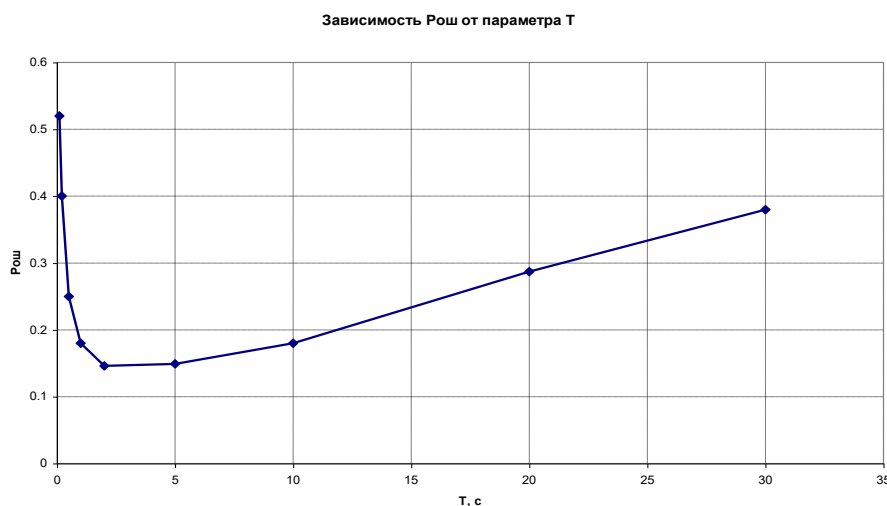


Рисунок 11.3 – Зависимость средней вероятности ошибочного распознавания стадий сна от длительности интервала ЭЭГ, используемой для принятия решений

Получено минимальное значение средней вероятности ошибочного распознавания стадий сна $P_{ош.ср.} = 0.15$.

В результате предъявления на распознавание контрольных выборок ЭЭГ для разных стадий сна получены диаграммы изменений стадий сна, удобные для оперативного анализа структуры сна пациента и последующей постановки диагноза. Один из фрагментов диаграммы приведен на рис. 11.4.

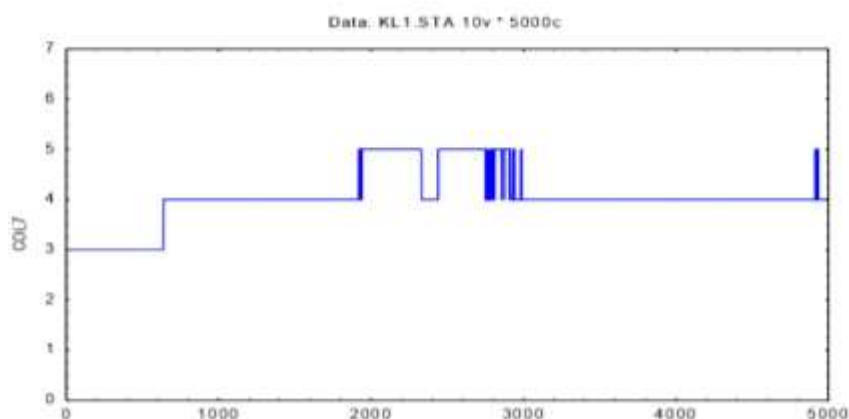


Рисунок 11.4 – Диаграмма изменений стадий сна, полученная по результатам распознавания выборок ЭЭГ

При распознавании наблюдаемой ЭЭГ решение принимается либо в пользу одной из стадий сна, либо в пользу класса неизвестных наблюдений. Такой подход к распознаванию стадий сна позволяет снизить вероятность ошибочных решений в реальных условиях при появлении различного рода артефактов. Метод распознавания стадий сна по ЭЭГ может быть использован

при создании автоматизированных систем информационной поддержки для диагностики заболеваний нервной и сердечно-сосудистой систем.

С целью дальнейшего уменьшения вероятности ошибочного распознавания стадий сна следует использовать для принятия решений ЭЭГ, получаемых из нескольких каналов (8 или 16). При этом следует применить для математического описания ЭЭГ векторную AP модель и использовать соответствующий алгоритм распознавания ЭЭГ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю.П. Распознавание образов в медицинской диагностике. – М.: Наука, 1985. – 376 с.
2. Липейка А., Малинаускас В., Гринявичус К., Лесене В. Автоматическое определение стадий сна по электроэнцефаллограмме // Статистические проблемы управления. – Вильнюс: УМ АН Лит ССР, 1981. – Вып.51. – С.85–97.
3. Клитене Н., Телькснис Л. Методы обнаружения моментов измерения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика. – 1983. – №10. – С.13–18.
4. Мисюкас М. Несколько конструктивных выражений асимптотически байесовских классификаторов в явном виде для гауссовских стационарных временных рядов // Статистические проблемы управления. – Вильнюс: ИМ АН Литвы, 1985. – Вып. 69. – С.81–87.
5. Липейко А. Классификация авторессионных последовательностей со скачкообразно меняющимися параметрами // Статистические проблемы управления. – 1978. – Вып. 30. – С.9–27.
6. Безрук В.М., Коваленко Н.П., Лысенко В.А. Об одном методе распознавания стадий сна по электроэнцефалограммам на основе авторегрессионной модели // Бионика интеллекта. – 2005. – №1. – С. 45–48.

12 СЕЛЕКЦИЯ И РАСПОЗНАВАНИЕ РАДИОСИГНАЛОВ ПРИ АВТОМАТИЗИРОВАННОМ РАДИОКОНТРОЛЕ

12.1 Введение

Важной задачей обработки информации, которая возникает при проведении автоматизированного радиоконтроля (РК) является селекция и распознавание заданных радиоизлучений по соответствующим им радиосигналам [1–3]. С учетом постоянного усложнения радиоэлектронной обстановки выдвигаются жесткие требования к тактико–техническим характеристикам автоматизированных средств радиоконтроля (РК), в частности, к системе распознавания радиосигналов. Необходимо при сохранении высокого качества распознавания радиосигналов повышать быстродействие системы распознавания. С учетом высокого быстродействия современных вычислительных устройств, реализующих алгоритмы распознавания сигналов, быстродействие системы распознавания в основном определяется требуемой длительностью наблюдения сигналов для обеспечения заданного качества распознавания.

Вид алгоритмов распознавания и их показатели качества во многом определяются вероятностной моделью, которая используется для описания радиосигналов. При решении задач автоматизированного РК широко применяется спектральное представление сигналов, которое основано на вероятностной модели сигналов в виде ортогональных разложений. Использование этой модели приводит к спектральным алгоритмам распознавания сигналов [4].

В данной главе исследуются возможности решения задачи селекции и распознавания заданных радиосигналов при наличии неизвестных сигналов с использованием алгоритмов распознавания сигналов на основе АР модели, которая при определенных условиях позволяет обеспечить преимущества алгоритмов распознавания сигналов. Проведены сравнительные исследования предложенных АР алгоритмов распознавания с известными спектральными алгоритмами распознавания сигналов. Сравнение алгоритмов распознавания выполнено методом статистического моделирования на выборках радиосигналов, характерных для задач РК. Изложение материала основано на работах [5, 6].

12.2 Особенности представления радиосигналов авторегрессионной моделью

В ряде случаев распознаваемые радиосигналы при РК удобно описывать АР моделью (8.18). АР модель может быть использована для описания реальных радиосигналов с энергетическим спектром, характеризующимся наличием ярко выраженных экстремумов, число которых меньше или достигает порядка этой модели (8.20). Поэтому представление АР моделью удобно применять для описания весьма широкого класса радиосигналов, характерных для

задач РК. Известны аналитические выражения для многомерных плотностей вероятности гауссовых авторегрессионных случайных процессов, полученные через параметры АР модели. В частности, как следует из (8.20), при выполнении условия $L > p$ выражение для многомерной плотности вероятности имеет вид:

$$W(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{L/2} \sigma^{L-p} |R_p|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{l=p+1}^L \left[x|l| - \mu - \sum_{j=1}^p \phi|l|(x|l| - \mu) \right]^2 \right\}$$

Для многих практических задач РК порядок модели процессов p оказывается небольшим (единицы, десятки) при длине последовательности L , достигающей сотен и даже тысяч дискретных отсчетов сигналов. Это позволяет при использовании АР модели получить «экономное» описание сигналов с точки зрения реализационных затрат, поскольку именно размерность описания в основном определяет объемы вычислений и памяти при реализации алгоритмов обработки сигналов средствами вычислительной техники. С другой стороны, может быть обеспечено повышение разрешающей способности спектрального представления сигналов при заданной длительности наблюдаемых сигналов. Либо при заданном спектральном представлении, обеспечивающим качество распознавания сигналов, может быть уменьшена длительность наблюдения сигналов, что обеспечивает повышение быстродействия распознавания сигналов.

12.3 Постановка и решение задачи селекции и распознавания заданных радиосигналов на основе авторегрессионной модели

Пусть распознаванию подлежат M заданных сигналов с дискретным временем наблюдений $\vec{x}^i = \begin{pmatrix} x_1^i, x_2^i, \dots, x_L^i \end{pmatrix}$, предъявляемых с вероятностями P_i , $i = \overline{1, M}$. Существует параметрическая априорная неопределенность относительно плотностей распределений сигналов, однако могут быть получены классифицированные обучающие выборки реализаций сигналов x_r^i , $r = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, M}$.

Кроме заданных сигналов на распознавание могут поступать неизвестные сигналы из $(M + 1)$ -го класса, для которых не представляется возможным получить обучающие выборки сигналов.

Общий вид алгоритма распознавания сигналов для решения такой нетрадиционной задачи распознавания сигналов в условиях повышенной априорной неопределенности, приведен в п. 8.1. При использовании моделей АР для описания реальных радиосигналов общий вид решающего правила распознавания сигналов конкретизируется с учетом соответствующего выражения для плотности вероятности АР процессов.

В частности, решающее правило селекции и распознавания заданных радиосигналов определяется соотношениями (8.36).

Согласно этому правилу, решение в пользу i -го заданного радиосигнала принимается в два этапа: при выполнении хотя бы одного из неравенств (8.36, а), а также при выполнении системы неравенств (8.36, б). Когда выполняются неравенства (8.36, в), решение принимается в пользу неизвестных сигналов из $(M + 1)$ -го класса.

В указанном решающем правиле полагается, что параметры АР моделей для M заданных радиосигналов известны. При неизвестных параметрах АР моделей необходимо получить их оценки хорошо развитыми методами, в частности, методом Юла–Уокера.

При этом по классифицированным обучающим выборкам вычисляются корреляционные функции заданных радиосигналов, а затем из решения соответствующего уравнения Юла–Уокера находятся параметры АР модели, которые являются параметрами решающего правила (8.36).

В ряде случаев для принятия решений может быть использовано более простое решающее правило, основанное на использовании в качестве информативных признаков распознавания оценок параметров АР модели для каждого сигнала. С учетом того, что распределение оценок параметров АР модели может быть аппроксимировано гауссовым законом, а также в предположении некоррелированности и близости дисперсии оценок параметров АР модели может быть использовано решающее правило (8.36).

12.4 Оценивание рабочих характеристик алгоритмов распознавания радиосигналов

Для сравнительного анализа алгоритмов распознавания радиосигналов исследованы их рабочие характеристики методом статистического моделирования на выборках радиосигналов с различным видом и параметрами модуляции, характерных для задачи РК (табл. 12.1). Выборки реализаций радиосигналов получены путем моделирования на ЭВМ методом комплексной огибающей. Для смоделированных радиосигналов размерность исходного описания составляла $L = 512$ дискретных отсчетов. При этом накоплены объемы обучающих и контрольных выборок для каждого сигнала по 1000 реализаций. На рис. 12.1 приведены энергетические спектры этих сигналов.

Таблица 12.1 – Сведения о радиосигналах, используемых при исследованиях алгоритмов распознавания РИ

Номер сигнала	Описание радиосигналов
1	Белый шум
2	АТ–100 Бод
3	АТ–50 Бод
4	ОФТ–100 Бод
5	ЧТ2–100 Бод –200Гц
6	ЧТ4–100 Бод –200Гц
7	ЧТ2–50 Бод –200Гц
8	ЧТ4–50 Бод –200Гц
9	ОФТ–50 Бод
10	ОФТ–25 Бод
11	АТ–25 Бод

Примечание: В описании радиосигналов указаны тип модуляции (АТ – амплитудная телеграфия, ЧТ – частотная телеграфия, ОФТ – относительно фазовая телеграфия); скорость манипуляции (в Бод); частотный разнос (в Гц)

Для проведения исследований разработан программный комплекс, включающий модуль получения обучающих и контрольных выборок реализаций радиосигналов, модуль оценивания параметров решающих правил на этапе обучения, а также модуль оценивания рабочих характеристик алгоритмов в режиме распознавания методом статистических испытаний.

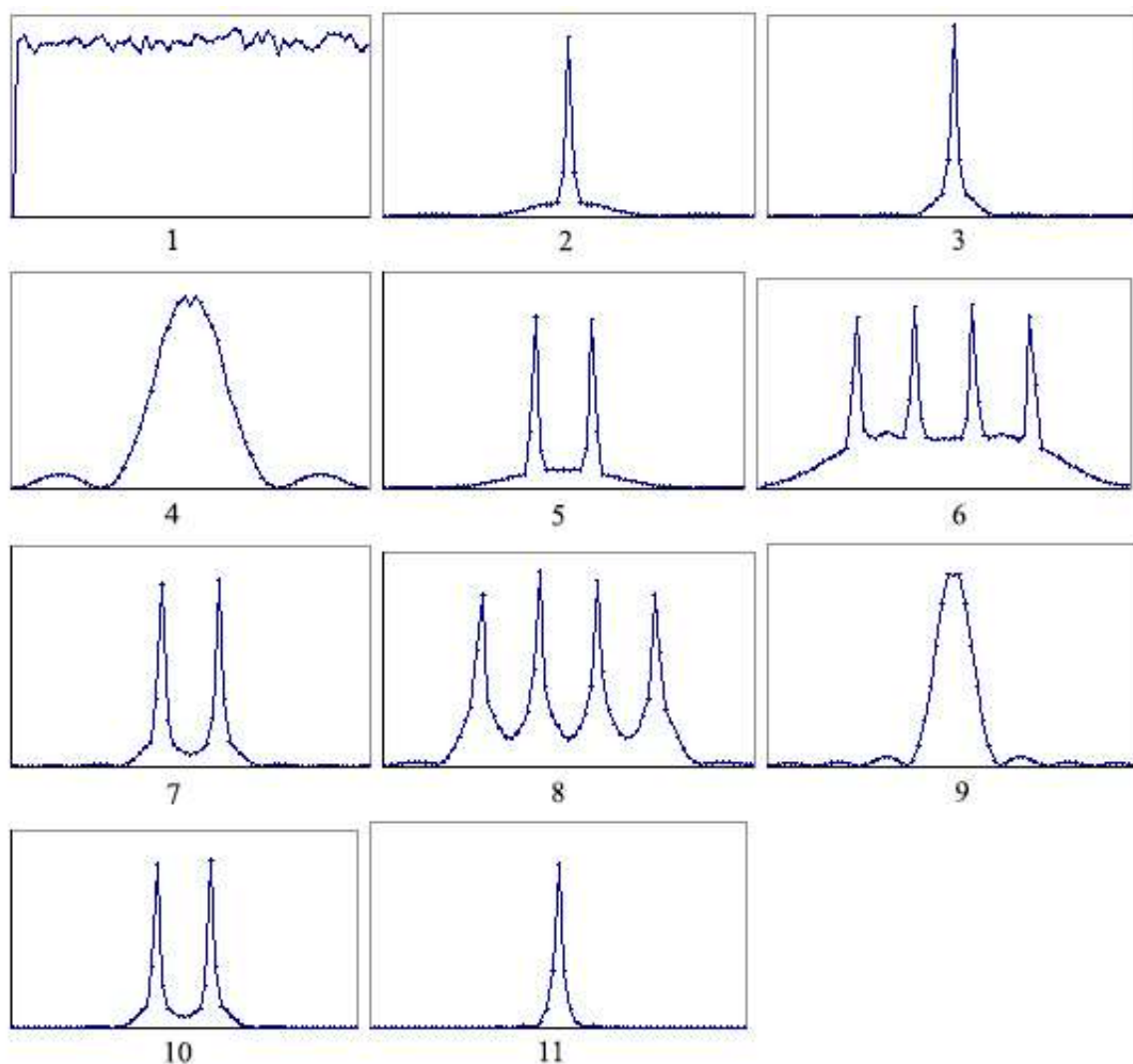


Рисунок 12.1 – Энергетические спектры радиосигналов, использованных при исследованиях

Исследовано влияние порядка используемой АР модели на качество распознавания радиосигналов. Вначале для упрощения рассматривалось решение классической задачи распознавания M сигналов (без учета $M+1$ -го класса), которое определяется соотношениями (8.35, б). Получена зависимость оценки средней вероятности ошибочного распознавания M сигналов $\hat{P}_{ош\ ср.}$ от используемого порядка АР модели p (рис. 12.2). При этом для распознавания использованы все радиосигналы, указанные в табл. 12.1.

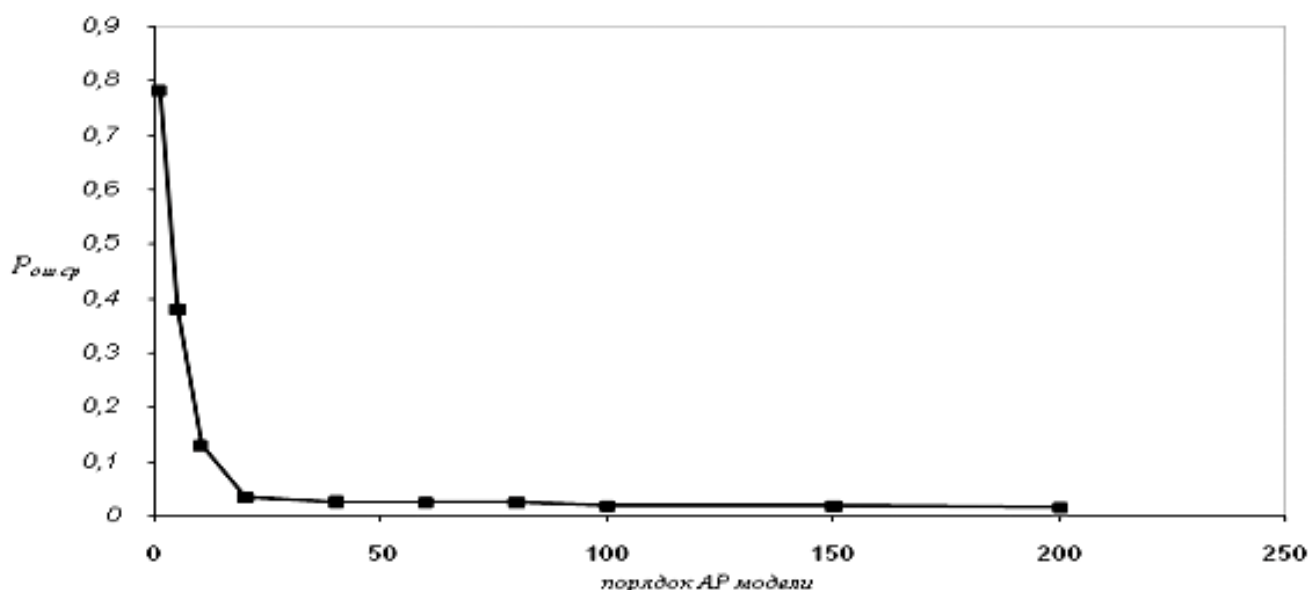


Рисунок 12.2 – Зависимость средней вероятности ошибочного распознавания от порядка АР модели сигналов

Из полученной зависимости видно, что для порядка АР модели $p=20$ достигается достаточно высокое качество распознавания сигналов. Дальнейшее увеличение порядка модели p лишь незначительно снижает $\hat{P}_{ош ср.}$. Это свидетельствует о достаточно высокой информативности описания радиосигналов АР моделью относительно небольшого порядка.

Далее были получены оценки рабочих характеристик распознавания с помощью того же решающего правила (8.36, б) в виде зависимости $\hat{P}_{ош ср.}$ от длительности реализаций радиосигналов T_n , необходимой для распознавания при $p=20$ (рис. 12.2). Видно, что при $T_n > 1,8с$ увеличение длительности реализаций распознаваемых сигналов незначительно влияет на качество их распознавания. Полученная зависимость $\hat{P}_{ош ср.} = f(T_n)$ фактически представляет собой диаграмму обмена показателей качества распознавания сигналов и быстродействия системы распознавания, которое в основном определяется временем наблюдения реализаций сигналов. На рис. 12.2 приведена также зависимость $\hat{P}_{ош ср.} = f(T_n)$ для случая использования одного из спектральных алгоритмов распознавания по минимуму евклидоваго расстояния до эталонов в пространстве оценок энергетических спектров сигналов в базисе дискретных экспоненциальных функций. Оба алгоритма учитывают различие распознаваемых сигналов на уровне их корреляционных функций и соответствующих им энергетических спектров.

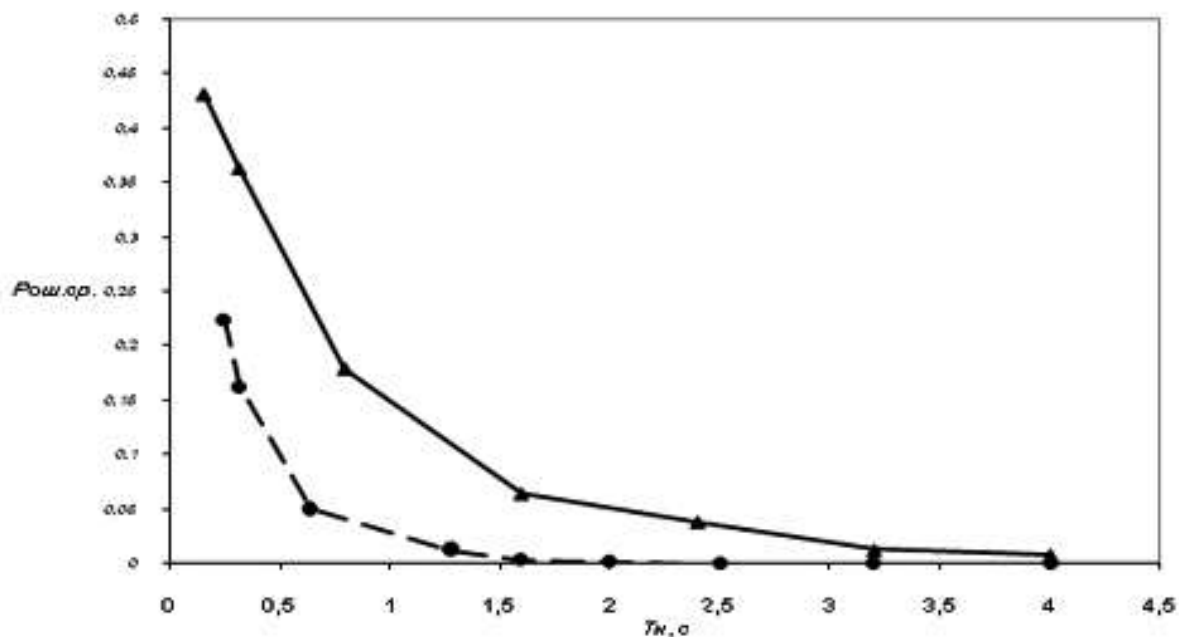


Рисунок 12.3 – Зависимости $P_{ош.ср.}$ от длительности реализаций сигналов для авторегрессионного и спектрального алгоритмов распознавания (соответственно пунктирная и сплошная линия)

Из сравнения полученных рабочих характеристик следует, что авторегрессионный алгоритм распознавания обладает преимуществом с точки зрения быстродействия распознавания сигналов. Например, для обеспечения $\hat{P}_{ош.ср.}=0,1$ с помощью спектрального алгоритма распознавания требуется длительность реализации сигнала T_n почти в 3 раза больше, чем для авторегрессионного алгоритма распознавания. Таким образом, применение АР алгоритма распознавания при заданном качестве распознавания радиосигналов может обеспечить повышение быстродействия распознавания, которое в случае реализации алгоритмов высокопроизводительными вычислительными средствами в основном определяется временем наблюдения распознаваемого сигнала.

Исследованы также показатели качества решения задачи распознавания M заданных радиосигналов при наличии радиосигналов из $(M+1)$ -го класса с применением полного алгоритма распознавания (8.30). В качестве M заданных сигналов использовались сигналы №1–6 (табл. 12.1), остальные пять сигналов представляли $(M+1)$ -й класс неизвестных сигналов. Оценивались такие показатели качества распознавания радиосигналов: $P_{н/з}$ – вероятность ошибочных решений о приеме неизвестных сигналов из $(M+1)$ -го класса при условии предъявления M заданных сигналов; $P_{з/н}$ – вероятность ошибочных решений о действии M заданных сигналов при условии предъявления неизвестных

сигналов из $(M + 1)$ -го класса. В результате исследований получены диаграммы обмена показателей качества распознавания в виде зависимости оценок $P_{н/з}$ от $P_{з/н}$ при различных длительностях реализаций сигналов $L=256$ и $L=512$ (рис. 12.3).

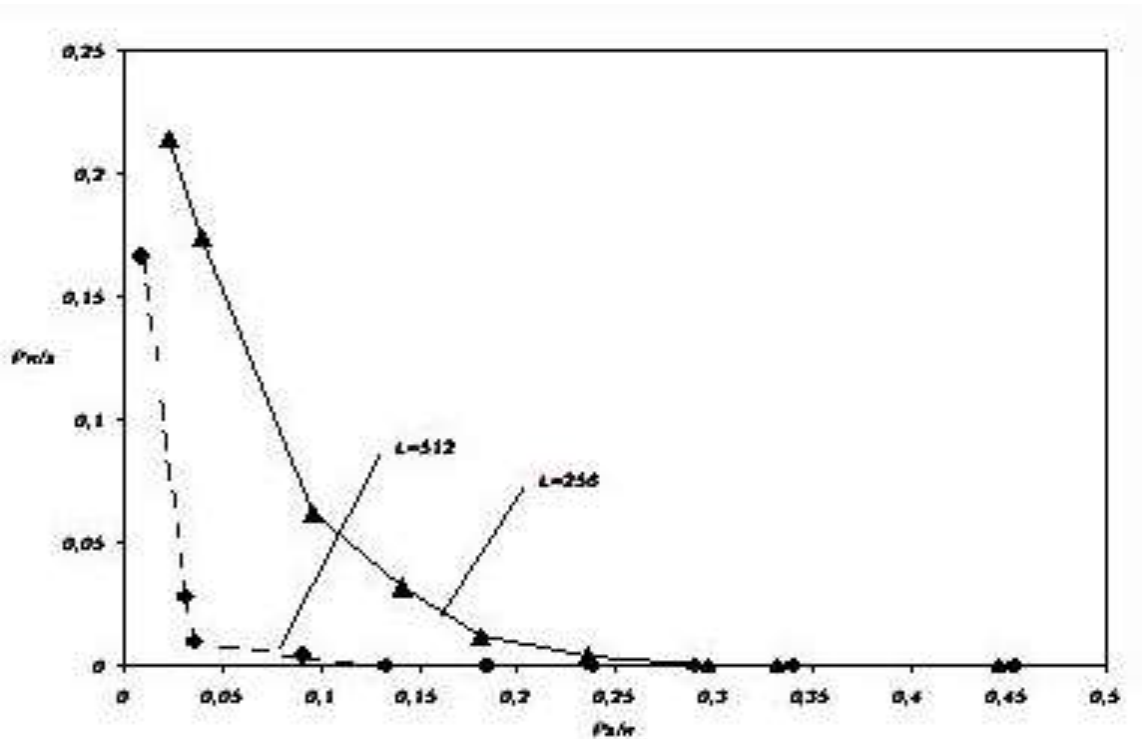


Рисунок 12.3 – Диаграммы обмена ошибок распознавания заданных радиосигналов при наличии неизвестных сигналов $P_{з/н}$, $P_{н/з}$ для разных значениях L

Эти зависимости показывают, что уменьшение потенциально возможного значения одного из показателей качества распознавания может быть достигнуто лишь за счет ухудшения значения другого показателя. Такой обмен значений взаимосвязанных и антагонистических показателей качества распознавания радиосигналов может осуществляться изменением пороговых значений Λ_k в решающем правиле (8.35).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коханович Г. Ф., Бабак В.П., Фисенко В.М. Специальный радиомониторинг. – Киев: МК–Прес, 2007. – 384 с.
2. Слободянюк П.В., Благодарный В.Г. Радиомониторинг: вчера, сегодня, завтра (Теория и практика построения системы радиомониторинга). – Прилуки: ООО «Издательство «Air–Поліграф», 2010. – 296 с.
3. Рембовский А.М., Ашихмин А.В., Козьмин В.А. Радиомониторинг: задачи, методы, средства. – М.: Горячая линия, Телеком, 2012. – 641 с.
4. Омельченко В.А. Основы спектральной теории распознавания сигналов. – Харьков: Вища школа, 1983. – 156 с.
5. Безрук В.М., Певцов Г.В. Теоретические основы проектирования систем распознавания сигналов для автоматизированного радиоконтроля. – Харьков: Колегиум, 2006. – 430 с.
6. Омельченко В.А., Безрук В.М., Коваленко Н.П. Распознавание заданных радиосигналов при наличии неизвестных сигналов на основе авторегрессионной модели // Радиотехника. – 2001. – Вып.123. – С.195–199.

13 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

13.1 Введение

Успешное решение многих теоретических и прикладных задач статистической радиотехники в подавляющем большинстве связано с выбором гауссовых моделей анализируемых процессов. При таком подходе, во многих случаях оправданном, широко применяется закон больших чисел и предельные теоремы. Также существенно упрощаются вопросы нахождения многомерных плотностей вероятности коррелированных случайных процессов, интервальных оценок параметров, проверки статистических гипотез и статистические выводы. Однако, в рамках корреляционной теории полностью описываются только гауссовы процессы.

В статистической радиотехнике все чаще исследуются задачи учета негауссовых свойств сигналов и помех в методах анализа и в системах обработки сигналов. Развитие современной радиотехники свидетельствует о том, что многие случайные процессы и сигналы в океанографии, геофизике, науках о Земле, пассивной гидролокации, биомедицине, связи, а также временные ряды в экономике являются негауссовыми и характеризуются более сложными статистическими связями, чем корреляционные. Негауссовыми помехами являются атмосферные, модулированные и хаотические импульсные помехи, некоторые виды пассивных помех, в частности, от земной и морской поверхности, импульсные и сосредоточенные помехи в каналах связи. При наличии негауссовых помех многие оптимальные алгоритмы обработки становятся неоптимальными, т.к. они были получены в предположении гауссовых помех. На современном этапе развития радиолокации, радионавигации, космической связи, телеметрии, радиоизмерительной техники при решении практических задач внедряются методы оптимальной оценки параметров обрабатываемого сигнала при наличии мультипликативно-аддитивных помех с произвольным характером распределений.

В последние годы исследования негауссовых моделей случайных процессов привели к формированию самостоятельного научного направления. Существенный вклад в эти исследования внесли Г. Крамер, Д. Миддлтон, Р.Л. Стратонович, Ю.Г. Сосулин, Б.Р. Левин, М. Кендалл, А. Стьюарт, Я.З. Цыпкин, В.С. Пугачев, В.Г. Валеев, А.Ф. Фомин, В.Я. Конторович, Ш.М. Чабдаров, К.К. Васильев, О.И. Шелухин, Ю.П. Кунченко и др.

Негауссовы процессы полностью описываются либо набором одномерных и многомерных плотностей вероятности, либо наборами моментных или кумулянтных функций. Многомерные плотности вероятности эффективно использовать для характеристики негауссова белого шума. Для описания статистически связанных негауссовых процессов сложно найти аналитические выражения для многомерных плотностей вероятностей, а также их оценки. Моментные и кумулянтные функции рационально

использовать для описания статистически связанных негауссовых процессов. Оценки моментных функций определяются методом статистического усреднения. Кумулянтные функции получают по оценкам моментных функций.

Методы исследований негауссовых процессов можно разделить на два направления. К первому относятся те направления исследований, которые используют одномерные и многомерные функции распределения, например, для нахождения функции правдоподобия или анализа марковских негауссовых процессов. Ко второму направлению относятся исследования негауссовых процессов на основе моментных и кумулянтных функций, которые определяют спектры высших порядков. Значительный вклад в это направление внесли А.Н. Ширяев, В.П. Леонов, Д. Бриллинджер, М. Розенблатт, А.Н. Колмогоров, А.Н. Малахов, И.Г. Журбенко, Ю.П. Кунченко и др.

Несмотря на определенные успехи, эти направления имеют недостатки и ограничения. К ним, в частности, относятся: отличие реальных и теоретических распределений негауссовых процессов, нестационарность распределений, неточность модели марковских процессов, сложности оценивания многомерных распределений, большие размерности моментных и кумулянтных функций, несостоятельность спектральных оценок высших порядков, наличие боковых лепестков в спектральных оценках и их многомерность. Таким образом возникает противоречие между необходимостью учета негауссовых характеристик процессов для оптимальной обработки и сложностью их описания многомерными статистическими характеристиками. Поэтому необходимы новые методы и модели негауссовых процессов, позволяющие синтезировать эффективные, достаточно простые устройства обработки. Примерами таких методов служат полигауссовская модель процессов (Ш.М. Чабдаров), применение функциональных полиномов для оценки параметров негауссовых сигналов (Ю.П. Кунченко). Однако решение проблемы представления негауссовых процессов этими методами не исчерпывается и необходимы новые статистические модели, позволяющие решать прикладные задачи статистической радиофизики.

Рассматриваемые в работе обобщенные параметрические модели динамических процессов, основываются на моментных и кумулянтных функциях произвольного порядка. В разделе приводятся основные положения теории вероятности негауссовых процессов. Материал подбирался таким образом, чтобы при знакомстве с обобщенными моделями линейного предсказания, свести к минимуму обращение читателя к дополнительному материалу на первом этапе ознакомления.

13.2 Случайные величины и функции

Случайные процессы являются результатом элементарных случайных событий. Элементарные события $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – это множество всех исходов вероятностного эксперимента. Случайная величина ξ_ω – это отображение пространства элементарных событий в пространство чисел.

Случайной функцией $\xi(t)$ называется такая функция, которая при любом фиксированном параметре t принимает случайное значение. Если параметр t является временем, то случайная функция называется случайным процессом. При непрерывных значениях t процесс также непрерывен и будет обозначаться $\xi(t)$. Если t принимает дискретный ряд значений, случайный процесс называется дискретным и обозначается $\xi(i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Среди случайных процессов выделяют временные ряды – последовательности наблюдений, обычно упорядоченных во времени.

Для описания случайных величин используются вероятностные характеристики. Вероятностной характеристикой полностью описывающей случайный процесс является ее функция распределения $F(x)$, устанавливающая связь между возможными значениями случайной величины и вероятностью ее появления. Значение функции распределения в точке x равно вероятности того, что при проведении эксперимента случайная величина ξ окажется меньше, чем x

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Функция распределения случайной величины выражается через плотность вероятности $p(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du,$$

из чего следует их обратная связь

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Для случайного вектора $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ функция распределения определяется выражением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n.$$

Наряду с законом распределения случайные величины можно описывать более простыми числовыми характеристиками. Приведем определения

основных числовых характеристик непрерывных и дискретных случайных величин.

Математическое ожидание случайной величины ξ (среднее значение или первый момент) определяется выражениями

$$E(\xi) = m_{1\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx,$$

$$E(\xi) = m_{1\xi} = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Математическое ожидание функции $g(x)$ от случайной величины ξ с плотностью вероятности $p(x)$ равно

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx,$$

$$E\{g(x)\} = \sum_{i=1}^n g(x_i)p_i.$$

Разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием называется центрированной случайной величиной. Центральный момент s -го порядка случайной величины ξ определяется как

$$m_s = E\left\{\left(x - m_{1\xi}\right)^s\right\}, s \geq 2. \quad (13.1)$$

Первый центральный момент μ_1 , как видно из (13.1), всегда равен нулю. Второй центральный момент m_2 называется дисперсией случайной величины и определяются выражениями

$$D_2 = m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_{1\xi}\right)^2 p(x)dx,$$

$$D_2 = m_2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i - m_{1\xi}\right)^2 p_i.$$

Среднеквадратическое отклонение случайной величины равно

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{m_2}.$$

Среднеквадратическое отклонение и дисперсия случайной величины характеризуют ее разбросанность относительно математического ожидания.

13.3 Числовые характеристики случайных функций

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией $\xi(t)$ в результате проведения некоторого опыта, называется ее реализацией $x(t)$. Случайная функция $\xi(t)$ может быть представлена при каждом значении аргумента t случайными величинами, называемыми сечениями случайной функции $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$. Основные характеристики случайной функции $\xi(t)$ являются характеристиками системы бесконечного множества случайных величин, представляющих собой сечения случайных функций. Одномерная плотность вероятности $p(x, t)$ случайной функции это функция двух аргументов, которая при конкретном значении t является плотностью вероятности соответствующего сечения. Однако одномерный закон распределения не отражает зависимости между отдельными сечениями случайной функции и поэтому не полностью характеризует случайную функцию. Полной характеристикой функции будет бесконечный набор многомерных плотностей вероятности. n -мерная плотность вероятности описывает систему n сечений и зависит от $2n$ аргументов $p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$. Лишь в случае гауссовых случайных функций можно сравнительно просто найти полный набор многомерных плотностей вероятностей. Для негауссовых процессов это сделать практически невозможно. В связи с этим интерес представляет использование кумулянтных и моментных функций, бесконечный набор которых также полностью описывает случайную функцию. Центральные n -мерные моментные функции s -го порядка определяются формулами

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_v}(t_1, t_2, \dots, t_n) = E \left\{ [x(t_1) - m_1(t_1)]^{k_1} \dots [x(t_n) - m_1(t_n)]^{k_v} \right\},$$

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_v}[i, j, \dots, n] = E \left\{ [x[i] - m_1[i]]^{k_1} \dots [x[n] - m_1[n]]^{k_v} \right\},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_v = s.$$

Математическое ожидание является начальным моментом первого порядка случайной функции

$$m_1(t) = E\{x(t)\},$$

$$m_1[i] = E\{x[i]\}.$$

Начальный момент второго порядка называется ковариационной функцией

$$K(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\},$$

$$K[i, j] = E\{x[i]x[j]\}.$$

Центральный момент второго порядка называется корреляционной функцией

$$R(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - m_1(t_1)][x(t_2) - m_1(t_2)]\},$$

$$R[i, j] = E\{(x[i] - m_1[i])(x[j] - m_1[j])\}.$$

Ковариационная и корреляционная функции описывают статистическую связь первого порядка между сечениями случайной функции. Нормированная корреляционная функция непрерывной случайной функции и коэффициенты корреляции дискретной случайной функции определяются выражениями

$$p(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sqrt{D_2\{x(t_1)\}D_2\{x(t_2)\}}},$$

$$p[i, j] = \frac{R[i, j]}{\sqrt{D_2\{x[i]\}D_2\{x[j]\}}},$$

где дисперсия случайной функции равна

$$D_2\{x(t)\} = R(t, t),$$

$$D_2\{x[i]\} = R[i, i].$$

Случайная функция называется стационарной в узком смысле, если ее n –мерные законы распределения инвариантны относительно сдвига во времени на τ . Для стационарной в узком смысле случайной функции n –мерные моментные функции также инвариантны относительно сдвига во времени.

Случайная функция называется стационарной в широком смысле, если ее математическое ожидание и ковариационная функция инвариантны относительно сдвига во времени. Таким образом, математическое ожидание не зависит от времени, а ковариационная функция зависит только от разности аргументов

$$m_1 = \text{const},$$

$$K(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau),$$

$$K[i, j] = K[j - 1].$$

Аналогичными свойствами обладает и корреляционная функция. Для стационарного случайного процесса нормирование корреляционной функции и коэффициенты корреляции имеют вид

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{D_2\{x\}} = \frac{R(\tau)}{R(0)},$$

$$r[j - i] = \frac{R[j - i]}{D_2\{x\}} = \frac{R[j - i]}{R[0]},$$

где дисперсия случайной функции равна

$$D_2\{x\} = R(0),$$

$$D_2\{x\} = R[0].$$

Спектральная плотность мощности стационарной в широком смысле случайной функции определяется как преобразование Фурье от корреляционной функции

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau, \quad (13.2, a)$$

или дискретно–временное преобразование Фурье автокорреляционной последовательности

$$P(f) = T \sum_{i=-\infty}^{\infty} R[i] e^{-j2\pi i f T} . \quad (13.2, б)$$

С помощью обратного преобразования Фурье можно получить корреляционные функции

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f) e^{j2\pi f \tau} df , \quad (13.3, а)$$

$$R[i] = \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} P(f) e^{j2\pi i T} df . \quad (13.3, б)$$

Пары преобразований Фурье (13.2, а, б) и (13.3, а, б) называют теоремой Винера–Хинчина.

13.4 Анализ случайных процессов с помощью моментных функций

Все сказанное выше применительно к случайным функциям естественным образом распространяется и на случайные процессы. Остановимся кратко на свойствах моментных функций негауссовых процессов, которые необходимы для построения обобщенных параметрических моделей линейного предсказания. Полное описание случайной величины дает характеристическая функция распределения, которая определяется как преобразование Фурье от плотности вероятности

$$\Theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{jux} dx \quad (13.4, а)$$

Обратное преобразование Фурье позволяет получить $p(x)$ по известному $\Theta(u)$

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u) e^{-jux} du . \quad (13.4, б)$$

В случае центрированной случайной величины центральные моменты можно выразить через характеристическую функцию

$$m_s = j^{-s} \left[\frac{d^s \Theta(u)}{du^s} \right]_{u=0} = j^{-s} \Theta^{(n)}(0),$$

что совпадает с (13.1). Характеристическая функция раскладывается в степенной ряд

$$\Theta(u) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{m_s}{s!} (ju)^s. \quad (13.5)$$

Из разложения характеристической функции в степенной ряд видно, что она полностью задается моментами распределения. Как видно из (13.4), плотность вероятности также полностью определяется моментами случайной величины. Большое значение в анализе негауссовых процессов играет разложение в степенной ряд функции

$$\ln \Theta(u) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\chi_s}{s!} (ju)^s. \quad (13.6)$$

Коэффициенты разложения этого ряда χ_s называются кумулянтами s -го порядка и определяются из выражения

$$\chi_s = j^{-s} \left[\frac{d^s \ln \Theta(u)}{du^s} \right]_{u=0}.$$

Моменты и кумулянты однозначно определяют случайную величину, если ряды (13.5) и (13.6) сходятся для всех u . Условия, при которых случайная величина полностью задается набором своих моментов и кумулянтов, рассматриваются в так называемой проблеме моментов [1, 2]. В частном случае ограниченной случайной величины моменты и кумулянты однозначно определяют статистические характеристики случайной величины [3]. Так как моменты и кумулянты являются коэффициентами разложения в степенной ряд характеристической функции и логарифма характеристической функции, то первые коэффициенты разложения при известных условиях будут наиболее существенными. В связи с этим наибольший вклад в характеристическую функцию вносят моменты и кумулянты низших порядков. Этим объясняется, в частности, важность таких характеристик, как математическое ожидание и дисперсия. В то же время, кумулянты и моменты порядков больше двух или производные

от них функции несут дополнительную информацию о распределении случайной величины.

Необходимо отметить тесную связь моментов и кумулянтов. Кумулянты выражаются через моменты соотношениями вида

$$\begin{aligned}\chi_1 &= m_1, \\ \chi_2 &= m_2 - m_1^2, \\ \chi_3 &= m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^2, \\ \chi_4 &= m_4 - 3m_2^2 - 4m_1m_3 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4.\end{aligned}$$

Обратно, моменты можно выразить через кумулянты с помощью формул:

$$\begin{aligned}m_1 &= \chi_1, \\ m_2 &= \chi_2 + \chi_1^2, \\ m_3 &= \chi_3 + 3\chi_1\chi_2 + \chi_1^2, \\ m_4 &= \chi_4 + 3\chi_2^2 + 4\chi_1\chi_3 + 6\chi_1\chi_2 + \chi_1^4.\end{aligned}$$

Одномоментная характеристическая функция случайного процесса $x(t_i)$ является функцией одного аргумента t и u

$$\Theta(u, t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t) e^{jut} dx.$$

n –моментная характеристическая функция зависит от n моментов времени

$$\Theta(u_1 t_1; \dots; u_n t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1 t_1; \dots; x_n t_n) e^{j(u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Набор характеристических функций $\Theta(u_1 t_1), \Theta(u_1 t_1, u_2 t_2), \dots, \Theta(u_1 t_1, u_2 t_2, \dots, u_n t_n)$, также как набор плотностей вероятности случайного процесса, полностью описывает этот процесс. Моментная функция s -го порядка связана с n –моментной характеристической функцией соотношением

$$m_s(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) = (-j)^s \left[\frac{\partial^s \Theta(u_1, t_1; u_2, t_2; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_{\lambda_1} \partial u_{\lambda_2} \dots \partial u_{\lambda_s}} \right]_{u_i=0},$$

где используется обозначение

$$(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) = (\underbrace{t_1, t_1, \dots, t_1}_{\lambda_1}); (\underbrace{t_2, t_2, \dots, t_2}_{\lambda_2}); \dots; (\underbrace{t_n, t_n, \dots, t_n}_{\lambda_s}).$$

Кумулянтные функции s -го порядка определяются также n -моментной характеристической функцией

$$\chi_s(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) = (-j)^s \left[\frac{\partial^s \ln \Theta(u_1, t_1; u_2, t_2; \dots; u_n, t_n)}{\partial u_{\lambda_1} \partial u_{\lambda_2} \dots \partial u_{\lambda_s}} \right]_{u_i=0}.$$

n -моментную характеристическую функцию можно представить в виде ряда

$$\Theta(u_1, t_1; u_2, t_2; \dots; u_s, t_s) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s=1}^n m_s(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \dots u_{\lambda_s}.$$

Через кумулянтные функции характеристическая функция выражается следующим образом:

$$\Theta(u_1, t_1; u_2, t_2; \dots; u_s, t_s) = e^{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{j^s}{s!} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s=1}^n \chi_s(t_{\lambda_1}, t_{\lambda_2}, \dots, t_{\lambda_s}) u_{\lambda_1} u_{\lambda_2} \dots u_{\lambda_s}}.$$

Практические приложения анализа негауссовых случайных процессов, как правило, ограничены рассмотрением нескольких первых моментов. Введем понятие стационарности случайного процесса s -го порядка, как процесса, у которого моментные и кумулянтные функции порядков не выше s стационарны, то есть зависят только от разности времени $\tau_k = t_k - t_1$, $1 < k \leq S$,

$$\begin{aligned} m_1(t_1) &= m_1(0), \\ m_2(t_1, t_2) &= m_2(0, \tau_2), \\ m_3(t_1, t_2, t_3) &= m_3(0, \tau_2, \tau_3), \\ &\dots\dots\dots \\ m_s(t_1, t_2, \dots, t_s) &= m_s(0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s). \end{aligned}$$

Кумулянтные функции случайного процесса со стационарностью s -го порядка выражаются через разности времен аналогичным образом. Моментные и кумулянтные функции s -го порядка стационарного случайного процесса

могут быть одно, двух и т. д. моментными функциями не выше s -го порядка. Например, моментная функция третьего порядка одномоментная (момент третьего порядка), если она не зависит от t

$$m_3(0) = E\{x(t)x(t)x(t)\} = m(0,0,0)$$

и двухмоментная, если она зависит от двух моментов времени 0 и $\tau = t_2 - t_1$.

$$m_3(0,0,\tau) = E\{x(t_1)x(t_1)x(t_2)\}$$

или

$$m_3(0,t,t) = E\{x(t_1)x(t_2)x(t_2)\}.$$

Моментная функция третьего порядка трехмоментная, если она зависит от трех моментов времени 0 , $\tau_2 = t_2 - t_1$, $\tau_3 = t_3 - t_1$

$$m_3(0,\tau_2,\tau_3) = E\{x(t_1)x(t_2)x(t_3)\}.$$

Моментные и кумулянтные функции стационарного случайного процесса обладают свойствами инвариантности к началу отчета времени и к любым перестановкам аргументов. Первое свойство означает, что эти функции не меняются, если из аргументов вычесть или прибавить к ним одно и то же значение времени. Используя эти свойства, просто доказать, что ковариационная и корреляционная функции четны

$$m_2(t_1,t_2) = m_2(t_2 - t_1) = m_2(0,t_2) = m_2(0,-t_2).$$

Для моментных функций третьего порядка можно показать, что при наличии отрицательных аргументов легко перейти к положительным, используя соотношения:

$$\begin{aligned} m_3(0,-t_2,t_3) &= m_3(0,t_2,t_2+t_3), \\ m_3(0,t_2,-t_3) &= m_3(0,t_2+t_3,t_3), \\ m_3(0,-t_2,-t_3) &= m_3(0,t_2,t_2-t_3), \text{ при } |t_2| > |t_3|, \\ m_3(0,-t_2,-t_3) &= m_3(0,t_3-t_2,t_3), \text{ при } |t_3| > |t_2|. \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения можно получить для моментных функций четвертого порядка. Например

$$\begin{aligned}
m_4(0, -t_2, t_3, t_4) &= m_4(0, t_2, t_3 + t_2, t_4 + t_2), \\
m_4(0, -t_2, -t_3, t_4) &= m_4(0, t_3, t_3 - t_2, t_4 + t_3), \text{ при } |\tau_3| > |\tau_2|, \\
m_4(0, -\tau_2, -\tau_3, -\tau_4) &= m_4(0, \tau_4, \tau_4 - \tau_2, \tau_4 - \tau_3), \text{ при } |\tau_4| > |\tau_2|, |\tau_4| > |\tau_3|.
\end{aligned}$$

В случае дискретного стационарного случайного процесса $x_1, x_2, \dots, x_n$ моментные функции определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
m_2[i, j] &= E\{x_i x_j\}, \\
m_3[i, j, k] &= E\{x_i x_j x_k\}, \\
m_4[i, j, k, l] &= E\{x_i x_j x_k x_l\}.
\end{aligned}$$

Двухмоментные функции третьего порядка определяются следующим образом:

$$m_3[0, 0, j] = E\{x_i x_i x_k\}, \quad j = k - i.$$

Аналогично можно определить двухмоментные и трехмоментные функции четвертого порядка:

$$\begin{aligned}
m_4[0, 0, 0, j] &= E\{x_i x_i x_i x_k\}, \quad j = k - i, \\
m_4[0, 0, l, i] &= E\{x_i x_i x_n x_k\}, \quad l = n - i; \quad j = k - i.
\end{aligned}$$

Приведем формулы перехода от отрицательных индексов к положительным для моментных функций дискретного случайного процесса. Из свойства четности ковариационной и корреляционной функций следует

$$m_2[i, j] = m_2[i - j] = m_2[j - i].$$

Для моментной функции третьего порядка формулы преобразования следующие:

$$\begin{aligned}
m_3[i, j, k] &= m_3[j - i, k - i] = m_3[i - j, k - j] = m_3[k - i, k - j], \\
m_3[-(j - i), k - i] &= m_3[j - i, j + k - 2i], \quad j > i, \quad k > i, \\
m_3[j - i, -(k - i)] &= m_3[j + k - 2i, k - i], \quad j > i, \quad k > i, \\
m_3[-(j - i), -(k - i)] &= m_3[j - i, j - k], \quad j > i, \quad k > i.
\end{aligned} \tag{13.7}$$

Здесь и в дальнейшем для краткости будем использовать обозначения:

$$\begin{aligned}
m_3[0, i, j] &= m_3[i, j], \\
m_3[0, 0, 0] &= m_3, \\
m_4[0, i, j, k] &= m_4[i, j, k], \\
m_4[0, 0, i, j] &= m_4[i, j], \\
m_4[0, 0, 0, i] &= m_4[i], \\
m_4[0, 0, 0, 0] &= m_4.
\end{aligned}$$

Таковыми рациональными обозначениями можно пользоваться и для моментов высших порядков. Переобозначив в формулах (13.7) разность аргументов через другой аргумент, легко получить более наглядные и полезные формулы:

$$\begin{aligned}
m_3[-k, l] &= m_3[k, k + l], \\
m_3[k, -l] &= m_3[k + l, l], \\
m_3[-k, -l] &= m_3[k, k - l] = m_3[-k, l].
\end{aligned}$$

Для моментных функций четвертого порядка можно получить аналогичные формулы, например

$$\begin{aligned}
m_4[-i, j, k] &= m_4[i, j - i, k - i], \\
m_4[i, -j, k] &= m_4[i + j, j, k + j], \\
m_4[i, -j, -k] &= m_4[i, j + i, j - k] = m_4[k, k + i, k - i].
\end{aligned}$$

Приведенные свойства моментных функций, позволяющие оперировать с их аргументами, относятся также и к кумулянтным функциям.

13.5 Статистические связи высших порядков

Моментные и кумулянтные функции всех порядков дают более полное описание негауссовых случайных процессов, чем это возможно в рамках корреляционной теории. Это связано с тем обстоятельством, что эти функции позволяют учитывать более сложные связи, чем корреляционные. Как известно, случайные процессы с гауссовым распределением полностью описываются в рамках корреляционной теории и характеризуются двумя первыми кумулянтами. Параметрами гауссова распределения случайной величины

$$p(x) = (2\pi D_2)^{-0,5} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2D_2}}$$

является математическое ожидание $m_1 = \chi_1$ и дисперсия $\chi_2 = D_2$. Все остальные кумулянты равны нулю. Случайные величины с негауссовой функцией распределения имеют, как правило, отличные от нуля кумулянты порядка больше двух. Таким образом, кумулянты характеризуют в некотором смысле степень негауссовости случайной величины. Например, кумулянт третьего порядка χ_3 , характеризует асимметрию плотности вероятности относительно математического ожидания. Кумулянт χ_4 описывает отклонение распределения от гауссова в сторону более острой или более тупой вершины. Коэффициент асимметрии (асимметрия) удобно выразить через нормированный центральный момент

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{\sigma^3}, \quad (13.8, a)$$

где m_3 – центральный момент третьего порядка, σ – среднеквадратическое отклонение процесса. Коэффициент эксцесса (эксцесс) определяется таким образом, чтобы для гауссова процесса он был равен нулю

$$\gamma_2 = m_4 / \sigma^4 - 3. \quad (13.8, б)$$

Здесь m_4 – центральный момент четвертого порядка. Для гауссова процесса нормированный центральный момент четвертого порядка равен 3.

Необходимо заметить, что гауссовы случайные величины имеют неравные нулю моментные функции четных порядков. Это обстоятельство несколько затрудняет их использование для оценки степени негауссовости случайных величин. Статистическую зависимость наиболее просто представить для совокупности двух случайных величин или двумерного вектора $\{\xi, \eta\}$. Степень зависимости случайных величин ξ и η описывается условными плотностями вероятности $p_\xi(y|x)$ и $p_\eta(x|y)$ определяющими двумерную плотность вероятности

$$p_{\xi, \eta}(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(x|y) = p_\eta(y) p_\xi(y|x).$$

В случае статистически независимых случайных величин ξ и η условные вероятности равны безусловным вероятностям

$$p_\xi(x|y) = p_\xi(x), \quad p_\eta(y|x) = p_\eta(y),$$

а совместная плотность вероятности равна произведению плотностей вероятности случайных величин

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = p_{\xi}(x)p_{\eta}(y).$$

Это свойство присуще и характеристической функции

$$\Theta_{\xi,\eta}(u,y) = \Theta_{\xi}(u)\Theta_{\eta}(y).$$

Статистические связи зависимых случайных величин ξ и η описываются набором совместных моментов и кумулянтов

$$m_{k,l} = E\{\xi^k \eta^l\},$$

$$\chi_{k,l} = (-j)^{k+l} \left[\frac{\partial^{k+l} \ln \Theta(u,v)}{\partial u^k \partial v^l} \right]$$

порядка $s = k + l$. Совместные кумулянты и моменты также можно выразить друг через друга. Равенство нулю всех совместных кумулянтов необходимо и достаточно для статистической независимости случайных величин. Случайные величины статистически зависимы, если хотя бы один совместный кумулянт не равен нулю. Необходимо отметить, что статистическая зависимость, описываемая совместными кумулянтами и моментами, характеризует только двумерное распределение этих величин и не влияет на их одномерные распределения.

В дальнейшем будут рассматриваться стационарные процессы, обладающие свойством эргодичности. Оно заключается в том, что для таких процессов усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по времени. Благодаря свойству эргодичности существенно упрощается моментный анализ случайных процессов. Стационарный процесс является эргодичным в строгом смысле, если с вероятностью единица все его вероятностные характеристики можно получить по одной реализации процесса. Стационарный процесс может обладать свойством эргодичности только относительно некоторой характеристики процесса, например математического ожидания, корреляционной функции, моментной функции s -го порядка. Для совокупности случайных величин $x[1], x[2], \dots, x[n]$, представляющих собой случайный процесс, их статистические связи описываются совместными моментными и кумулянтными функциями. Если отсчеты случайного процесса статистически независимы, то их совместные моментные и кумулянтные функции равны нулю. В этом случае случайный процесс будет белым шумом.

13.6 Спектры высших порядков негауссовых процессов

Полной характеристикой гауссовых процессов во временной области является корреляционная функция, а в частотной области – СПМ. Негауссовы процессы полностью характеризуют во временной области кумулянтные или моментные функции всех порядков. В частотной области такими характеристиками являются наборы спектров второго и высших порядков. Спектры высших порядков можно интерпретировать как частотную характеристику статистических связей высших порядков.

Спектры порядка выше двух необходимы при изучении различных свойств негауссовых процессов. Хотя негауссов случайный процесс полностью описывается набором спектров всех порядков, во многих приложениях нет необходимости анализировать весь набор. Как и моментные функции, спектры более высоких порядков могут содержать дополнительную информацию о негауссовом случайном процессе, полученную на основе статистик второго порядка.

В научной литературе помимо исследования спектральных статистик второго порядка негауссовых процессов изучалась возможность получения спектральных статистик высших порядков методом периодограмм. Для анализа негауссовых процессов предлагалось использовать периодограммы третьего порядка [4], а также периодограммы произвольного порядка [5]. Они получались в результате произведения конечных преобразований Фурье негауссовых случайных процессов с разными частотами. Изучению кумулянтных спектров посвящены работы [6, 7]. Фурье–анализ моментных функций временных рядов анализировался и в других работах. Так, Д. Тюки [8] предложил название биспектра для спектра третьего порядка, а спектр четвертого порядка был назван триспектром.

Спектральной плотностью (спектром) r -го порядка называется $(r-1)$ -мерное преобразование Фурье от моментной функции r -го порядка [9]

$$\begin{aligned}\tilde{m}_r(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r) &= \frac{1}{(2\pi)^{r-1}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} m_r(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_r) \exp[-j(\omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3 + \dots + \omega_r \tau_r)] d\tau_2 d\tau_3 \dots d\tau_r \equiv \\ &\equiv F^{r-1}\{m_r(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_r); -\omega_2 \tau_2 - \dots - \omega_r \tau_r\}.\end{aligned}$$

Также, как набор моментных функций $m_1, m_2(0, \tau), m_3(0, \tau_2, \tau_3), \dots, m_r(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_r)$ полностью характеризует стационарный негауссов случайный процесс, набор спектров высших порядков

$$m_1^2 \delta(\omega), \tilde{m}_2(0, \omega), \tilde{m}_3(0, \omega_2, \omega_3), \dots, \tilde{m}_r(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r) \quad (13.9)$$

служит исчерпывающей характеристикой случайного процесса. Моментная функция симметрична относительно τ_i , поэтому, как следует из (13.9), спектры высших порядков также симметричны относительно ω_i .

Моментная функция r -го порядка может быть найдена по спектру r -го порядка с помощью обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} m_r(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_r) &= (2\pi)^{r-1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{m}_r(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r) \times \\ &\times \exp[j(\omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3 + \dots + \omega_r \tau_r)] d\omega_2 d\omega_3 \dots d\omega_r \equiv \\ &\equiv (2\pi)^{r-1} F^{r-1} \{ \tilde{m}_r(0, \omega_2, \dots, \omega_r); \omega_2 \tau_2 + \dots + \omega_r \tau_r \}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Некоторая сложность в применении и анализе спектров высших порядков состоит в том, что они многомерны даже для одномерных процессов. Поэтому для прикладного спектрального анализа интерес представляют одномерные спектры r -го порядка. В набор моментных функций r -го порядка входит $(r-1)$ -двухмоментная функция, зависящая от моментов времени 0 и $\tau = t_2 - t_1$

$$\begin{aligned} &m_2(0, \tau), \\ &m_3(0, 0, \tau), \quad m_3(0, \tau, \tau), \\ &m_4(0, 0, 0, \tau), \quad m_4(0, 0, \tau, \tau), \quad m_4(0, \tau, \tau, \tau), \\ &\dots \\ &m_r(0^{[r-1]}, \tau), \quad m_r(0^{[r-2]}, \tau, \tau), \dots, \quad m_r(0, \tau^{[r-1]}). \end{aligned}$$

Для r -го порядка такая моментная функция может быть представлена в общем виде

$$m_r(0[p] \tau[q]), \equiv m_{p,q}(0[p] \tau[q]), \quad (13.11)$$

где $r = p + q$. Одномерные спектры $(p + q)$ -го порядка получают преобразованием Фурье от моментной функции (13.11)

$$F \{ m_{p,q}(0[p] t[q]); -\omega t \} \equiv \tilde{m}_{p,q}(\omega).$$

Тогда в частотной области случайный процесс может характеризоваться набором спектров

$$\begin{aligned} & \tilde{m}_{1,1}(\omega), \\ & \tilde{m}_{2,1}(\omega), \tilde{m}_{1,2}(\omega), \\ & \tilde{m}_{3,1}(\omega), \tilde{m}_{2,2}(\omega), \tilde{m}_{1,3}(\omega), \\ & \dots \\ & \tilde{m}_{r-1,1}(\omega), \tilde{m}_{r-2,2}(\omega), \dots, \tilde{m}_{2,r-2}(\omega), \tilde{m}_{1,r-1}(\omega). \end{aligned}$$

Связь одномерного и многомерного спектра r -го порядка описывается выражением [9]

$$\tilde{m}_{p,q}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{m}_r(0, \omega - \omega_1, \omega_1 - \omega_2, \dots, \omega_{q-2} - \omega_{q-1}, \omega_q, \dots, \omega_{r-2}) d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_{r-2}.$$

Одномерные спектры r -го порядка можно получить однократным преобразованием Фурье от соответствующей моментной функции

$$\tilde{m}_r(0, \omega_2, \tau_3, \dots, \tau_r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_r(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_r) \exp[-j(\omega_2 \tau_2)] d\tau_2.$$

Тогда, например, для $r=3$ спектр может описываться набором одномерных спектров третьего порядка

$$\begin{aligned} F\{m_3(0, 0, \tau_3); -\omega_3 \tau_3\} &= \tilde{m}_3(0, 0, \omega_3), \\ F\{m_3(0, T, \tau_3); -\omega_3 \tau_3\} &= \tilde{m}_3(0, T, \omega_3), \\ F\{m_3(0, 2T, \tau_3); -\omega_3 \tau_3\} &= \tilde{m}_3(0, 2T, \omega_3), \\ &\dots \\ F\{m_3(0, nT, \tau_3); -\omega_3 \tau_3\} &= \tilde{m}_3(0, nT, \omega_3), \end{aligned}$$

где τ_3 принимает фиксированные значения $\tau_3 = T, 2T, \dots, nT, \dots$

В анализе дискретных случайных процессов или временных рядов, как правило, удобнее использовать дискретное преобразование Фурье. Тогда выражение (13.10) в дискретной форме принимает вид

$$\tilde{m}_r[0, k, l, \dots, n] = \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \dots \sum_{j=-(N-1)}^{N-1} m_r[0, i, v, \dots, j] \exp[-j \frac{2\pi}{2N-1} (ki + lv + \dots + nj)]. \quad (13.12)$$

Одномерный дискретный спектр, соответствующий (13.11), может быть получен следующим образом:

$$\tilde{m}_r[0, \tilde{k}, l, \dots, n] = \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} m_r[0, i, l, \dots, n] \exp[-j \frac{2\pi}{2N-1} ki]. \quad (13.13)$$

Применение корреляционных окон позволяет сглаживать СПМ. Такие же сглаживающие окна можно применять при оценивании спектров высших порядков. При воздействии окна W_i на моментную функцию, она преобразуется к виду

$$\tilde{m}_r[0, i, \nu, \dots, j] = m_r[0, i, \nu, \dots, j] W_i W_\nu \dots W_j$$

Тогда для получения сглаженных спектров высших порядков, необходимо в формулах (13.12), (13.13) заменить $m_r[0, i, \nu, \dots, j]$ на сглаженные моментные функции $\tilde{m}_r[0, i, \nu, \dots, j]$.

Например, формула (13.13) преобразуется следующим образом:

$$\tilde{m}_r[0, \tilde{k}, \nu, \dots, j] = \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} m_r[0, i, \dots, j] W_i \exp[-j \frac{2\pi}{2N-1} ki].$$

В качестве примера найдем спектры высших порядков абсолютно статистически не связанного случайного процесса типа белого шума или дельта-процесса. Иногда, чтобы подчеркнуть, что этот процесс имеет равные нулю все моментные функции, а не только корреляционную функцию, его именуют «абсолютно белым шумом». Моментная функция абсолютно белого шума описывается выражением

$$m_r(0, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_r) = m_r \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) \dots \delta(\tau_r).$$

Используя (13.13), можно получить набор спектральных плотностей белого шума [9]

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2(0, \omega) &= D_2 / 2\pi, \\ \tilde{m}_3(0, \omega_2, \omega_3) &= m_3 / (2\pi)^2, \\ &\dots \\ \tilde{m}_r(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_r) &= m_r / (2\pi)^{r-1}. \end{aligned}$$

Для такого процесса спектральные плотности не зависят от частоты.

Применение спектров высших порядков для исследования негауссовых процессов пока не получило широкого развития. Большие трудности возникали при попытках построения и исследования статистик старших спектров. Не удавалось получить во всей области допустимых значений аргумента старших спектральных кумулянтных (семиинвариантных) плотностей. В [10] вводятся и изучаются статистики старших порядков моментных и кумулянтных спектральных плотностей случайных процессов. Используемая статистика старших кумулянтных спектральных плотностей получается асимптотически несмещенной и состоятельной во всей области допустимых значений аргумента. Статистика строится известным для спектров второго порядка методом сегментации с последующим усреднением по полученным таким образом выборкам спектра. Это расширяет применимость оценок таких спектров вблизи сингулярных точек, что важно, например, при спектральном анализе явлений турбулентности и землетрясений.

Представленные в этом разделе соотношения будут в дальнейшем использованы для получения оценок спектров высших порядков имитационных и реальных негауссовых случайных процессов. Недостатки спектрального анализа на основе моментных и кумулянтных функций, особенно при ограниченной выборке данных, можно отчасти устранить с помощью параметрических методов спектрального оценивания высших порядков, рассмотренных ниже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В. курс теории вероятностей: Учебник для университетов. – 5-е изд., – М.: Наука, 1969. – 400 с.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
3. Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
4. M. Rosenblatt, VanNess J.S. Estimation of the bispectrum // Ann. Math. Statist. – 1965. – №36. – P. 1120 – 1136.
5. D.R. Brillinger, M. Rosenblatt. Asymptotic theory of k-th order spectra // Spectral analysis of time series. – Ed. B. Harris, 1967. – P. 153 –188.
6. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
7. Ширяев А.Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов // Теория вероятности и ее применение. – 1960. – №5, 3. – с. 293–313.
8. J.W. Tukey. An introduction of the measurement of spectra // Probability and statistics. – Ed. U. Grenander, 1959. – P. 300–330.
9. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.
10. Журбенко И.Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. – М.: Изд-во моск. ун-та, 1987. – 240 с.

14 ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ

14.1 Введение

Случайный процесс полностью описывается либо набором многомерных плотностей распределения вероятностей, либо набором кумулянтных или моментных функций всех порядков. Использование многомерной плотности распределения статистически связанных процессов, за исключением гауссова распределения, крайне затруднено. Это связано, прежде всего, с проблемой получения многомерных распределений по известным одномерным распределениям в случае статистически связанных процессов. Весьма сложной практической задачей является также получение выборочных многомерных плотностей распределения негауссовых процессов.

Использование корреляционной функции, описывающей статистические связи первого порядка, позволяет решать методом линейного предсказания широкий круг прикладных задач. На основе моделей линейного предсказания синтезируются обесцеляющие и формирующие фильтры, решается задача прогнозирования, получают параметрические спектральные оценки и т.д. Несмотря на то, что корреляционные связи являются наиболее важными, при описании статистически связанных случайных процессов, для решения ряда проблем статистического анализа негауссовых процессов оказывается необходимым учитывать статистические связи более высокого порядка.

Для характеристики статистических связей высших порядков используются кумулянтные и моментные функции. На основе кумулянтного анализа был получен ряд полезных результатов [1–3]. В то же время кумулянтное описание случайных процессов, несмотря на свои достоинства в решении некоторых задач, не позволяет использовать аппарат статистических средних. Это обстоятельство затрудняет его применение при синтезе систем обработки негауссовых процессов. С этой точки зрения, более перспективными являются моментные функции, для которых сравнительно легко можно получить необходимые уравнения и соответствующие оценки параметров. Статистические связи порядка $(r-1)$ описываются набором моментных функций порядка r .

В данном разделе рассматриваются основы теории построения обобщенных моделей линейного предсказания стационарных действительных негауссовых процессов. Согласно этой теории, параметры обобщенных моделей рассчитываются по моментным функциям процесса. Классические модели линейного предсказания описывают негауссовы случайные процессы только в рамках корреляционной теории. В обобщенных моделях линейного предсказания учитываются негауссовы свойства случайных процессов.

При построении обобщенных моделей линейного предсказания возникает проблема выбора удобного и наглядного представления многомерных матриц параметров модели и многомерных моментных матриц, а также упрощения операций

над ними. Наиболее простым способом представления матричных выражений является использование привычных математических форм, применяемых при построении классических моделей второго ранга. Поэтому в уравнениях для расчета параметров моделей будут использоваться векторы–столбцы и двумерные моментные матрицы. При таком способе получения уравнений полагаются фиксированными значения свободных индексов, равных сдвигам моментных индексов.

14.2 Принципы построения обобщенных моделей линейного предсказания

В зависимости от свойств негауссовых случайных процессов их можно моделировать процессами АР, СС или АРСС. В отличие от обычных моделей линейного предсказания, параметры обобщенных моделей определяются не корреляционными функциями, а моментными функциями некоторого порядка r . Принципы построения новых моделей более общие, чем для обычных моделей линейного предсказания. Обобщенная теория линейного предсказания удовлетворяет принципу соответствия, согласно которому частные случаи теории органично вытекают из общей теории. Поэтому модели в обобщенной теории линейного предсказания названы соответственно обобщенной авторегрессией (ОАР), обобщенным скользящим средним (ОСС), обобщенной авторегрессией–скользящим средним (ОАРСС). По моментным функциям r -го порядка строятся модели ОАР, ОСС, ОАРСС r -го ранга. При построении обобщенных моделей как обычно будем полагать, что процессы имеют нулевое математическое ожидание.

Векторы параметров моделей ОАР, ОСС, ОАРСС находятся с помощью моментных функций некоторых порядков. При построении ОАР, ОСС, ОАРСС моделей будем опираться на следующие положения, являющиеся обобщением принципов, лежащих в основе построения обычных моделей АР, СС, АРСС.

1. Стационарные негауссовы процессы описываются разностными уравнениями линейного предсказания, соответствующими моделям ОАР, ОСС, ОАРСС, с постоянными коэффициентами, рассчитанными по моментным функциям.

2. Предсказанное текущее значение процесса, полученное в виде взвешенной суммы предыдущих значений процесса или предыдущих ошибок предсказания, отличается от истинного на некоторую ошибку предсказания, характерную только для данной моментной функции с определенным набором сдвигов.

3. Ошибки предсказания не имеют статистических связей заданного порядка равного $(r-1)$ -му рангу модели, описываемых соответствующей моментной функцией.

Первый принцип утверждает, что не только корреляционные, но и статистические связи произвольного порядка могут учитываться моделями ОАР, ОСС, ОАРСС. Векторы коэффициентов ОАР, ОСС, ОАРСС для моделей, отличающихся рангом и сдвигами времени моментных функций, будут в общем

случае разными. Отсчеты процесса связаны со своими предшествующими значениями и ошибками предсказания линейной зависимостью, коэффициенты которой определяются значениями соответствующей моментной функции.

Согласно второму принципу, важным предположением является существование множества выборок ошибок предсказания, соответствующих разным рангам модели и сдвигам моментных функций. Для данного негауссова процесса можно построить множество моделей ОАР, ОСС, ОАРСС.

Третий принцип утверждает, что ошибки предсказания для некоторого фиксированного сдвига времени моментной функции, будут иметь нулевую моментную функцию порядка r только для модели негауссова случайного процесса, коэффициенты которой рассчитаны по моментной функции процесса порядка r и при таком же фиксированном сдвиге времени. Этот принцип является оптимальным и необходим при получении уравнений для расчета коэффициентов обобщенных моделей линейного предсказания. Он обобщает используемое в классических моделях линейного предсказания, условие некоррелированности ошибок предсказания.

14.3 Обобщенная модель авторегрессии третьего ранга

Пусть задан стационарный негауссов статистически связанный случайный процесс с не равной нулю моментной функцией третьего порядка. Будем полагать, что модель ОАР третьего ранга для некоторого фиксированного сдвига моментной функции l описывается разностным уравнением

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] x[t-i] + a_3^l[t], \quad (14.1)$$

где $\Phi_3^l[i]$ – коэффициенты ОАР для сдвига l , p_l – порядок модели ОАР для сдвига l , $a_3^l[t]$ – негауссовы ошибки предсказания модели для сдвига l . Умножив левую и правую части (14.1) на произведение $x[t-j]x[t-l]$ и усреднив, получим

$$\begin{aligned} E\{x[t]x[t-j]x[t-l]\} &= \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] E\{x[t-i]x[t-j]x[t-l]\} + \\ &+ E\{a_3^l[t]x[t-j]x[t-l]\}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Средние от произведений отсчетов случайного негауссова процесса дают оценки моментных функций третьего порядка

$$\begin{aligned} E\{x[t]x[t-j]x[t-l]\} &= m_3[j, j-l], \\ E\{x[t-i]x[t-j]x[t-l]\} &= m_3[j-i, j-l]. \end{aligned} \quad (14.3, a)$$

Уравнения для расчета параметров модели получают при условии статистической независимости ошибок предсказания для разных сдвигов времени

$$E\{a_3^l[t]x[t-j]x[t-l]\} = E\{a_3^l[t]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\} = 0, \quad 0 < j, \quad l \geq 0. \quad (14.3, \quad б)$$

Из условия оптимальности (14.3, б) следует, что ошибки предсказания являются белым шумом. Учитывая (14.3), из (14.2) имеем уравнение

$$m_3[j, j-l] = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] m_3[j-i, j-l], \quad 0 < j \leq p_l. \quad (14.4)$$

Система уравнений, получаемая из (14.4), используется для расчета коэффициентов ОАР

$$m_3[1, 1-l] = \Phi_3^l[1] m_3[0, 1-l] + \Phi_3^l[2] m_3[-1, 1-l] + \dots + \Phi_3^l[p_l] m_3[1-p_l, 1-l],$$

$$m_3[2, 2-l] = \Phi_3^l[1] m_3[1, 2-l] + \Phi_3^l[2] m_3[0, 2-l] + \dots + \Phi_3^l[p_l] m_3[2-p_l, 2-l],$$

...

$$m_3[p_l, p_l-l] = \Phi_3^l[1] m_3[p_l-1, p_l-l] + \Phi_3^l[2] m_3[p_l-2, p_l-l] + \dots + \Phi_3^l[p_l] m_3[0, p_l-l].$$

Умножив (14.1) на произведение $x[t]x[t]$ и усреднив, получим

$$m_3 = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] m_3[i, i] + m_{3a}^l, \quad (14.5)$$

где m_3 – центральный момент третьего порядка случайного процесса, $m_3[i, i]$ – двухмоментная моментная функция третьего порядка, m_{3a}^l – центральные моменты третьего порядка ошибок предсказания. Уравнение (14.5) устанавливает связь между моментом третьего порядка ошибок предсказания ОАР модели m_{3a}^l и моментом m_3 случайного процесса $x[t]$.

Заметим, что в (14.4) присутствуют два свободных индекса j и l . Поэтому необходимо $p_0 + p_1 + \dots + p_n$ уравнений, соответствующих сдвигам $l = 0, 1, \dots, n$, достаточных для определения трехмерной матрицы коэффициентов ОАР $\Phi_3^l[i]$. Если зафиксировать l , то решение уравнения (14.4) сводится к последовательному определению векторов–столбцов коэффициентов ОАР $\Phi_3^l[i]$, где верхний индекс l указывает, для какого

значения сдвига l получены коэффициенты ОАР. Значение $l = 0, 1, \dots$ выбирается, исходя из решаемой задачи и свойств моделируемого процесса.

Уравнение (14.4) можно представить в матричном виде

$$\vec{m}_3[j, j-l] = m_3[j-i, j-l] \vec{\Phi}_3^l[i]. \quad (14.6)$$

Векторы, входящие в (14.6), равны

$$\vec{m}_3[j, j-l] = \begin{bmatrix} m_3[1, 1-l] \\ m_3[2, 2-l] \\ \dots \\ m_3[p_l, p_l-l] \end{bmatrix}, \quad (14.7)$$

$$\vec{\Phi}_3^l[i] = \begin{bmatrix} \Phi_3^l[1] \\ \Phi_3^l[2] \\ \dots \\ \Phi_3^l[l] \end{bmatrix}. \quad (14.8)$$

Моментная матрица, входящая в (14.6), имеет вид

$$m_3[j-i, j-l] = \begin{bmatrix} m_3[0, 1-l] & m_3[-1, 1-l] & \dots & m_3[1-p_l, 1-l] \\ m_3[1, 2-l] & m_3[0, 2-l] & \dots & m_3[2-p_l, 2-l] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_3[p_l-1, p_l-l] & m_3[p_l-2, p_l-l] & \dots & m_3[0, p_l-l] \end{bmatrix} \quad (14.9)$$

Решение матричного уравнения (14.6) имеет вид

$$\vec{\Phi}_3^l[i] = (m_3[j-i, j-l])^{-1} \vec{m}_3[j, j-l], \quad (14.10)$$

где $(m_3[j-i, j-l])^{-1}$ – двухмерная обратная матрица при фиксированном l . Возможность представления решения уравнения (14.4) в виде (14.10) значительно упрощает задачу вычисления коэффициентов ОАР модели. Такой подход также приводит к известным алгоритмам решения подобных задач, требующих обращения матрицы. Уравнение (14.4) сходно по структуре с уравнением Юла–Уокера (1.6, а). Необходимо отметить, что, поскольку порядки p_l для каждого l могут быть разные, размеры столбцов и матриц в (14.7–14.9) также могут отличаться для разных l .

Как видно из (14.9), элементы матриц могут иметь отрицательные индексы, что несколько затрудняет оперирование с ними на ЭВМ.

Поэтому удобно воспользоваться правилом изменения индексов у дискретных моментных функций стационарного случайного процесса [4]

$$m_r[s, l, \dots, n, k] = m_r[s - k, l - k, \dots, n - k, 0] = m_r[s - k, l - k, \dots, n - k]. \quad (14.11)$$

Свойство (14.11) позволяет всегда получить один из индексов нулевым, который для краткости записи можно опускать. Если нулевых индексов несколько, то в дальнейшем изложении будет опускаться только один нулевой индекс. При отрицательных индексах у моментных функций, как следует из (14.11), необходимо добавить к каждому из индексов целое положительное число, равное модулю минимального отрицательного индекса. Например

$$m_r[s, -l, -w, \dots, k] = m_r[0, s + l, l - w, \dots, l + k] = m_r[s + l, l - w, \dots, l + k], \quad |l| > |w|. \quad (14.12)$$

Приведем несколько примеров уравнений для расчета коэффициентов ОАР модели третьего ранга первого порядка.

1. $l = 1. \quad m_3[1, 0] = \Phi_3^1[1]m_3.$
2. $l = 2. \quad m_3[1, -1] = \Phi_3^2[1]m_3[0, -1].$

Воспользовавшись правилом (14.11) окончательно получим

$$m_3[2, 1] = \Phi_3^2[1]m_3[1, 1].$$

В случае произвольного l имеем $m_3[1, 1 - l] = \Phi_3^l[1]m_3[0, 1 - l]$ или $m_3[l, l - 1] = \Phi_3^l[1]m_3[l - 1, l - 1].$

Представим несколько примеров получения систем уравнений для определения коэффициентов ОАР третьего ранга при $p = 2.$

1. $l = 1.$

$$m_3[1, 0] = \Phi_3^1[1]m_3 + \Phi_3^1[2]m_3[-1, 0],$$

$$m_3[2, 1] = \Phi_3^1[1]m_3[1, 1] + \Phi_3^1[2]m_3[0, 1].$$

Так как $m[-1,0] = m[1,1]$, получим:

$$m_3[1,0] = \Phi_3^1[1]m_3[0,0] + \Phi_3^1[2]m_3[1,1],$$

$$m_3[2,1] = \Phi_3^1[1]m_3[1,1] + \Phi_3^1[2]m_3[0,1].$$

2. $l = 2$.

$$m_3[2,1] = \Phi_3^2[1]m_3[1,1] + \Phi_3^2[2]m_3[0,1],$$

$$m_3[2,0] = \Phi_3^2[1]m_3[1,0] + \Phi_3^2[2]m_3[0,0].$$

Здесь мы произвели замену индексов: $m_3[1,-1] = m_3[2,1]$;
 $m_3[0,-1] = m_3[1,1]$; $m_3[-1,-1] = m_3[0,1]$.

3. При произвольном фиксированном l получим

$$m_3[l,l-1] = \Phi_3^l[1]m_3[l-1,l-1] + \Phi_3^l[2]m_3[l-2,l-1],$$

$$m_3[l,l-2] = \Phi_3^l[1]m_3[l-1,l-2] + \Phi_3^l[2]m_3[l-2,l-2].$$

Решая эту систему уравнений относительно коэффициентов ОАР, получим

$$\Phi_3^l[1] = \frac{m_3[l,l-2]m_3[l-2,l-1] - m_3[l,l-1]m_3[l-2,l-2]}{m_3[l-1,l-2]m_3[l-2,l-1] - m_3[l-1,l-1]m_3[l-2,l-2]},$$

$$\Phi_3^l[2] = \frac{m_3[l,l-1]m_3[l-1,l-2] - m_3[l,l-2]m_3[l-1,l-1]}{m_3[l-1,l-2]m_3[l-2,l-1] - m_3[l-1,l-1]m_3[l-2,l-2]}.$$

Приведем некоторые выражения, связывающие моменты случайного процесса и моменты ошибок предсказания. Соотношение (14.5) для первого порядка имеет вид

$$m_3 = \Phi_3^l[1]m_3[1,1] + m_{3a}^l$$

При $p = 2$ получаем

$$m_3 = \Phi_3^l[1]m_3[1,1] + \Phi_3^l[2]m_3[2,2] + m_{3a}^l$$

По аналогии с частной автокорреляционной функцией [5] можно ввести частную моментную функцию произвольного ранга. Для модели ОАР третьего ранга в случае произвольного l эта функция будет иметь p_l ненулевых значений.

При $p = 1, 2$ частные моментные функции третьего ранга равны

$$\Phi_3^l[1,1] = \frac{m_3[l,1-l]}{m_3[0,1-l]},$$

$$\Phi_3^l[2,2] = \frac{m_3[1,1-l]m_3[1,2-l] - m_3[2,2-l]m_3[0,1-l]}{m_3[1,2-l]m_3[-1,1-l] - m_3[0,1-l]m_3[0,2-l]}.$$

Наборы значений

$$\Phi_3^1[1,1], \Phi_3^1[2,2], \dots, \Phi_3^1[p_1, p_1], \dots, \Phi_3^l[1,1], \Phi_3^l[2,2], \dots, \Phi_3^l[p_l, p_l]$$

являются частными моментными функциями модели ОАР третьего ранга.

Уравнение (14.1) можно представить как результат действия оператора ОАР третьего ранга

$$\hat{\Phi}_3^l(\hat{z}) = 1 - \Phi_3^l[1]\hat{z}^{-1} - \Phi_3^l[2]\hat{z}^{-2} - \dots - \Phi_3^l[p]\hat{z}^{-p}$$

на случайный процесс $x[t]$, где действие оператора сдвига $\hat{z}^{-k}$ определяется выражением $\hat{z}^{-k}x[t] = x[t-k]$. Процесс ОАР третьего ранга можно получить, действуя оператором $[\hat{\Phi}_3^l(\hat{z})]^{-1}$ на порождающий процесс, т.е. $[\hat{\Phi}_3^l(\hat{z})]x[t] = a_3^l[t]$. Отсюда ясно, что для получения стационарного процесса необходимо, чтобы корни характеристического уравнения

$$(c^l)^{p_l} - \Phi_3^l[1](c^l)^{p_l-1} - \dots - \Phi_3^l[p_l] = 0 \quad (14.13)$$

лежали в единичном комплексном круге. Эквивалентное условие стационарности состоит в том, чтобы корни уравнения

$$1 - \Phi_3^l[1](c^l)^{-1} - \Phi_3^l[2](c^l)^{-2} - \dots - \Phi_3^l[p_l](c^l)^{-p_l} = 0$$

лежали вне единичного круга на комплексной плоскости. Таким образом, модель ОАР третьего ранга для каждого l имеет набор характеристических уравнений (14.13).

14.4 Обобщенная модель авторегрессии четвертого ранга

Моментные функции определяются как коэффициенты разложения в степенной ряд характеристической функции. Коэффициенты разложения, соответствующие моментным функциям низкого порядка, дают наибольший вклад в степенной ряд и поэтому являются наиболее существенными. Отсюда следует, в частности, важность корреляционной функции как характеристики случайного процесса. При анализе негауссовых случайных процессов, как правило, ограничиваются исследованием статистик третьего и четвертого порядков [4, 6, 7].

Довольно часто встречаются негауссовы процессы, у которых моментные функции третьего порядка равны нулю, а моментные функции четвертого порядка отличны от нуля. При этом, однако, следует учитывать, что для гауссова процесса моментная функция третьего порядка равна нулю, а моментная функция четвертого порядка отлична от нуля, т. к. зависит от корреляционной функции. Как показывают проведенные ниже исследования, модели линейного предсказания, построенные по статистикам четвертого порядка, могут иметь важные практические приложения. Поэтому в дальнейшем приводится теория построения моделей линейного предсказания как третьего, так и четвертого ранга.

Рассмотрим задачу построения модели ОАР четвертого ранга. Хотя принципы построения этой модели существенно не отличаются от использованных при построении модели ОАР третьего ранга, представляется полезным получить соответствующие формулы и привести ряд примеров построения моделей [8].

Пусть задан стационарный негауссов случайный процесс с не равной нулю моментной функцией четвертого порядка. Модель ОАР четвертого ранга описывается разностным уравнением

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_{l,k}} \Phi_4^{l,k}[i] x[t-i] + a_4^{l,k}[t] \quad (14.14)$$

Для построения модели необходимо, чтобы ошибка предсказания $a_4^{l,k}[t]$ для разных моментов времени удовлетворяла условию статистической независимости четвертого порядка, т.е. имела нулевую моментную функцию четвертого порядка. В этом случае параметры модели – порядок $p_{l,k}$ и коэффициенты $\Phi_4^{l,k}[i]$ определяются моментными функциями четвертого порядка.

Чтобы получить уравнения, по которым можно определить $\Phi_4^{l,k}[i]$, необходимо левую и правую части (14.14) умножить на произведение векторов $x[t-j]x[t-l]x[t-k]$ и усреднить

$$E\{x[t]x[t-j]x[t-l]x[t-k]\} = \quad (14.15)$$

$$= \sum_{i=1}^{p_{l,k}} \Phi_4^{l,k}[i] E\{x[t-i]x[t-j]x[t-l]x[t-k]\} + E\{a_4^{l,k}[t]x[t-j]x[t-l]x[t-k]\}.$$

Средние от произведений, входящих в (14.15), равны моментным функциям четвертого порядка

$$E\{x[t]x[t-j]x[t-l]x[t-k]\} = m_4[j, j-l, j-k], \quad (14.16, a)$$

$$E\{x[t-i]x[t-j]x[t-l]x[t-k]\} = m_4[j-i, j-l, j-k].$$

Из условия статистической независимости ошибок предсказания следует

$$\begin{aligned} E\{a_4^{l,k}[t]x[t-j]x[t-l]x[t-k]\} = \\ = E\{a_4^{l,k}[t]a_4^{l,k}[t-j]a_4^{l,k}[t-l]a_4^{l,k}[t-k]\} = 0; \quad j > 0, \quad l, k \geq 0. \end{aligned} \quad (14.16, б)$$

С учетом (14.16) уравнение (14.15) принимает вид

$$m_4[j, j-l, j-k] = \sum_{i=1}^{p_{l,k}} \Phi_4^{l,k}[i] m_4[j-i, j-l, j-k], \quad 0 < j \leq p_{l,k}. \quad (14.17)$$

Это уравнение используется для вычисления коэффициентов ОАР четвертого ранга. Для этого фиксируются свободные индексы l и k , а затем составляется система $p_{l,k}$ уравнений.

Умножив (14.14) на произведение $x[t]x[t]x[t]$, получим

$$m_4 = \sum_{i=1}^{p_{l,k}} \Phi_4^{l,k}[i] m_4[i, i, i] + m_{4a}^{l,k},$$

где $m_4 = E\{x[t]x[t]x[t]x[t]\}$, $m_{4a}^{l,k} = E\{a_{4a}^{l,k}[t]a_{4a}^{l,k}[t]a_{4a}^{l,k}[t]a_{4a}^{l,k}[t]\}$ – четвертые центральные моменты случайного негауссова процесса $x[t]$ и ошибки предсказания $a_{4a}^{l,k}[t]$ соответственно. Это выражение описывает связь моментов четвертого порядка процесса $x[t]$ и ошибки предсказания $a_{4a}^{l,k}[t]$.

Как видно из рекуррентных уравнений (14.17), моментная функция модели ОАР четвертого порядка может быть получена взвешенным суммированием $p_{l,k}$ ее предыдущих значений. Это важное свойство дает возможность учитывать для характеристики негауссова процесса не все значения моментной функции, а только $p_{l,k}$ коэффициентов ОАР, в которых как бы «концентрируется» вся информация о моментной функции четвертого порядка.

Особенностью уравнений типа (14.17) является то, что моментные функции используются при произвольных фиксированных свободных индексах l и k . Индекс j , принимая значения от единицы до $p_{l,k}$, позволяет получить необходимую систему из $p_{l,k}$ уравнений. Затем, перебирая l и k , можно получить, при необходимости, все системы уравнений для построения набора моделей ОАР четвертого ранга. Отметим, что в силу симметрии моментных функций при перестановке свободных индексов, нужно выбирать $k \neq l$. К тому же, с ростом l и k моментная функция может быстро затухать и поэтому в таких случаях рассматривать модели ОАР при больших l и k не имеет смысла.

Остановимся на нескольких примерах получения уравнений для вычисления коэффициентов ОАР четвертого ранга при $p_{l,k} = 1$.

$$1. \ l = k = 1. \quad m_4[1,0,0] = \Phi_4^{1,1}[1]m_4. \quad (14.18, \text{ а})$$

$$2. \ l = 2, k = 1. \quad m_4[1,1,2] = \Phi_4^{2,1}[1]m_4[1,1,1]. \quad (14.18, \text{ б})$$

$$3. \ l = k = 2. \quad m_4[0,1,2] = \Phi_4^{2,2}[1]m_4[0,1,1]. \quad (14.18, \text{ в})$$

Очевидно, что модель ОАР при $l = 2, k = 1$ тождественна модели при $l = 1, k = 2$.

Модель ОАР четвертого ранга для $p_{l,k} = 2$ описывается уравнениями вида:

$$1. \ l = k = 1. \\ m_4[0,0,1] = \Phi_4^{1,1}[1]m_4[0,0,0] + \Phi_4^{1,1}[2]m_4[1,1,1], \quad (14.19, \text{ а})$$

$$m_4[2,1,1] = \Phi_4^{1,1}[1]m_4[1,1,1] + \Phi_4^{1,1}[2]m_4[0,1,1].$$

2. $l = 2, k = 1$.

$$m_4[2,1,1] = \Phi_4^{2,1}[1]m_4[1,1,1] + \Phi_4^{2,1}[2]m_4[0,1,1], \quad (14.19, б)$$

$$m_4[2,0,1] = \Phi_4^{2,1}[1]m_4[1,0,1] + \Phi_4^{2,1}[2]m_4[0,0,1].$$

3. $l = k = 2$.

$$m_4[0,1,2] = \Phi_4^{2,2}[1]m_4[0,1,1] + \Phi_4^{2,2}[2]m_4[0,0,1], \quad (14.19, в)$$

$$m_4[2,0,0] = \Phi_4^{2,2}[1]m_4[0,0,1] + \Phi_4^{2,2}[2]m_4[0,0,0].$$

При получении систем уравнений (14.18) и (14.19) было применено правило избавления от отрицательных индексов (14.12). Для произвольных, но фиксированных l и k , в случае $p_{l,k}=1$, уравнения для расчета коэффициентов ОАР имеют вид

$$m_4[1,1-k,1-l] = \Phi_4^{l,k}[1]m_4[0,1-l,1-k], \quad (14.20)$$

а для $p_{l,k} = 2$

$$m_4[1,1-l,1-k] = \Phi_4^{l,k}[1]m_4[0,1-l,1-k] + \Phi_4^{l,k}[2]m_4[-1,1-l,1-k], \quad (14.21)$$

$$m_4[2,2-l,2-k] = \Phi_4^{l,k}[1]m_4[1,2-l,2-k] + \Phi_4^{l,k}[2]m_4[0,2-l,2-k].$$

Решив систему уравнений (14.21), получим в явном виде формулы для $\Phi_4^{l,k}[1]$ и $\Phi_4^{l,k}[2]$:

$$\Phi_4^{l,k}[1] = \frac{m_4[-1,1-l,1-k]m_4[2,2-l,2-k] - m_4[1,1-l,1-k]m_4[0,2-l,2-k]}{m_4[1,2-l,2-k]m_4[-1,1-l,1-k] - m_4[0,1-l,1-k]m_4[0,2-l,2-k]}, \quad (14.22, а)$$

$$\Phi_4^{l,k}[2] = \frac{m_4[2,2-l,2-k]m_4[0,1-l,1-k] - m_4[1,2-l,2-k]m_4[1,1-l,1-k]}{m_4[0,2-l,2-k]m_4[0,1-l,1-k] - m_4[-1,1-l,1-k]m_4[1,2-l,2-k]}. \quad (14.22, б)$$

Для фиксированных l и k система уравнений (14.17) при произвольном $p_{l,k}$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
m_4[1, 1-l, 1-k] &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[0, 1-l, 1-k] + \Phi_4^{l,k}[2]m_4[-1, 1-l, 1-k] + \dots \\
&\quad \dots + \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]m_4[1-p_{l,k}, 1-l, 1-k], \\
m_4[2, 2-l, 2-k] &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[1, 2-l, 2-k] + \Phi_4^{l,k}[2]m_4[0, 2-l, 2-k] + \dots \\
&\quad \dots + \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]m_4[2-p_{l,k}, 2-l, 2-k], \\
&\quad \dots \\
m_4[p_{l,k}, p_{l,k}-l, p_{l,k}-k] &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[p_{l,k}-1, p_{l,k}-l, p_{l,k}-k] + \\
&+ \Phi_4^{l,k}[2]m_4[p_{l,k}-2, p_{l,k}-l, p_{l,k}-k] + \dots + \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]m_4[0, p_{l,k}-l, p_{l,k}-k].
\end{aligned} \tag{14.23}$$

Уравнение (14.17) можно представить в матричном виде

$$\bar{m}_4[j, j-l, j-k] = m_4[j-i, j-l, j-k] \bar{\Phi}_4^{l,k}[i], \tag{14.24}$$

где

$$\bar{m}_4[j, j-l, j-k] = \begin{bmatrix} m_4[1, 1-l, 1-k] \\ m_4[2, 2-l, 2-k] \\ \dots \\ m_4[p, p-l, p-k] \end{bmatrix}, \tag{14.25}$$

$$\bar{\Phi}_4^{l,k}[i] = \begin{bmatrix} \Phi_4^{l,k}[1] \\ \Phi_4^{l,k}[2] \\ \dots \\ \Phi_4^{l,k}[p] \end{bmatrix}, \tag{14.26}$$

$$m_4[j-i, j-l, j-k] = \tag{14.27}$$

$$= \begin{bmatrix} m_4[0, 1-l, 1-k] & m_4[-1, 1-l, 1-k] & \dots & m_4[1-p, 1-l, 1-k] \\ m_4[1, 2-l, 2-k] & m_4[0, 2-l, 2-k] & \dots & m_4[2-p, 2-l, 2-k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_4[p-1, p-l, p-k] & m_4[p-2, p-l, p-k] & \dots & m_4[0, p-l, p-k] \end{bmatrix}$$

В выражениях (14.25–14.27) для сокращения записи опущены индексы l и k при $p_{l,k}$. Решение матричного уравнения (14.24) имеет вид

$$\bar{\Phi}_4^{l,k}[i] = (m_4[j-i, j-l, j-k])^{-1} \bar{m}_4[j, j-l, j-k],$$

где $(m_4[j-i, j-l, j-k])^{-1}$ – обратная двухмерная матрица при фиксированных l и k . Таким образом, несмотря на то, что полная система уравнений (14.23), при нефиксированных l и k выражается через трехмерные и четырехмерные матрицы, ее удастся выразить через двухмерные и одномерные матрицы. Полная система уравнений получается перебором свободных фиксированных индексов l и k .

Для модели ОАР четвертого ранга, можно ввести частную моментную функцию четвертого ранга. Используя (14.20) и (14.22б), формулы для вычисления первых двух значений частной моментной функции четвертого порядка соответствующих $p_{l,k}=1$ и $p_{l,k}=2$ имеют вид

$$\Phi_4^{l,k}[1,1] = \frac{m_4[1,1-l,1-k]}{m_4[0,1-l,1-k]},$$

$$\Phi_4^{l,k}[2,2] = \frac{m_4[2,2-l,2-k]m_4[0,1-l,1-k] - m_4[1,2-l,2-k]m_4[1,1-l,1-k]}{m_4[0,2-l,2-k]m_4[0,1-l,1-k] - m_4[-1,1-l,1-k]m_4[1,2-l,2-k]}.$$

Из (14.23) получают остальные значения частной моментной функции $\Phi_4^{l,k}[p_{l,k}, p_{l,k}]$.

Оператор ОАР четвертого ранга описывается выражением

$$\hat{\Phi}_4^{l,k}(\hat{z}) = 1 - \Phi_4^{l,k}[1]\hat{z}^{-1} - \Phi_4^{l,k}[2]\hat{z}^{-2} - \dots - \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]\hat{z}^{-p_{l,k}}.$$

Уравнение (14.14) с использованием оператора $\hat{\Phi}_4^{l,k}(\hat{z})$ можно представить в виде $\hat{\Phi}_4^{l,k}(\hat{z})x[t] = a_4^{l,k}[t]$. Условие стационарности ОАР процесса следует из характеристического уравнения

$$(c^{l,k})^{p_{l,k}} - \Phi_4^{l,k}[1](c^{l,k})^{p_{l,k}-1} - \Phi_4^{l,k}[2](c^{l,k})^{p_{l,k}-2} - \dots - \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}] = 0. \quad (14.28)$$

Процесс стационарен, если корни уравнения (14.28) лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

14.5 Обобщенная модель авторегрессии произвольного ранга

Чтобы иметь полное представление о негауссовом процессе, необходимо рассматривать моментные или кумулянтные функции всех порядков. Хотя значимость модели ОАР с ростом ранга ослабевает, может оказаться полезной модель ОАР ранга большего четырех. Представленные выше соотношения для моделей ОАР третьего и четвертого рангов делают вполне понятной процедуру построения ОАР модели произвольного ранга. Поэтому ниже приведены лишь основные соотношения, необходимые при построении модели ОАР произвольного ранга [8].

Уравнение ОАР модели r -го ранга имеет вид

$$x[t] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\dots,u}} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[i] x[t-i] + a_r^{l,k,\dots,u}[t], \quad (14.29)$$

где количество свободных индексов $l, k, \dots, u$ равно $r-2$.

Коэффициенты ОАР $\Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]$ находятся из уравнения

$$m_r[j, j-l, \dots, j-u] = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\dots,u}} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[i] m_r[j-i, j-l, \dots, j-u], \quad (14.30)$$

где

$$E\{x[t]x[t-j]x[t-l]\dots x[t-u]\} = m_r[j, j-l, \dots, j-u],$$

$$E\{x[t-j]x[t-l]\dots x[t-u]a_r^{l,k,\dots,u}[t]\} =$$

$$= E\{a_r^{l,k,\dots,u}[t]a_r^{l,k,\dots,u}[t-j]\dots a_r^{l,k,\dots,u}[t-u]\} = 0,$$

при $j > 0$, $l, k, \dots, u \geq 0$. Моменты негауссова процесса и ошибок предсказания связаны уравнением

$$m_r = \sum_{i=1}^{p_{l,k,\dots,u}} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[i] m_r[0, i-l, \dots, i-u] + m_{ra}^{l,k,\dots,u}. \quad (14.31)$$

При выводе уравнения (14.31) использовались соотношения

$$E\{x[t]x[t]\dots x[t]\} = m_r, \quad E\{a_r^{l,k,\dots,u}[t]a_r^{l,k,\dots,u}[t]\dots a_r^{l,k,\dots,u}[t]\} = m_{ra}^{l,k,\dots,u}.$$

Уравнение (14.30) может быть представлено в матричном виде

$$\bar{m}_r[j, j-l, \dots, j-u] = m_r[j-i, j-l, \dots, j-u] \bar{\Phi}_r^{l,k,\dots,u}[i], \quad (14.32)$$

где

$$\bar{m}_r[j, j-l, \dots, j-u] = \begin{bmatrix} m_r[1, 1-l, \dots, 1-u] \\ m_r[2, 2-l, \dots, 2-u] \\ \dots \\ m_r[p, p-l, \dots, p-u] \end{bmatrix}, \quad (14.33, a)$$

$$\bar{\Phi}_r^{l,k,\dots,u}[i] = \begin{bmatrix} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[1] \\ \Phi_r^{l,k,\dots,u}[2] \\ \dots \\ \Phi_r^{l,k,\dots,u}[p] \end{bmatrix}, \quad (14.33, б)$$

$$m_r[j-i, j-l, \dots, j-u] = \quad (14.33, в)$$

$$= \begin{bmatrix} m_r[0, 1-l, \dots, 1-u] & m_r[-1, 1-l, \dots, 1-u] & \dots & m_r[1-p, 1-l, \dots, 1-u] \\ m_r[1, 2-l, \dots, 2-u] & m_r[0, 2-l, \dots, 2-u] & \dots & m_r[2-p, 2-l, \dots, 2-u] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_r[p-1, p-l, \dots, p-u] & m_r[p-2, p-l, \dots, p-u] & \dots & m_r[p, p-l, \dots, p-u] \end{bmatrix}$$

Для сокращения выражений в (14.33) полагалось $p_{l,k,\dots,u} = p$. Заметим, что размеры матриц в (14.33) зависят от значения порядка модели p и, в общем случае, для каждого набора $l, k, \dots, u$ значение p разное. Решение уравнения (14.32) можно записать через обратную моментную матрицу

$$\bar{\Phi}_r^{l,k,\dots,u}[i] = (m_r[j-i, j-l, \dots, j-u])^{-1} \bar{m}_r[j, j-l, \dots, j-u]. \quad (14.34)$$

Из (14.34) следует, что полное решение представляется набором коэффициентов ОАР для различных значений индексов $l, k, \dots, u$.

ОАР модель произвольного ранга позволяет описывать процесс с помощью частной моментной функции r -го ранга. Первые два значения частной моментной функции находятся по формулам

$$\Phi_r^{l,k,\dots,u}[1,1] = \frac{m_r[1,1-l,\dots,1-u]}{m_r[0,1-l,\dots,1-u]},$$

$$\Phi_r^{l,k,\dots,u}[2,2] =$$

$$= \frac{m_r[2,2-l,\dots,2-u]m_r[0,1-l,\dots,1-u] - m_r[1,2-l,\dots,2-u]m_r[1,1-l,\dots,1-u]}{m_r[0,2-l,\dots,2-u]m_r[0,1-l,\dots,1-u] - m_r[-1,1-l,\dots,1-u]m_r[1,2-l,\dots,2-u]}.$$

Уравнение ОАР модели r -го ранга (14.29) можно представить с помощью оператора ОАР r -го ранга

$$\hat{\Phi}_r^{l,k,\dots,u}(\hat{z}) = 1 - \Phi_r^{l,k,\dots,u}[1]\hat{z}^{-1} - \Phi_r^{l,k,\dots,u}[2]\hat{z}^{-2} - \dots - \Phi_r^{l,k,\dots,u}[p_{l,k,\dots,u}]\hat{z}^{-p_{l,k,\dots,u}}. \quad (14.35)$$

Тогда уравнение (14.29) в операторном виде описывается соотношением

$$\hat{\Phi}_r^{l,k,\dots,u}(\hat{z})x[t] = a_r^{l,k,\dots,u}[t].$$

Из (14.35) следует, что условие стационарности ОАР процесса r -го ранга определяется характеристическим уравнением

$$c^{p_{l,k,\dots,u}} - \Phi_r^{l,k,\dots,u}[1]c^{p_{l,k,\dots,u}-1} - \Phi_r^{l,k,\dots,u}[2]c^{p_{l,k,\dots,u}-2} - \dots - \Phi_r^{l,k,\dots,u}[p_{l,k,\dots,u}] = 0. \quad (14.36)$$

Для сокращения записи уравнения (14.36) индексы $l,k,\dots,u$ у корней c опущены. Процесс, описываемый моделью ОАР, стационарен, если корни характеристического уравнения лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости.

Достоинством модели ОАР является ее конструктивность, заключающаяся в возможности синтеза довольно простым образом алгоритмов обработки случайных процессов. На рис. 14.1 представлен ОАР фильтр предсказания (обеляющий фильтр), алгоритм действия которого описывается выражением

$$a_r^{l,k,\dots,u}[t] = x[t] - \sum_{i=1}^{p_{l,k,\dots,u}} \Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]x[t-i].$$

Он состоит из линий задержки, усилителей с коэффициентами усиления $-\Phi_r^{l,k,\dots,u}[i]$, $0 < i \leq p$ и сумматора.

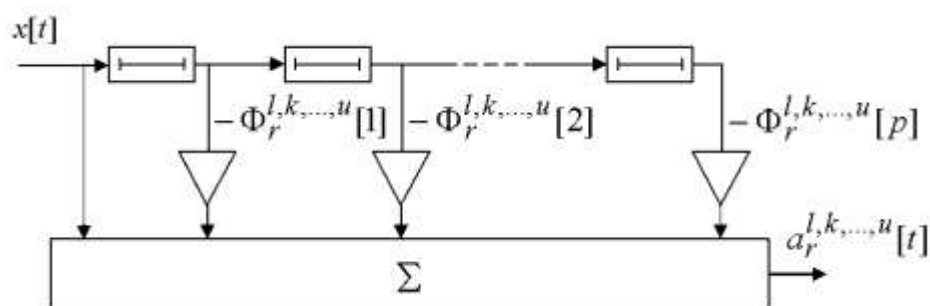


Рисунок 14.1 – ОАР фильтр предсказания.

Обеляющий фильтр, коэффициенты усиления которого рассчитываются по моментным функциям некоторого порядка, применяется при оценке порядка модели ОАР. При правильно выбранном порядке модели, ошибки предсказания на выходе этого фильтра имеют нулевую моментную функцию r -го порядка с фиксированными сдвигами $l, k, \dots, u$.

Обеляющий фильтр применяется также в качестве анализирующего фильтра, задача которого – концентрация в коэффициентах усиления фильтра всей информации о статистических связях некоторого порядка случайного процесса. Анализирующие обеляющие фильтры широко применяются в устройствах кодирования речи в цифровых системах связи [9, 10]. Принцип их действия основан на том, что в процессе обеления у случайного процесса удаляется статистическая связь заданного порядка, описываемая моментной функцией. Соответствующая информация о статистических связях содержится в коэффициентах ОАР, рассчитанных по моментным функциям.

Параметрические оценки спектров вычисляются по параметрам моделей линейного предсказания и дают, как правило, довольно полную статистическую характеристику о случайном процессе. Поэтому анализирующий фильтр на основе обеляющего фильтра, позволяет получать параметры модели, достаточно полно описывающие случайный процесс. Это подтверждается хорошим качеством передачи речи с помощью параметров линейного предсказания в современных цифровых системах связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журбенко И.Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. – М.: Изд-во моск. ун-та, 1987. – 240 с.
2. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
3. Ширяев А.Н. Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов // Теория вероятности и ее применение. – 1960. – №№5, 3. – с. 293–313.
4. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.
5. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
7. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. – К.: Выща школа, 1987. – 191 с.
8. Тихонов В.А. Обобщенная модель авторегрессии высших рангов негауссовых процессов // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – №4. – С. 39–42.
9. Громаков Ю.А. Стандарты и системы подвижной связи. – М.: Мобильные ТелеСистемы. Эко-Трендз, 1997. – 239 с.
10. Коротаев Г.А. Анализ и синтез речевого сигнала методом линейного предсказания // Зарубежная радиоэлектроника. – 1990. – №3. – с. 31–51.

15 ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

15.1 Введение

Модель АР наиболее точно описывает случайные процессы, спектры которых содержат острые пики и не имеют острых впадин. Для моделирования случайных процессов, спектры которых имеют широкие максимумы и острые минимумы, применяют модель СС. Модель СС используется для описания слабо коррелированных широкополосных процессов.

Оценивание параметров модели СС производят по значениям функции корреляции. Поэтому эта модель, также, как и модель АР, описывает случайный процесс в рамках корреляционной теории. Для того чтобы в модели СС учитывались статистические связи высших порядков, необходимо обобщение модели на основе моментных функций порядка больше двух. Ниже будет рассмотрена модель ОСС, позволяющая более полно описывать широкополосные негауссовы случайные процессы.

15.2 Обобщенная модель скользящего среднего третьего ранга

Пусть задан стационарный негауссов широкополосный случайный процесс с не равной нулю моментной функцией третьего порядка. Будем полагать, что разностное уравнение, описывающее процесс ОСС, имеет вид [1]

$$x[t] = -\sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i] a_3^l[t-i] + a_3^l[t], \quad (15.1)$$

где $Q_3^l[i]$ – коэффициенты, а q_l – порядок модели ОСС, $a_3^l[t]$ – ошибки предсказания, являющиеся случайными отсчетами и имеющие нулевую моментную функцию третьего порядка для сдвигов $l = 0, 1, \dots$. Свободный индекс l у $a_3^l[t]$ означает, что ошибки предсказания получены по модели ОСС с коэффициентами ОСС с индексом l .

Уравнения для расчета параметров модели получают при условии статистической независимости ошибок предсказания. Получим уравнение, связывающее третьи моменты случайных процессов $x[t]$ и $a_3^l[t]$. Для этого умножим левую и правую части (15.1) на произведение $x[t]x[t]$ и усредним. Полученное выражение имеет вид

$$m_3 = [1 - (Q_3^l[1])^3 - (Q_3^l[2])^3 - \dots - (Q_3^l[q_l])^3] m_{3a}^l, \quad (15.2)$$

где $m_3 = E\{x[t]x[t]x[t]\}$, $m_{3a}^l = E\{a_3^l[t]a_3^l[t]a_3^l[t]\}$.

Чтобы найти систему уравнений для определения коэффициентов ОСС, умножим левую и правую части (15.1) на произведение $x[t-j]x[t-l]$ и усредним

$$\begin{aligned}
 m_3[j, j-l] = & \sum_{i,u=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[u]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-j]a_3^l[t-u-l]\} - \\
 & - \sum_{i,n,u=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]Q_3^l[u]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-n-j]a_3^l[t-u-l]\} + \\
 & + \sum_{i,n=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-n-j]a_3^l[t-l]\} - \\
 & - \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\},
 \end{aligned} \tag{15.3}$$

где $m_3[j, j-l] = E\{x[t]x[t-j]x[t-l]\}$. Из условия статистической независимости третьего порядка ошибок предсказания следуют соотношения

$$E\{a_3^l[t]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\} = \delta[j]\delta[l]m_{3a}^l = 0, \quad j > 0,$$

$$E\{a_3^l[t-i]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\} = \delta[j-i]\delta[l-i]m_{3a}^l, \quad j > 0,$$

где $\delta[j] = 1, j = 0$, $\delta[j] = 0, j \neq 0$ – единичная дельта-последовательность (единичная импульсная функция).

Выражение (15.3) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 m_3[j, j-l] = & \left(\sum_{i,u=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[u]\delta[i-j]\delta[i-u-l] - \sum_{i,n,u=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]Q_3^l[u]\delta[i-n-j] \times \right. \\
 & \times \delta[i-u-l] + \sum_{i,n=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]\delta[i-l]\delta[i-n-j] - \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]\delta[i-j]\delta[i-l] \left. \right) m_{3a}^l.
 \end{aligned} \tag{15.4}$$

Учитывая фильтрующее свойство дельта-последовательности, слагаемые в правой части (15.4) можно преобразовать

$$\begin{aligned}
\sum_{i,v=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[k]\delta[i-j]\delta[i-v-l]m_{3a}^l &= Q_3^l[j]Q_3^l[j-l]m_{3a}^l, \\
\sum_{i,n,v=1}^{q_l} Q_3^l[i]\tilde{Q}_3^l[n]Q_3^l[v]\delta[i-n-j]\delta[i-v-l]m_{3a}^l &= \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i] \times Q_3^l[i-j]Q_3^l[i-l]m_{3a}^l, \\
\sum_{n,i=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[n]\delta[i-l]\delta[i-n-j]m_{3a}^l &= Q_3^l[l]Q_3^l[l-j]m_{3a}^l, \\
\sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]\delta[i-j]\delta[i-l]m_{3a}^l &= Q_3^l[j]\delta[j-l]m_{3a}^l.
\end{aligned} \tag{15.5}$$

Два последних выражения в (15.5) равны нулю вследствие того, что i не может быть равным нулю.

Используя результаты преобразований (15.5) и соотношения (15.2), из выражения (15.4) получим систему уравнений для расчета коэффициентов ОСС

$$\mu_3[j, j-l] = \frac{Q_3^l[j]Q_3^l[j-l] - \sum_{i=1}^{q_l} Q_3^l[i]Q_3^l[i-j]Q_3^l[i-l] + Q_3^l[l]Q_3^l[l-j] - Q_3^l[j]\delta[j-l]}{1 - (Q_3^l[1])^3 - (Q_3^l[2])^3 - \dots - (Q_3^l[q_l])^3}, \tag{15.6}$$

где нормированная моментная функция определяется соотношением

$$\mu_3[j, j-l] = m_3[j, j-l] / m_3.$$

Порядок модели можно определять по близости к нулю моментной функции третьего порядка $m_{3a}^l[0, l]$ ошибки предсказания $a_3^l[t]$ для заданного сдвига l . Модель ОСС, в общем случае, имеет отличные для разных l коэффициенты ОСС. Поэтому для нахождения системы уравнений фиксируется индекс l , а индекс j необходимо изменять от 1 до q_l . Выбор индекса l зависит от условий решаемой задачи и статистических свойств негауссова случайного процесса. Изменяя l , можно строить новые модели ОСС третьего ранга. При этом увеличивается общее количество коэффициентов ОСС, которые необходимо рассчитывать, а затем учитывать и анализировать. Следует помнить, что использование слишком сложных моделей может снизить точность решения поставленной задачи из-за неустойчивости и роста дисперсии оцениваемых параметров. Как правило, наиболее полезные модели ОСС получают при $l = 0, 1$.

Рассмотрим примеры построения модели ОСС третьего ранга первого порядка $q_l = 1$:

1. Пусть $j=1, l=0$. Тогда все выражения (15.5), кроме первого, равны нулю и (15.6) принимает вид

$$\mu_3[1,1] = \frac{(Q_3^0[1])^2}{1 - (Q_3^0[1])^3}. \quad (15.7, a)$$

2. Пусть $j=1, l=1$. Ненулевым членом будет последнее уравнение в (15.5) и уравнение (15.6) принимает вид

$$\mu_3[0,1] = -\frac{Q_3^1[1]}{1 - (Q_3^1[1])^3} \quad (15.7, б)$$

3. Пусть $j=1, l=2$. В этом случае все выражения в (15.5) равны нулю и уравнение (15.6) принимает вид $\mu_3[i, 1-l] = 0$.

Найдем системы уравнений для ОСС второго порядка $q_l = 2$:

1. Пусть $j=1, 2; l=0$. Из (15.6) получим

$$\mu_3[1,1] = \frac{(Q_3^0[1])^2 - (Q_3^0[2])^2 Q_3^0[1]}{1 - (Q_3^0[1])^3 - (Q_3^0[2])^3},$$

$$\mu_3[2,2] = \frac{(Q_3^0[2])^2}{1 - (Q_3^0[1])^3 - (Q_3^0[2])^3}.$$

2. Пусть $j=1, 2; l=1$. Тогда система уравнений имеет вид

$$\mu_3[1,0] = \frac{-(Q_3^1[1])^2 Q_3^1[2] - Q_3^1[1]}{1 - (Q_3^1[1])^3 - (Q_3^1[2])^3},$$

$$\mu_3[1,2] = \frac{Q_3^1[1] Q_3^1[2]}{1 - (Q_3^1[1])^3 - (Q_3^1[2])^3}.$$

3. Пусть $j = 1, 2$; $l = 2$. Система уравнений имеет вид

$$\mu_3[2,1] = \frac{Q_3^2[1]Q_3^2[2]}{1 - (Q_3^2[1])^3 - (Q_3^2[2])^3},$$

$$\mu_3[0,2] = \frac{-Q_3^2[2]}{1 - (Q_3^2[1])^3 - (Q_3^2[2])^3}.$$

4. Пусть $j = 1, 2$; $l = 3$. При таких сдвигах моментная функция процесса ОСС равна нулю – $\mu_3[j, j-l] = 0$.

15.3 Обобщенная модель скользящего среднего четвертого ранга

Способ построения модели ОСС четвертого ранга такой же, как и для третьего ранга. Однако уравнения для расчета коэффициентов ОСС выглядят несколько иначе. Ниже показано, что промежуточные выражения при выводе этих уравнений естественным образом существенно упрощаются, если использовать продемонстрированное выше фильтрующее свойство дельта–последовательности.

Пусть задан стационарный негауссов случайный процесс с не равной нулю моментной функцией четвертого порядка. Разностное уравнение, описывающее модель ОСС четвертого ранга, аналогично уравнению обычной модели СС

$$x[t] = - \sum_{i=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i] a_4^{l,k}[t-i] + a_4^{l,k}[t], \quad (15.8)$$

где $Q_4^{l,k}[i]$ – коэффициенты, а $q_{l,k}$ – порядок модели ОСС, $a_4^{l,k}[t]$ – случайные отсчеты, имеющие нулевую моментную функцию четвертого порядка для сдвигов l и k . Свободные индексы l и k у $a_4^{l,k}[t]$ показывают, что ошибки предсказания соответствуют модели ОСС с коэффициентами ОСС с индексами l и k .

Случайные отсчеты ошибок предсказания для такой модели должны удовлетворять условию статистической независимости четвертого порядка

$$E\{a_4^{l,k}[t]a_4^{l,k}[t-j]a_4^{l,k}[t-l]a_4^{l,k}[t-k]\} = \delta[j]\delta[l]\delta[k]m_{4a}^{l,k} = 0, \quad j > 0, \quad (15.9, a)$$

$$E\{a_4^{l,k}[t-i]a_4^{l,k}[t-j]a_4^{l,k}[t-l]a_4^{l,k}[t-k]\} = \delta[j-i]\delta[l-i]\delta[k-i]m_{4a}^{l,k}, \quad j > 0. \quad (15.9, б)$$

Из (15.1) легко получить выражение для четвертого момента ОСС, умножив его на произведение $x[t]x[t]x[t]$, а затем усреднив

$$m_4 = \left(1 + \sum_{i=1}^{q_{l,k}} (Q_4^{l,k}[i])^4 \right) m_{4a}^{l,k} \quad (15.10)$$

где $m_4 = E\{x[t]x[t]x[t]x[t]\}$ – момент четвертого порядка негауссова случайного процесса, $m_{4a}^{l,k} = E\{a_4^{l,k}[t]a_4^{l,k}[t]a_4^{l,k}[t]a_4^{l,k}[t]\}$ – момент четвертого порядка ошибки предсказания.

Чтобы найти уравнения, с помощью которых вычисляются коэффициенты ОСС четвертого ранга, умножим (15.8) на произведение $x[t-j]x[t-l]x[t-k]$ и усредним.

С учетом (15.9) получаем уравнение вида

$$\begin{aligned} m_4[j, j-l, j-k] = & \\ = & \left(\sum_{i,v,n,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[n]Q_4^{l,k}[r]Q_4^{l,k}[v]\delta[i-v-j]\delta[i-r-k]\delta[i-n-l] - \right. \\ & - \sum_{i,n,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[r]\delta[i-v-j]\delta[i-r-k]\delta[i-l] - \\ & - \sum_{i,v,n=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[n]\delta[i-v-j]\delta[i-n-l]\delta[i-k] - \\ & - \sum_{i,v,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[r]Q_4^{l,k}[n]\delta[i-r-k]\delta[i-n-l]\delta[i-j] + \\ & + \sum_{i,v=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[v]\delta[i-v-j]\delta[i-l]\delta[i-k] + \\ & + \sum_{i,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[r]\delta[i-j]\delta[i-r-k]\delta[i-l] + \\ & + \sum_{i,n=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[n]\delta[i-n-l]\delta[i-j]\delta[i-k] + \\ & \left. + \sum_{v,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[r]\delta[l-v-j]\delta[l-r-k]\delta[l] + \right) \quad (15.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{v,n=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[n]\delta[k-v-j]\delta[k-n-l]\delta[k]- \\
& - \sum_{i=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]\delta[i-j]\delta[i-l]\delta[i-k])m_{4a}^{l,k}.
\end{aligned}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-последовательности, составляющие сумму в правой части выражения (15.11) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,v,n,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[n]Q_4^{l,k}[r]Q_4^{l,k}[v]\delta[i-v-j]\delta[i-r-k]\delta[i-n-l]= \\
& = \sum_{v=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[v+j]Q_4^{l,k}[v+j-l]Q_4^{l,k}[v+j-k], \\
& \sum_{i,n,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[r]\delta[i-v-j]\delta[i-r-k]\delta[i-l]= \\
& = Q_4^{l,k}[l]Q_4^{l,k}[l-k]Q_4^{l,k}[l-j], \\
& \sum_{i,v,n=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[n]\delta[i-v-j]\delta[i-n-l]\delta[i-k]= \\
& = Q_4^{l,k}[k]Q_4^{l,k}[k-j]Q_4^{l,k}[k-l], \\
& \sum_{i,v,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[r]Q_4^{l,k}[n]\delta[i-r-k]\delta[i-n-l]\delta[i-j]= \\
& \hspace{25em} (15.12) \\
& = Q_4^{l,k}[j]Q_4^{l,k}[j-k]Q_4^{l,k}[j-l], \\
& \sum_{i,v=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[v]\delta[i-v-j]\delta[i-l]\delta[i-k]= Q_4^{l,k}[k]Q_4^{l,k}[k-j]\delta[k-l], \\
& \sum_{i,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[r]\delta[i-j]\delta[i-r-k]\delta[i-l]= Q_4^{l,k}[j]Q_4^{l,k}[j-k]\delta[j-l],
\end{aligned}$$

$$\sum_{i,n=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]Q_4^{l,k}[n]\delta[i-n-l]\delta[i-j]\delta[i-k]=Q_4^{l,k}[j]Q_4^{l,k}[j-l]\delta[j-k],$$

$$\sum_{v,r=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[r]\delta[l-v-j]\delta[l-r-k]\delta[l]=Q_4^{l,k}[l-j]Q_4^{l,k}[l-k]\delta[l]=0,$$

$$\sum_{v,n=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[n]\delta[k-v-j]\delta[k-n-l]\delta[k]=Q_4^{l,k}[k-j]Q_4^{l,k}[k-l]\delta[k]=0,$$

$$\sum_{i=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[i]\delta[i-j]\delta[i-l]\delta[i-k]=Q_4^{l,k}[j]\delta[j-l]\delta[j-k].$$

Подставляя выражения (15.12) в уравнение (15.11), получим

$$\begin{aligned} m_4[j, j-l, j-k] = & \left(\sum_{v=1}^{q_{l,k}} Q_4^{l,k}[v]Q_4^{l,k}[v+j]Q_4^{l,k}[v+j-l]Q_4^{l,k}[v+j-k] - \right. \\ & - Q_4^{l,k}[l]Q_4^{l,k}[l-k]Q_4^{l,k}[l-j] - Q_4^{l,k}[k]Q_4^{l,k}[k-j]Q_4^{l,k}[k-l] - \\ & - Q_4^{l,k}[j]Q_4^{l,k}[j-k]Q_4^{l,k}[j-l] + Q_4^{l,k}[k]Q_4^{l,k}[k-j]\delta[k-l] + \\ & + Q_4^{l,k}[j]Q_4^{l,k}[j-k]\delta[j-l] + Q_4^{l,k}[j]Q_4^{l,k}[j-l]\delta[j-k] - \\ & \left. - Q_4^{l,k}[j]\delta[j-l]\delta[j-k] \right) m_{4a}^{l,k}. \end{aligned} \quad (15.13)$$

Система уравнений (15.13) для вычисления коэффициентов ОСС, за исключением случая $q_{l,k}=1$, нелинейная. Для ее решения пользуются либо численными методами, либо методом аппроксимации процесса ОСС процессом ОАР высокого порядка [2].

Для нахождения системы уравнений, из которой можно определить коэффициенты ОСС, нужно зафиксировать в (15.13) два индекса l и k , а индекс j изменять от 1 до $q_{l,k}$. Рассмотрим случай, когда модель ОСС четвертого ранга имеет первый порядок. В уравнениях будем использовать нормированные значения моментной функции

$$\mu_4[j,l,k] = \frac{m_4[j,l,k]}{m_4} \quad (15.14)$$

1. Пусть $j=1, l=0, k=0$. Тогда из соотношений (15.10), (15.13) и (15.14) следует

$$\mu_4[1,1,1] = \frac{-(Q_4^{0,0}[1])^3}{1 + (Q_4^{0,0}[1])^4}.$$

2. Пусть $j=1, l=0, k=1$. В этом случае получим

$$\mu_4[0,1,1] = \frac{(Q_4^{0,1}[1])^2}{1 + (Q_4^{0,1}[1])^4}. \quad (15.15)$$

3. Пусть $j=1, l=1, k=1$. Тогда выражение для определения $Q_4^{1,1}[1]$ имеет вид

$$\mu_4[0,0,1] = \frac{-Q_4^{1,1}[1]}{1 + (Q_4^{1,1}[1])^4}. \quad (15.16)$$

4. Пусть $j=2, l=1, k=1$. Тогда $\mu_4[1,2,1] = 0$.

Приведем примеры уравнений для вычисления коэффициентов ОСС при $q_{l,k} = 2$.

1. Пусть $j=1, 2; l=k=0$. Система уравнений имеет вид

$$\mu_4[1,1,1] = \frac{Q_4^{0,0}[1](Q_4^{0,0}[2])^3 - (Q_4^{0,0}[1])^3}{1 + (Q_4^{0,0}[1])^4 + (Q_4^{0,0}[2])^4},$$

$$\mu_4[2,2,2] = \frac{-(Q_4^{0,0}[2])^3}{1 + (Q_4^{0,0}[1])^4 + (Q_4^{0,0}[2])^4}.$$

2. Пусть $j=1, 2, l=0, k=1$. Тогда система уравнений может быть представлена следующим образом:

$$\mu_4[0,1,1] = \frac{(Q_4^{0,1}[1])^2(Q_4^{0,1}[2])^2 + (Q_4^{0,1}[1])^2}{1 + (Q_4^{0,1}[1])^4 + (Q_4^{0,1}[2])^4},$$

$$\mu_4[1,2,2] = \frac{-(Q_4^{0,1}[2])^2 Q_4^{0,1}[1]}{1 + (Q_4^{0,1}[1])^4 + (Q_4^{0,1}[2])^4}.$$

3. Пусть $j=1, 2, l=1, k=2$. Нелинейную систему уравнений можно записать в виде

$$\mu_4[1,2,1] = \frac{-(Q_4^{1,2}[1])^2 Q_4^{1,2}[2]}{1 + (Q_4^{1,2}[1])^4 + (Q_4^{1,2}[2])^4},$$

$$\mu_4[0,1,2] = \frac{Q_4^{1,2}[1]Q_4^{1,2}[2]}{1 + (Q_4^{1,2}[1])^4 + (Q_4^{1,2}[2])^4}.$$

4. Пусть $j=1, 2, l=1, k=3$. Для этих индексов моментные функции процесса ОСС равны нулю

$$\mu_4[2,3,2] = 0, \mu_4[1,3,2] = 0.$$

Таким образом, соотношения (15.10) и (15.13) составляют полный набор уравнений для оценки параметров модели ОСС. Порядок модели можно определять по близости к нулю моментной функции четвертого порядка ошибки предсказания $a_4^{l,k}[t]$ для заданных l и k .

15.4 Обобщенная модель скользящего среднего произвольного ранга

Пусть задан стационарный негауссов случайный процесс с неравной нулю моментной функцией r -го порядка. Для произвольного r -го ранга разностное уравнение ОСС имеет вид

$$x[t] = - \sum_{i=1}^{q_{l,k,\dots,u}} Q_r^{l,k,\dots,u}[i] a_r^{l,k,\dots,u}[t-i] + a_r^{l,k,\dots,u}[t], \quad (15.17)$$

где $Q_r^{l,k,\dots,u}[i]$ – коэффициенты модели ОСС r -го ранга. Случайные отсчеты $a_r^{l,k,\dots,u}[t]$ по условию статистической независимости r -го порядка должны удовлетворять соотношениям

$$\underbrace{(a_r^{l,k,\dots,u}[t] a_r^{l,k,\dots,u}[t-j] \dots a_r^{l,k,\dots,u}[t-u])}_r = \delta[j] \dots \delta[u], \quad j > 0, \quad (15.18, a)$$

$$\underbrace{(a_r^{l,k,\dots,u}[t-i]a_r^{l,k,\dots,u}[t-j]\dots a_r^{l,k,\dots,u}[t-u])}_r = \delta[j-i]\dots\delta[u-i], \quad j > 0 \quad (15.18, б)$$

Чтобы получить системы уравнений, связывающих значения моментных функций r -го порядка и коэффициентов ОСС, нужно умножить левую и правую часть (15.17) на произведение $x[t-j]\dots x[t-u]$ и усреднить. После простых преобразований, с учетом (15.18) уравнения принимают вид

$$m_r[j, j-l, \dots, j-u] = F(Q_r^{l,k,\dots,u}[1]Q_r^{l,k,\dots,u}[2]\dots Q_r^{l,k,\dots,u}[q_{l,k,\dots,u}]), \quad j > 0, \quad (15.19)$$

где $F(Q_r^{l,k,\dots,u}[1]Q_r^{l,k,\dots,u}[2]\dots Q_r^{l,k,\dots,u}[q_{l,k,\dots,u}])$ – некоторая функция от коэффициентов ОСС. Вид этой функции зависит от порядка $q_{l,k,\dots,u}$, ранга r , свободных индексов моментных функций $j, l, \dots, u$ и определяется способом, продемонстрированным при построении моделей ОСС третьего и четвертого рангов.

Выражение, связывающее момент r -го порядка негауссова процесса и моменты r -го порядка ошибок предсказания модели ОСС r -го ранга, можно получить из (15.17)

$$m_r = \left(1 \pm \sum_{i=1}^{q_{l,k,\dots,u}} (Q_r^{l,k,\dots,u}[i])^r \right) m_{ra}^{l,k,\dots,u}, \quad (15.20)$$

где знак “+” берется для r четного, а “–” для r нечетного. Система уравнений (15.19) и (15.20) позволяет найти параметры модели ОСС.

Характеристическое уравнение для модели ОСС r -го ранга можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} c^{q_{l,k,\dots,u}} - Q_r^{l,k,\dots,u}[1]c^{q_{l,k,\dots,u}-1} - Q_r^{l,k,\dots,u}[2]c^{q_{l,k,\dots,u}-2} - \dots \\ \dots - Q_r^{l,k,\dots,u}[q_{l,k,\dots,u}] = 0. \end{aligned} \quad (15.21)$$

Для сокращения записи уравнения (15.21) индексы $l, k, \dots, u$ у корней c опущены. Условие обратимости модели ОСС r -го ранга состоит в том, что корни характеристического уравнения (15.21) должны лежать внутри единичного комплексного круга.

Модель СС позволяет синтезировать обесляющий фильтр. Ошибки предсказания на выходе этого фильтра описываются рекуррентным соотношением

$$a_r^{l,k,\dots,u}[t] = x[t] + \sum_{i=1}^{q_{l,k,\dots,u}} Q_r^{l,k,\dots,u}[i] a_r^{l,k,\dots,u}[t-i].$$

Блок–схема такого фильтра представлена на рис. 15.1.

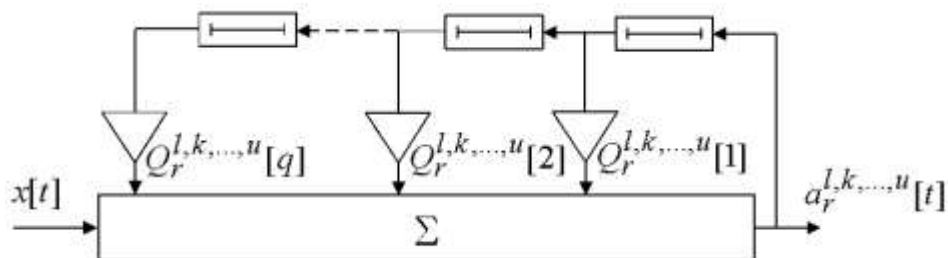


Рисунок 15.1 – Обеляющий фильтр на основе модели ОСС

Таким образом, принципы построения обобщенных моделей линейного предсказания позволяют получить уравнения моделей ОСС любого ранга. Уравнения для расчета коэффициентов моделей ОСС аналогичны соответствующим уравнениям для модели СС [3]. Отличие полученных уравнений состоит в том, что они могут иметь другой порядок, иные коэффициенты модели, рассчитываемые по моментным функциям. Следовательно, с помощью найденных уравнений можно оценивать параметры моделей ОСС, дополняющих обычную корреляционную модель СС. Эти модели описывают негауссовы свойства моделируемого процесса. Обычная модель СС является частным случаем обобщенной модели ОСС, когда ранг модели равен двум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.А. Обобщенная модель скользящего среднего негауссовых процессов // Радиотехника. – 2003. – №133. – С. 208–211.
2. Марпл–мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.

16 ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ-СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

16.1 Введение

Смешанная модель линейного предсказания АРСС наиболее рационально описывает случайные процессы, спектры которых содержат острые пики и глубокие острые впадины. Для того чтобы в модели АРСС учесть статистические связи высших порядков, необходимо обобщение модели на основе моментных функций порядка больше двух. Ниже будет описана модель ОАРСС, позволяющая более полно описывать негауссовы случайные процессы со смешанным спектром [1].

16.2 Обобщенная модель авторегрессии–скользящего среднего третьего ранга

Пусть моделируемый процесс $x[t]$ представляет собой стационарный негауссов случайный процесс со смешанным спектром с неравной нулю моментной функцией третьего порядка. Будем полагать, что статистические связи высших порядков отсчетов негауссова случайного процесса описываются уравнениями, аналогичными уравнению классической модели АРСС. Тогда обобщенная модель АРСС третьего ранга описывается разностным уравнением

$$\begin{aligned} x[t] = & \Phi_3^l[1]x[t-1] + \Phi_3^l[2]x[t-2] + \dots + \Phi_3^l[p_l]x[t-p_l] - \\ & - Q_3^l[1]a_3^l[t-1] - Q_3^l[2]a_3^l[t-2] - \dots - Q_3^l[q_l]a_3^l[t-q_l] + a_3^l[t], \end{aligned} \quad (16.1)$$

где $\Phi_3^l[i]$ – коэффициенты ОАР, $Q_3^l[i]$ – коэффициенты ОСС модели ОАРСС для фиксированного сдвига моментной функции $l \geq 0$. Эта модель описывает статистические связи второго порядка негауссова процесса в отличие от обычной модели АРСС, учитывающей лишь статистические связи первого порядка. Как правило, полагают, что коэффициенты авторегрессии должны удовлетворять условию стационарности, а коэффициенты скользящего среднего – условию обратимости процесса [2]. Ошибка предсказания $a_3^l[t]$ является стационарным случайным негауссовым процессом типа белого шума, которая удовлетворяет условию статистической независимости второго порядка

$$E\{a_3^l[t]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\} = 0, \quad j > 0.$$

Выражение для моментной функции третьего порядка процесса ОАРСС можно получить, если умножить левую и правую части (16.1) на произведение $x[t-j]x[t-l]$, а затем усреднить

$$\begin{aligned} m_3[j, j-l] &= \Phi_3^l[1]m_3[j-1, j-l] + \Phi_3^l[2]m_3[j-2, j-l] + \dots \\ &\dots + \Phi_3^l[p_l]m_3[j-p_l, j-l] - Q_3^l[1]m_{3xxa}[-j, -l, -1] - \dots \\ &\dots - Q_3^l[q_l]m_{3xxa}[-j, -l, -q_l] + m_{3xxa}[-j, -l, 0], \end{aligned} \quad (16.2)$$

где $m_3[j, j-l]$ – моментная функция третьего порядка процесса $x[t]$, $m_{3xxa}[-j, -l, -i]$ – взаимная моментная функция третьего порядка случайных процессов $x[t]$ и $a_3^l[t]$, для которой справедливы соотношения

$$m_{3xxa}[-j, -l, -i] = E\{x[t-j]x[t-l]a_3^l[t-i]\} = m_{3a}^l \quad (16.3)$$

при $j=i=l$. Взаимная моментная функция $m_{3xxa}[-j, -l, -i]$ удовлетворяет соотношениям, которые являются следствием (16.3)

$$m_{3xxa}[-j, -l, -i] = 0, \quad j > i, \quad l > i \quad (16.4, a)$$

$$m_{3xxa}[-j, -l, -i] \neq 0, \quad j \leq i, \quad l \leq i \quad (16.4, б)$$

Частным случаем (16.2) является уравнение, полученное при условии, что все взаимные моментные функции $m_{3xxa}[-j, -l, -i]$, в силу (16.4, а), равны нулю

$$\begin{aligned} m_3[j, j-l] &= \Phi_3^l[1]m_3[j-1, j-l] + \Phi_3^l[2]m_3[j-2, j-l] + \dots \\ &\dots + \Phi_3^l[p_l]m_3[j-p_l, j-l], \quad j \geq q_l + 1. \end{aligned}$$

Выражение для третьего момента процесса $x[t]$ можно получить из (16.1), если умножить его левую и правую части на произведение $x[t]x[t]$ и усреднить

$$m_3 = \Phi_3^l[1]m_3[1,1] + \Phi_3^l[2]m_3[2,2] + \dots + \Phi_3^l[p_l]m_3[p_l, p_l] - Q_3^l[1]m_{3xxa}[0,0,-1] - \\ - Q_3^l[2]m_{3xxa}[0,0,-2] - \dots - Q_3^l[q_l]m_{3xxa}[0,0,-q_l] + m_{3a}^l.$$

В качестве примера построения модели рассмотрим модель ОАРСС (1,1) третьего ранга для произвольного фиксированного l

$$x[t] = \Phi_3^l[1]x[t-1] - Q_3^l[1]a_3^l[t-1] + a_3^l[t] \quad (16.5)$$

Моментная функция процесса удовлетворяет уравнению

$$m_3[j, j-l] = \Phi_3^l[1]m_3[j-1, j-l] - Q_3^l[1]m_{3xxa}[-j, -l, -1] + m_{3xxa}[-j, -l, 0].$$

Система уравнений, описывающая модель ОАРСС (1,1), имеет вид

$$m_3 = \Phi_3^l[1]m_3[1,1] - Q_3^l[1]m_{3xxa}[0,0,-1] + m_{3a}^l, \\ m_3[1,1-l] = \Phi_3^l[1]m_3[0,1-l] - Q_3^l[1]m_{3xxa}[-1,-l,-1], \quad (16.6) \\ m_3[j, j-l] = \Phi_3^l[1]m_3[j-1, j-l], \quad j > 1.$$

Чтобы получить полную систему уравнений модели ОАРСС (1,1), необходимо задать значение индекса l . Для $l = 0$ из (16.6) получим

$$m_3 = \Phi_3^0[1]m_3[1,1] - Q_3^0[1]m_{3xxa}[0,0,-1] + m_{3a}^0, \\ m_3[1,1] = \Phi_3^0[1]m_3[0,1] - Q_3^0[1]m_{3xxa}[-1,0,-1], \quad (16.7) \\ m_3[j, j] = \Phi_3^0[1]m_3[j-1, j], \quad j > 1.$$

Взаимную моментную функцию $m_{3xxa}[0,0,-1]$ можно найти, умножив (16.5) на произведение $x[t]a_3^0[t-1]$ и усреднив

$$m_{3xxa}[0,0,-1] = \Phi_3^0[1]m_{3xxa}[0,-1,-1] - Q_3^0[1]m_{3xxa}[0,-1,-1]. \quad (16.8)$$

Функцию $m_{3xxa}[0, -1, -1]$, входящую в выражение (16.8), найдем, умножив (16.5) на произведение $x[t-1]a_3^0[t-1]$, а затем усреднив

$$m_{3xxa}[0, -1, -1] = \Phi_3^0[1]m_{3xxa}[-1, -1, -1] - Q_3^0[1]m_{3xaa}[-1, -1, -1]. \quad (16.9)$$

Взаимные моментные функции в (16.9) равны

$$\begin{aligned} m_{3xxa}[-1, -1, -1] &= (x[t-1]x[t-1]a_3^0[t-1]) = m_{3a}^0, \\ m_{3xaa}[-1, -1, -1] &= (x[t-1]a_3^0[t-1]a_3^0[t-1]) = m_{3a}^0. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Тогда с использованием соотношений (16.10), выражение (16.9) приводится к виду

$$m_{3xxa}[0, -1, -1] = (\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])m_{3a}^0 \quad (16.11)$$

Для нахождения $m_{3xaa}[0, -1, -1]$, входящего в выражение (16.11), умножим (16.5) на произведение $a_3^0[t-1]a_3^0[t-1]$ и усредним. Используя (16.10), получим

$$m_{3xaa}[0, -1, -1] = (\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])m_{3a}^0. \quad (16.12)$$

Подставляя найденные взаимные моментные функции (16.11) и (16.12) в (16.8), приходим к выражению

$$m_{3xxa}[0, 0, -1] = (\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])^2 m_{3a}^0 \quad (16.13)$$

Учитывая значения взаимных моментных функций (16.11) и (16.13), систему уравнений (16.7) можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} m_3 &= \Phi_3^0[1]m_3[1, 1] - Q_3^0[1](\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])^2 m_{3a}^0 + m_{3a}^0, \\ m_3[1, 1] &= \Phi_3^0[1]m_3[0, 1] - Q_3^0[1](\Phi_3^0[1] - Q_3^0[1])m_{3a}^0, \end{aligned} \quad (16.14)$$

$$m_3[j, j] = \Phi_3^0[1]m_3[j-1, j], \quad j > 1.$$

Решая систему уравнений (16.14), определяют параметры $\Phi_3^0[1]$ и $Q_3^0[1]$, и третий момент ошибки предсказания m_{3a}^0 . Полученные выражения

показывают, что параметры моделей ОАРСС третьего ранга могут быть оценены на основе полных систем уравнений.

16.3 Обобщенная модель авторегрессии–скользящего среднего четвертого ранга

16.3.1 Модель ОАРСС четвертого ранга Z

Модель ОАРСС четвертого ранга Z описывается разностным уравнением

$$\begin{aligned} x[t] = & \Phi_4^{l,k}[1]x[t-1] + \Phi_4^{l,k}[2]x[t-2] + \dots \\ & \dots + \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]x[t-p_{l,k}] - Q_4^{l,k}[1]a_4^{l,k}[t-1] - \\ & - Q_4^{l,k}[2]a_4^{l,k}[t-2] - \dots - Q_4^{l,k}[q_{l,k}]a_4^{l,k}[t-q_{l,k}] + a_4^{l,k}[t], \end{aligned} \quad (16.15)$$

где $a_4^{l,k}[t]$ удовлетворяет условию статистической независимости четвертого порядка

$$E\{a_4^{l,k}[t]a_4^{l,k}[t-j]a_4^{l,k}[t-l]a_4^{l,k}[t-k]\} = 0, \quad j > 0$$

Выражение для моментной функции можно получить, если умножить (16.15) на произведение $x[t-j]x[t-l]x[t-k]$ и усреднить

$$\begin{aligned} m_4[j, j-l, j-k] = & \Phi_4^{l,k}[1]m_4[j-1, j-l, j-k] + \\ & + \Phi_4^{l,k}[2]m_4[j-2, j-l, j-k] + \dots + \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]m_4[j-p_{l,k}, j-l, j-k] - \\ & - Q_4^{l,k}[1]m_{43xa}[-j, -l, -k, -1] - Q_4^{l,k}[2]m_{43xa}[-j, -l, -k, -2] - \dots \\ & \dots - Q_4^{l,k}[q_{l,k}]m_{43xa}[-j, -l, -k, -q_{l,k}] + m_{43xa}[-j, -l, -k, -0], \end{aligned} \quad (16.16)$$

где $m_{43xa}[-j, -l, -k, -i]$ – взаимная моментная функция, равная

$$m_{43xa}[-j, -l, -k, -i] = E\{x[t-j]x[t-l]x[t-k]a_4^{l,k}[t-i]\}.$$

В $m_{43xa}[-j, -l, -k, -i]$ индекс 3 означает, что для получения взаимной моментной функции использовалось трехкратное произведение $x[t-j]x[t-l]x[t-k]$.

В частном случае, при $j = l = k = i$, имеем

$$m_{43xa}[-j, -j, -j, -j] = E\{x[t-j]x[t-j]x[t-j]a_4^{j,j}[t-j]\} = m_{4a}^{j,j} \quad (16.17)$$

В (16.17) $m_{4a}^{j,j}$ – четвертый момент случайного процесса $a_4^{j,j}[t]$. Взаимная моментная функция обладает свойством

$$m_{43xa}[-j, -l, -k, -i] = 0, \quad j, l, k > i,$$

$$m_{43xa}[-j, -l, -k, -i] \neq 0, \quad j, l, k < i.$$

Из (16.16) при $j \geq (q_{l,k} + 1)$ следует уравнение

$$\begin{aligned} m_4[j, j-l, j-k] &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[j-1, j-l, j-k] + \Phi_4^{l,k}[2] \times \\ &\times m_4[j-2, j-l, j-k] + \dots + \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]m_4[j-p_{l,k}, j-l, j-k]. \end{aligned}$$

Связь между четвертыми моментами случайного процесса $x[t]$ и ошибки предсказания можно найти, умножив (16.15) на произведение $x[t]x[t]x[t]$, а затем усреднив

$$\begin{aligned} m_4 &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[0, 0, -1] + \Phi_4^{l,k}[2]m_4[0, 0, -2] + \dots \\ &\dots + \Phi_4^{l,k}[p_{l,k}]m_4[0, 0, -p_{l,k}] - Q_4^{l,k}[1]m_{4xa}[0, 0, 0, -1] - \\ &- Q_4^{l,k}[2]m_{4xa}[0, 0, 0, -2] - \dots - Q_4^{l,k}[q_{l,k}]m_{4xa}[0, 0, 0, -q_{l,k}] + m_{4a}^{l,k}. \end{aligned} \quad (16.18)$$

Рассмотрим модель ОАРСС (1,1) четвертого ранга, которая описывается уравнением

$$x[t] = \Phi_4^{l,k}[1]x[t-1] - Q_4^{l,k}[1]a_4^{l,k}[t-1] + a_4^{l,k}[t].$$

Моментная функция удовлетворяет разностному уравнению

$$\begin{aligned}
m_4[j, j-l, j-k] &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[j-1, j-l, j-k] - \\
& - Q_4^{l,k}[1]m_{43\chi a}[-j, -l, -k, -1] + m_{43\chi a}[-j, -l, -k, 0].
\end{aligned}
\tag{16.19}$$

Из (16.18) и (16.19) можно получить систему уравнений

$$\begin{aligned}
m_4 &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[-1, 0, 0] - Q_4^{l,k}[1]m_{43\chi a}[0, 0, 0, -1] + m_{4a}^{l,k}, \\
m_4[1, 1-l, 1-k] &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[0, 1-l, 1-k] - Q_4^{l,k}[1]m_{43\chi a}[-1, -l, -k, -1], \\
m_4[j, j-l, j-k] &= \Phi_4^{l,k}[1]m_4[j-1, j-l, j-k], \quad j > 1.
\end{aligned}$$

Модель ОАРСС может использоваться для синтеза обеляющего фильтра. На рис. 16.1 представлен ОАРСС обеляющий фильтр, алгоритм действия которого описывается выражением

$$\begin{aligned}
a_r^{l,k,...,u}[t] &= \chi[t] - \Phi_r^{l,k,...,u}[1]\chi[t-1] + \Phi_r^{l,k,...,u}[2]\chi[t-2] + ... \\
& ... + \Phi_r^{l,k,...,u}[p_{l,k,...,u}]\chi[t-p_{l,k,...,u}] + Q_r^{l,k,...,u}[1]a_r^{l,k,...,u}[t-1] + Q_r^{l,k,...,u}[2]a_r^{l,k,...,u}[t-2] + ... \\
& ... + Q_r^{l,k,...,u}[q_{l,k,...,u}]a_r^{l,k,...,u}[t-q_{l,k,...,u}].
\end{aligned}$$

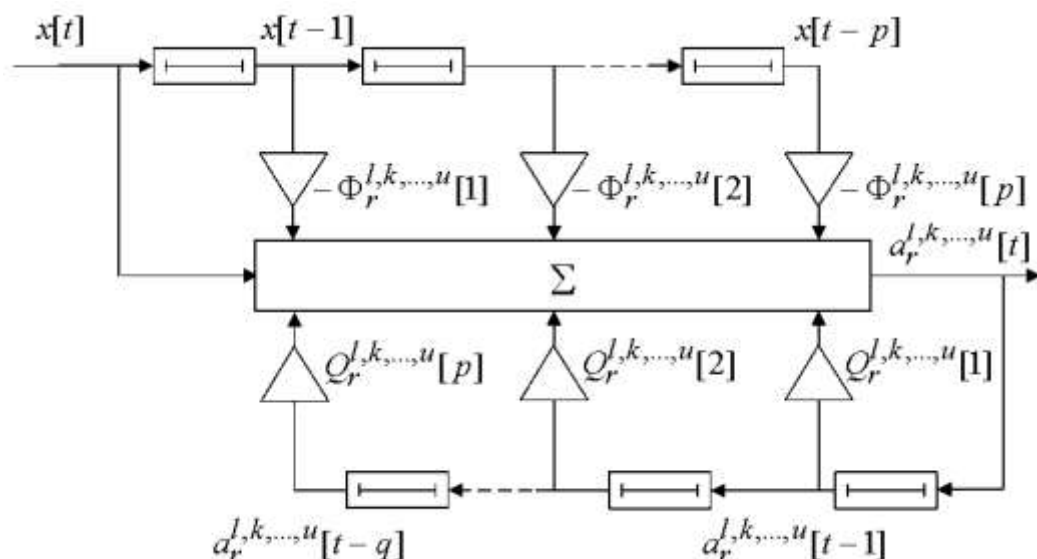


Рисунок 16.1 – Обеляющий фильтр на основе модели ОАРСС

Представленные принципы обобщения позволяют решить проблему построения моделей линейного предсказания ОАРСС по моментным функциям любого порядка. Анализ полученных выражений показывает их сходство с обычными моделями, которые являются частными случаями обобщенных моделей. Отличие состоит в том, что обобщенные модели рассчитываются по моментным функциям и могут иметь другие порядки и коэффициенты авторегрессии–скользящего среднего, отражающие негауссовы характеристики моделируемых процессов. Использование негауссовых моделей позволяет существенно дополнить результаты, полученные в рамках корреляционной теории. Применение обобщенных моделей также дает возможность решать задачи, которые часто невозможно решить с использованием обычных моделей линейного предсказания.

16.4 Выбор порядка и ранга обобщенных моделей линейного предсказания

Представленные принципы обобщения моделей линейного предсказания позволяют построить модели любого ранга, структура которых существенно не отличается от обычных классических моделей линейного предсказания. Такой подход дал возможность избежать усложнения формы представления уравнений при построении обобщенных моделей, вызванного, в частности, многомерностью моментных функций. Для второго ранга обобщенные модели линейного предсказания вырождаются в классические модели линейного предсказания.

При построении обобщенных моделей линейного предсказания негауссовых процессов следует предварительно проанализировать их негауссовы характеристики. Как отмечалось выше, во многих случаях необходимо найти коэффициенты асимметрии и эксцесса. Обычно, чем больше эти коэффициенты отличаются от нуля, тем более устойчивы их негауссовы характеристики, в частности моментные функции.

Следует учитывать, что существуют негауссовы процессы с нулевыми нечетными центральными моментами, у которых, однако, моментные функции нечетного порядка отличны от нуля. Поэтому, более точный способ убедиться в возможности построения обобщенных моделей линейного предсказания – это найти выборочные оценки их моментных функций.

При изложении основ теории классических моделей линейного предсказания, как правило, не делают ограничений на вид распределений плотности вероятности моделируемого процесса [2, 3]. Некоторые авторы рассматривают модели линейного предсказания при условии, что порождающий процесс имеет гауссово распределение. Тогда порождаемый коррелированный случайный процесс также описывается гауссовым распределением. Такое допущение позволяет использовать при анализе моделей дополнительный математический аппарат, применимый только для гауссовых процессов.

В основе моделирования линейным предсказанием стационарных случайных процессов лежит предположение, что они были получены линейным преобразованием статистически независимых случайных процессов типа белого шума. Однако для большинства случайных процессов практически невозможно доказать, что они физически были получены именно таким образом (например, для процессов, состоящих из значений среднегодовой солнечной активности или среднемесячных температур).

Вместе с тем, в научной литературе широко обсуждаются свойства моделей авторегрессии этих случайных процессов [2–5]. Таким образом, эффективность использования моделей линейного предсказания не ограничивается только истинными процессами АР, СС и АРСС.

Модель АР применяется для моделирования речевых сигналов [6, 7]. Математически процесс речеобразования описывается нелинейной системой, на вход которой подается порождающий процесс, представленный либо последовательностью прямоугольных импульсов, либо белым шумом [8]. При обработке случайных процессов, полученных даже заведомо нелинейной системой, модели линейного предсказания могут дать практический результат. Это подтверждается успешным применением параметров моделей линейного предсказания для сжатия речи в современных цифровых системах связи, дающих приемлемое качество передачи речи. Таким образом, модели линейного предсказания применимы для широкого класса случайных процессов при решении различных задач.

Параметрические оценки спектров высших порядков имеют либо острые пики, либо глубокие острые впадины, либо то и другое вместе. Поэтому при выборе подходящей для данного негауссова процесса модели линейного предсказания (ОАР, ОСС или ОАРСС) необходимо получить спектры для разных порядков с помощью периодограммного или моментограммного методов. Модель ОАР рационально применять, если спектры высших порядков состоят из узкополосных составляющих. Если в спектре присутствуют широкополосные составляющие, можно также

использовать модель ОАР, но при этом порядок модели будет достаточно большим. Поэтому для таких процессов более подходящей может быть модель ОСС. Для процессов со смешанным спектром высшего порядка обычно применяется модель ОАРСС.

Известные способы оценки порядка моделей линейного предсказания непригодны для обобщенных моделей линейного предсказания, так как они используют либо свойства статистик второго порядка, либо основаны на предположении о гауссовом распределении моделируемого процесса, либо его статистик [2, 9]. Порядок моделей линейного предсказания можно оценить по близости к нулю моментной функции ошибки предсказания. Этот критерий следует из принципа построения моделей линейного предсказания, основанного на статистической независимости ошибок предсказания. Если увеличение порядка модели не приводит к уменьшению моментной функции ошибок предсказания, то следует выбрать в качестве истинного предшествующий порядок модели.

Порядок моделей линейного предсказания можно выбирать по близости к нулю частной моментной функции. При правильном выборе порядка, его последующее увеличение не приводит к уменьшению последнего значения частной моментной функции. Ниже будет показано, что значения частной моментной функции совпадают с коэффициентами отражения обобщенного решетчатого фильтра. Частная моментная функция является полной статистической характеристикой негауссова случайного процесса. Длина частной моментной функции равна порядку модели.

При выборе порядка модели линейного предсказания можно использовать спектры высших порядков, полученные с помощью моментограммного метода. Так как ошибка предсказания статистически независима при правильно выбранном порядке модели, ее спектр высшего порядка, равного порядку моментной функции, по которой рассчитывались коэффициенты модели, должен соответствовать спектру белого шума.

В зависимости от условий решаемой задачи и негауссовых свойств анализируемого случайного процесса выбирается ранг модели линейного предсказания. Ранг модели равен порядку моментной или кумулянтной функции, по которой рассчитываются параметры модели. Как показывают исследования, реальные негауссовы процессы далеко не всегда одновременно характеризуются значительной асимметрией и эксцессом. Поэтому желательно выбирать ранг модели в зависимости от порядка ненулевой моментной или кумулянтной функции.

При решении задач, связанных с выделением полезного сигнала на фоне помех, при выборе ранга моделей линейного предсказания сигнала и помехи необходимо учитывать величину статистических связей соответствующего порядка у помехи и сигнала. Такие задачи успешно решаются, если ранги моделей сигнала и помехи существенно отличаются. Например, если сигнал описывается обобщенной моделью линейного предсказания третьего ранга, а помеха либо гауссова с нулевым коэффициентом асимметрии, либо помеха негауссова,

но с малым значением асимметрии и с большим коэффициентом эксцесса, то для помехи следует выбирать четвертый ранг модели. В этом случае на оценку параметров модели линейного предсказания третьего ранга сигнала помеха будет слабо влиять. При расчете же обесцеляющего фильтра по моментной функции четвертого порядка полезный сигнал не окажет существенное влияние на параметры фильтра.

При необходимости следует исследовать различия у сигнала и помехи статистик более высоких порядков, и строить модели линейного предсказания выше четвертого ранга. Это особенно актуально для кумулянтных моделей линейного предсказания, т.к. кумулянтные и моментные функции центрированных негауссовых процессов совпадают до четвертого порядка. Выбор между использованием моментных или кумулянтных моделей линейного предсказания зависит от условий решаемой задачи, статистических характеристик негауссовых процессов, устойчивости и порядка полученных моделей. Применение кумулянтных моделей требует больших вычислительных затрат по сравнению с моментными моделями линейного предсказания. Кумулянтная модель r -го ранга, в отличие от моментной модели, описывает статистические связи только $(r-1)$ -го порядка. Это свойство может оказать влияние на выбор более подходящей модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Обобщенная модель авторегрессии–скользящего среднего третьего ранга негауссовых процессов // Радиотехника. – 2004. – №139. – С. 82–85.
2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
3. Марпл–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
4. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
5. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 755 с.
6. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. М.В. Назарова, Ю.Н. Прохорова. – М.: Радио и связь, 1981. – 495 с.
7. Маркел Д.Д., Грэй А.Х. Линейное предсказание речи. – М.: Связь, 1980. – 308 с.
8. Шелухин О.И., Лукьянцев Н.Ф. Цифровая обработка и передача речи. – М.: Радио и связь, 2000. – 454 с.
9. Дженкинс Г., Ватс Д. Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1971. – Вып.1. – 287 с.

17 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

17.1 Введение

В теории линейных систем, как правило, рассматривается прямая задача – нахождение процесса, его корреляционной и моментных функций на выходе линейных систем с известными параметрами [1, 2], если они известны на входе. При построении модели линейного предсказания обычно решается обратная задача – оценка параметров системы по известному выходу системы в предположении, что на вход подается белый шум. Ниже проведен анализ преобразования корреляционных и моментных функций третьего порядка системами, описываемыми моделями линейного предсказания. Показано, что выражения для расчета параметров моделей линейного предсказания совпадают с уравнениями преобразования корреляционных и моментных функций в линейных системах, описываемых моделями АР, СС, ОАР и ОСС. Решение такой задачи сильно упрощается, т.к. в этих моделях входным (порождающим) процессом линейной системы является белый шум с известными видами корреляционной и моментными функциями – типа дельта функций.

17.2 Преобразование корреляционных функций авторегрессионными системами

Уравнение Юла–Уокера связывает параметры АР системы и значения функции корреляции. Поэтому, очевидно, его можно рассматривать и как прямую задачу, когда по известным параметрам системы и входному воздействию требуется найти выход системы. Покажем, что уравнение Юла–Уокера описывает преобразование корреляционной функции белого шума дискретной линейной системой, описываемой моделью АР [3]. Обычно для вывода уравнений Юла–Уокера используется либо метод наименьших средних квадратов, либо метод, основанный на статистической независимости ошибок предсказания [4]. Модель АР второго ранга дискретного случайного процесса $x[t]$ описывается векторным разностным уравнением

$$\Phi_2(\hat{z}_1)x[t] = a_2[t], \quad (17.1)$$

где $a_2[t]$ – некоррелированные отсчеты случайного процесса с нулевым средним на входе линейной системы. Нижние индексы у оператора АР $\Phi_2(\hat{z}_1)$ и у $a_2[t]$ указывают на ранг модели АР. В общем случае предполагается,

что $a_2[t]$ имеет негауссово распределение, хотя преобразование корреляционной функции можно рассматривать и для гауссовых $a_2[t]$. Оператор авторегрессии $\Phi_2(\hat{z}_1)$ имеет вид

$$\Phi_2(\hat{z}_1) = \sum_{i=0}^{p_2} \Phi_2[i] \hat{z}_1^{-i}, \quad \Phi_2[0] = 1,$$

где $\Phi_2[i]$ – коэффициенты АР, p_2 – порядок модели АР.

Действие оператора сдвига $\hat{z}$ на $x[t]$ определяется следующим образом $\hat{z}^{\pm i} x[t] = x[t \pm i]$. Пусть $j > 0$. Перемножим и усредним правые и левые части уравнения (17.1) и уравнения

$$\Phi_2(\hat{z}_2) x[t-j] = a_2[t-j]. \quad (17.2)$$

Операторы сдвига $\hat{z}_1^{-i}$ и $\hat{z}_2^{-1}$ действуют отдельно только на определенные дискретные переменные времени $t_1 = t$ и $t_2 = t-j$ соответственно. Учитывая некоррелированность $a_2[t]$, получим

$$\Phi_2(\hat{z}^{-1}) \Phi_2(\hat{z}) R[j] = 0, \quad (17.3)$$

где оператор $\Phi_2(\hat{z}^{-1})$ имеет вид

$$\Phi_2(\hat{z}^{-1}) = \sum_{i=0}^{p_2} \Phi_2[i] \hat{z}^{+i}, \quad \Phi_2[0] = 1.$$

При переходе к сдвигам времени у корреляционных функций стационарных случайных процессов $t_1 - t_2$, оператор $\hat{z}_2^{-i}$ преобразуется в оператор $\hat{z}^{+i}$. Если оператор сдвигал индекс назад, то вычитание этого индекса влечет изменение на обратный оператор сдвига. Лишь в этом случае исходное действие оператора не изменится. Нижние индексы операторов сдвига можно опустить, так как операторы теперь действуют на один и тот же индекс j .

Докажем, что решение уравнения (17.3) сводится к решению уравнения Юла–Уокера

$$R[j] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[j-k] = 0. \quad (17.4)$$

Это уравнение верно при произвольном положительном свободном индексе j . Уравнение (17.3) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(R[j] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[j-k] \right) - \Phi_2[1] \hat{z}^{+1} \left(R[j] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[j-k] \right) - \\ & - \Phi_2[2] \hat{z}^{+2} \left(R[j] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[j-k] \right) - \dots \\ & \dots - \Phi_2[p_2] \hat{z}^{+p_2} \left(R[j] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[j-k] \right) = 0. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Оператор $\hat{z}^{+n}$ сдвигает индекс j на n отсчетов вперед. Но поскольку уравнение (17.4) справедливо для произвольного j , то решением уравнения (17.5) будет решение уравнения Юла–Уокера (17.4). Таким образом, анализ преобразования линейной системой, описываемой моделью АР, корреляционной функции порождающего случайного процесса типа белого шума позволяет получить уравнение Юла–Уокера. Следовательно, уравнение Юла–Уокера является частным случаем уравнений преобразования корреляционных функций входного процесса линейной системой.

Найдем выражение, которое связывает дисперсии коррелированного случайного процесса и ошибки предсказания модели АР. При $j=0$ из (17.1) и (17.2) получим

$$\Phi_2(\hat{z}^{-1}) \Phi_2(\hat{z}) R[0] = \sigma_a^2.$$

После действия оператором $\Phi_2(\hat{z})$ на $R[0]$ это уравнение можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \left(R[0] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[k] \right) - \Phi_2[1] \hat{z}^{+1} \left(R[0] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[k] \right) - \\ & - \Phi_2[2] \hat{z}^{+2} \left(R[0] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[k] \right) - \dots \\ & \dots - \Phi_2[p_2] \hat{z}^{+p_2} \left(R[0] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[k] \right) = \sigma_a^2. \end{aligned} \quad (17.6)$$

Предположим, что выражения в круглых скобках в (17.6) удовлетворяют равенству

$$R[0] - \sum_{k=1}^{p_2} \Phi_2[k] R[k] = \sigma_a^2. \quad (17.7)$$

Можно показать, что оператор сдвига, действующий на корреляционную функцию белого шума, приводит ее к нулю. После действия оператора сдвига на σ_a^2 получаем

$$\hat{z}^{+n} \sigma_a^2 = \hat{z}^{+n} R_a[0] = R_a[n] = 0, \quad n > 0,$$

где $R_a[n]$ – корреляционная функция белого шума $a_2[t]$. Тогда уравнение (17.6) приводится к уравнению (17.7).

Таким образом показано [3], что уравнения преобразования корреляционных функций ошибки предсказания линейной системой, описываемой моделью АР, позволяют получить известные соотношения для вычисления параметров этой модели и дисперсии ошибки предсказания.

17.3 Преобразование моментных функций авторегрессионными системами

Найдем выражения для расчета параметров модели ОАР третьего ранга из операторных уравнений преобразования моментных функций случайного процесса типа негауссова белого шума. Эта модель описывается уравнением

$$\Phi_3(\hat{z}_1)x[t] = a_3[t], \quad (17.8)$$

где $\Phi_3(\hat{z}_1)$ – оператор ОАР третьего ранга вида

$$\Phi_3(\hat{z}_1) = \sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i] \hat{z}_1^{-i}, \quad \Phi_3[0] = 1,$$

где $\Phi_3[i]$ – коэффициенты ОАР, p_3 – порядок модели ОАР. $a_3[t]$ – ошибка предсказания модели ОАР третьего ранга, удовлетворяющая условию ортогональности $E\{a_3[t]a_3[t-j]a_3[t-l]\} = 0, l \geq 0, j > 0$, т.е. равенству нулю моментной функции третьего порядка. Выше было показано, что коэффициенты, порядки и ошибки предсказания обобщенных моделей линейного предсказания зависят от сдвигов моментных функций $l, k, \dots$. Для сокращения записи в тех случаях, когда это не будет вызвано необходимостью, индексы $l, k, \dots$ будут опускаться.

Рассмотрим случай, когда свободные индексы моментных функций удовлетворяют условиям $l \geq 0, j > 0$. Тогда перемножив правые и левые части уравнения (17.8) и уравнений

$$\Phi_3(\hat{z}_2)x[t-j] = a_3[t-j], \quad \Phi_3(\hat{z}_3)x[t-l] = a_3[t-l],$$

а затем, усреднив, получим

$$\Phi_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1}) \Phi_3(\hat{z}_2) \Phi_3(\hat{z}_1)m_3[j, j-l] = 0, \quad (17.9)$$

где оператор ОАР имеет вид

$$\Phi_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1}) = \sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3[i]\hat{z}_2^{+i}\hat{z}_1^{+i} = 1 - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]\hat{z}_2^{+i}\hat{z}_1^{+i}. \quad (17.10)$$

Отметим, что в (17.9) операторы $\hat{z}_1^{-i}$ и $\hat{z}_2^{-i}$ действуют на сдвиги j и $j-l$ соответственно. Оператор $\hat{z}_2^{+i}\hat{z}_1^{+i}$ получается в результате вычитания $t-j$ из t и $t-l$ при получении моментной функции стационарного случайного процесса $m_3[j, j-l]$. Оператор $\hat{z}_2^{+i}\hat{z}_1^{+i}$ действует на сдвиги j и $j-l$ соответственно.

Докажем, что уравнение (17.9) эквивалентно уравнению

$$m_3[j, j-l] - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[j-i, j-l] = 0. \quad (17.11)$$

Представим уравнение (17.9) в виде

$$\begin{aligned} & \Phi_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1}) \left[\left(m_3[j, j-l] - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[j-i, j-l] \right) - \Phi_3[1]\hat{z}_2^{-1} \times \right. \\ & \times \left(m_3[j, j-l] - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[j-i, j-l] \right) - \dots \\ & \left. \dots - \Phi_3[p_3]\hat{z}_2^{-p_3} \left(m_3[j, j-l] - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[j-i, j-l] \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Если в этом уравнении выражения в круглых скобках равны нулю, что верно (17.11), то действие операторов $\hat{z}_2^{+n}$ и $\Phi_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1})$ не нарушит

справедливость этих уравнений. Это утверждение справедливо в силу указанной выше инвариантности уравнения (17.11) относительно сдвигов свободных индексов.

Для получения системы уравнений (17.11) можно использовать различные фиксированные значения l . Коэффициенты $\Phi_3[i]$ и порядки моделей ОАР зависят от свободного индекса l . Операторы сдвига действуют на переменную t . Поэтому вид решения уравнения (17.10) относительно параметров $\Phi_3[i]$ не зависит от сдвига l .

Найдем выражение, связывающее моменты случайного процесса и моменты ошибки предсказания. Перемножив правые и левые части уравнения (17.8) и уравнений

$$\Phi_3(\hat{z}_2)x[t] = a_3[t], \quad \Phi_3(\hat{z}_3)x[t] = a_3[t],$$

а затем, усреднив, получим

$$\Phi_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1})\Phi_3(\hat{z}_2)\Phi_3(\hat{z}_1)m_3 = m_{3a}.$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \Phi_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1}) & \left[\left(m_3 - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[i,i] \right) - \Phi_3[1]\hat{z}_2^{-1} \left(m_3 - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[i,i] \right) - \dots \right. \\ & \left. \dots - \Phi_3[p_3]\hat{z}_2^{-p_3} \left(m_3 - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[i,i] \right) \right] = m_{3a}. \end{aligned} \quad (17.12)$$

Тогда в случае, если справедливо выражение

$$m_3 - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3[i]m_3[i,i] = m_{3a},$$

с учетом (17.10) выполняется соотношение (17.12). Это следует из того, что все выражения в круглых скобках в (17.12) равны m_{3a} , а операторы $\hat{z}_2^{-i}$ и $\Phi_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1})$ приводят к сдвигу нулевых индексов в m_{3a} . Как отмечалось выше, моментная функция ошибки предсказания, в случае не равных нулю сдвигов, равна нулю.

Таким образом, как показано в [3], что из уравнений преобразования моментных функций третьего порядка негауссова случайного процесса и белого шума системой, описываемой моделью ОАР третьего ранга, можно получить выражения для расчета параметров модели. Используя аналогичные

рассуждения, можно получить выражения для расчета параметров моделей ОАР произвольного ранга.

17.4 Преобразование корреляционных функций системами скользящего среднего

Используя уравнения преобразования корреляционной функции ошибки предсказания линейной системой, описываемой моделью СС, получим выражение для расчета параметров этой модели. В основе модели СС лежит разностное уравнение

$$x[t] = Q_2(\hat{z}_1)a_2[t]. \quad (17.13)$$

Оператор СС имеет вид

$$Q_2(\hat{z}_1) = \sum_{i=0}^{q_2} Q_2[i]\hat{z}_1^{-i}, \quad Q_2[0] = 1,$$

где $Q_2[i]$ – коэффициенты СС, а q_2 – порядок модели СС второго ранга. Перемножим левые и правые части уравнений (17.13) и уравнения

$$x[t-j] = Q_2(\hat{z}_2)a_2[t-j], \quad j \geq 0,$$

а затем, усреднив, получим уравнение преобразования корреляционной функции белого шума линейной системой, описываемой моделью СС

$$R[j] = Q_2(\hat{z}^{-1})Q_2(\hat{z})R_a[j], \quad (17.14)$$

где оператор СС $Q_2(\hat{z}^{-1})$ описывается выражением

$$Q_2(\hat{z}^{-1}) = \sum_{i=0}^{q_2} Q_2[i]\hat{z}^{+i}, \quad Q_2[0] = 1.$$

Здесь, как уже отмечалось ранее, при переходе к сдвигам времени у корреляционных функций стационарных случайных процессов $t_1 - t_2$, оператор $\hat{z}_2^{-i}$ преобразуется в оператор $\hat{z}^{+i}$.

После действия операторов СС на корреляционную функцию белого шума $R_a[j]$, уравнение (17.14) преобразуется следующим образом:

$$R[j] = R_a[j] - \sum_{i=1}^{q_2} Q_2[i] R_a[j+i] - \sum_{k=1}^{q_2} Q_2[k] R_a[j-k] + \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{k=1}^{q_2} Q_2[i] Q_2[k] R_a[j-k+i].$$

Учитывая свойства корреляционной функции статистически независимых отсчетов $a_2[t]$, получаем

$$R[j] = \left(\delta[j] - \sum_{i=1}^{q_2} Q_2[i] \delta[j+i] - \sum_{k=1}^{q_2} Q_2[k] \delta[j-k] + \sum_{i=1}^{q_2} \sum_{k=1}^{q_2} Q_2[i] Q_2[k] \delta[j-k+i] \right) \sigma_a^2. \quad (17.15)$$

Рассмотрим случай, когда $j = 0$. Учитывая, что немые индексы $i, k \geq 0$, получаем из (17.14)

$$R[0] = \left(1 + \sum_{k=1}^{q_2} Q_2^2[k] \right) \sigma_a^2.$$

Это известное выражение [4] связывает дисперсию процесса СС и дисперсию ошибки предсказания.

В случаях, когда $j > 0$, уравнение (17.15) преобразуется с учетом того, что фильтрующее свойство δ -функции приводит к соотношениям $k = j$ и $i = k - j$. Тогда из (17.15) имеем

$$R[j] = \left(-Q_2[j] + \sum_{k=1}^{q_2} Q_2[k-j] Q_2[k] \right) \sigma_a^2, \quad j = 1, 2, \dots, q_2, \quad (17.16, a)$$

$$R[j] = 0, \quad j > q_2. \quad (17.16, б)$$

Полученные соотношения (17.16) применяются для расчета параметров модели СС [4]. Используя уравнения преобразования корреляционной функции белого шума системой, описываемой моделью СС (17.14), можно получить известные выражения для расчета параметров модели.

17.5 Преобразование моментных функций системами скользящего среднего

Операторное уравнение, описывающее процесс ОСС третьего ранга, имеет вид

$$x[t] = Q_3(\hat{z}_1)a_3[t], \quad (17.17)$$

где $Q_3[\hat{z}_1]$ – оператор модели ОСС третьего ранга, $a_3[t]$ – ошибка предсказания модели ОСС третьего ранга, удовлетворяющая условию статистической независимости

$$E\{a_3[t]a_3[t-j]a_3[t-l]\} = 0, \quad l \geq 0, \quad j > 0.$$

Покажем, что из операторного уравнения (17.17) можно найти выражения для расчета параметров модели ОСС третьего ранга, которые рассчитываются по моментным функциям третьего порядка.

Перемножим левые и правые части уравнения (17.17) и уравнений

$$x[t] = Q_3(\hat{z}_2)a_3[t], \quad x[t] = Q_3(\hat{z}_3)a_3[t],$$

а затем усредним. После преобразований получим операторное уравнение

$$m_3 = Q_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1})Q_3(\hat{z}_2)Q_3(\hat{z}_1)E\{a_3[t]a_3[t]a_3[t]\}, \quad (17.18)$$

где оператор ОСС

$$Q_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1}) = \sum_{i=0}^{q_3} Q_3[i]\hat{z}_2^{+i}\hat{z}_1^{+i}, \quad Q_3[0] = 1. \quad (17.19)$$

Используя (17.19), из операторного уравнения (17.18) находим

$$m_3 = m_{3a} - \sum_{k,i,n=1}^{q_3} Q_3[k]Q_3[i]Q_3[n]m_{3a}[k-n, k-i].$$

Учитывая свойства моментной функции ошибки предсказания, это уравнение приводится к выражению, связывающему моменты третьего порядка негауссова случайного процесса и ошибки предсказания

$$m_3 = (1 - \sum_{k=1}^{q_3} Q_3^3[k])m_{3a}. \quad (17.20)$$

Найдем уравнения преобразования моментной функции линейной системой, описываемой моделью ОСС. Для этого перемножим левые и правые части уравнения (17.17) и уравнений

$$x[t-j] = Q_3(\hat{z}_2)a_3[t-j], \quad x[t-l] = Q_3(\hat{z}_3)a_3[t-l], \quad j \geq 0, \quad l \geq 0,$$

а затем усредним. Операторное уравнение преобразования моментной функции третьего порядка негауссова порождающего процесса типа белого шума принимает вид

$$m_3[j, j-l] = Q_3(\hat{z}_2^{-1}\hat{z}_1^{-1})Q_3(\hat{z}_2)Q_3(\hat{z}_1)m_{3a}[j, j-l]. \quad (17.21)$$

Из (17.20) после действия операторов ОСС получаем выражение

$$\begin{aligned} m_3[j, j-l] &= m_{3a}[j, j-l] - \sum_{i=1}^{q_3} Q_3[i]m_{3a}[j, j-l-i] - \\ &- \sum_{n=1}^{q_3} Q_3[n]m_{3a}[j-n, j-l] - \sum_{i,n=1}^{q_3} Q_3[i]Q_3[n]m_{3a}[j-n, j-l-i] + \\ &+ \sum_{k,i=1}^{q_3} Q_3[k]Q_3[i]m_{3a}[j+k, j-l-i+k] + \\ &+ \sum_{k,n=1}^{q_3} Q_3[k]Q_3[n]m_{3a}[j-n+k, j-l+k] - \\ &- \sum_{k,i,n=1}^{q_3} Q_3[k]Q_3[i]Q_3[n]m_{3a}[j-n+k, j-l-i+k]. \end{aligned} \quad (17.22)$$

При преобразовании выражения (17.22) следует учитывать, что моментная функция третьего порядка белого шума удовлетворяет соотношению

$$m_{3a}[j-i, j-l] = E\{a_3[t-i]a_3[t-j]a_3[t-l]\} = m_{3a}\delta[j-i]\delta[j-l].$$

Учитывая фильтрующее свойство δ -функции в уравнении (17.22), приходим к выражению

$$m_3[j, j-l] = (Q_3[j]Q_3[j-l] + Q_3[l]Q_3[l-j] -$$

$$- \sum_{i=1}^{q_3} Q_3[i]Q_3[i-j]Q_3[i-l] - Q_3[j]\delta[j-l])m_{3a}. \quad (17.23)$$

Для расчета параметров обобщенной модели ОСС используется система уравнений, включающая (17.20) и (17.23). Следовательно, из выражений для преобразования моментных функций белого шума системой, описываемой моделью ОСС третьего ранга, получаются нелинейные соотношения для оценки параметров этой модели.

Метод получения выражений, описывающих модели линейного предсказания, легко распространить на случай обобщенных моделей ОАР и ОСС четвертого и произвольного ранга. Выражения для оценки коэффициентов обобщенных моделей линейного предсказания получаются из уравнений преобразования моментных функций дискретными линейными дифференциальными системами. Эти уравнения можно получить, если положить, что на вход системы подается негауссов белый шум. Применение операторов ОАР и ОСС позволяет несколько формализовать и упростить вывод выражений, описывающих модели линейного предсказания.

Уравнения для расчета коэффициентов ОАР и ОСС были получены на основе уравнений преобразования моментных функций случайных процессов в линейных системах, которые имеют более общий характер. Они справедливы при произвольных входных процессах, а не только при входных процессах типа белого шума, как это полагается в моделях линейного предсказания. Использование метода, применяемого для вывода уравнений преобразования моментных функций в линейных системах к уравнениям ОАР и ОСС подтверждает справедливость рассмотренных выше моделей линейного предсказания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн.1. – М.: Сов. Радио, 1966. – 728 с.
2. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
3. Тихонов В.А. Преобразование моментных функций третьего порядка линейными системами, описываемыми моделями авторегрессии и скользящего среднего // Радиотехника. – 2004. – №136. – С. 50–57.
4. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.

18 КУМУЛЯНТНЫЕ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ АВТОРЕГРЕССИИ–СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

18.1 Введение

Для описания случайных процессов используют кумулянтные или моментные функции всех порядков. Выше были рассмотрены обобщенные модели линейного предсказания, параметры которых рассчитываются по моментным функциям негауссова процесса. Использование моментных функций было связано с простотой расчета статистических средних случайных процессов. Однако некоторые авторы [1–3] отмечают, что для анализа негауссовых свойств случайных процессов предпочтительнее использовать кумулянтные функции. Это связано в основном с тем, что в отличие от моментных функций, кумулянтные функции r -го порядка описывают статистические связи только $(r-1)$ -го порядка. Различие свойств кумулянтных и моментных функций должно приводить к определенным отличиям в соответствующих моделях линейного предсказания. Как показали экспериментальные исследования, при решении некоторых задач, модели линейного предсказания, построенные по кумулянтным функциям, оказываются предпочтительней аналогичных моделей, рассчитанных по моментным функциям.

Кумулянтные функции связаны простыми соотношениями с моментными функциями, выборочные оценки которых находятся с помощью статистического усреднения [1]. Используя эти соотношения, можно без значительного увеличения вычислительных затрат рассчитать необходимые значения кумулянтных функций по оценкам моментных функций. Как будет показано ниже, принципы построения и вид уравнений, необходимых при синтезе моделей линейного предсказания по моментным и кумулянтным функциям практически не отличаются. Поэтому для краткости изложения остановимся на наиболее полной модели ОАРСС. Для нахождения уравнений, описывающих кумулянтные модели АРСС и ОАРСС, воспользуемся формальным аппаратом кумулянтных скобок [1]. Кумулянтные скобки имеют аналогичные свойства с моментными скобками, являющимися статистическим усреднением. Эта особенность кумулянтных скобок будет использована при выводе уравнений для нахождения параметров кумулянтных моделей линейного предсказания.

18.2 Обобщенная кумулянтная модель авторегрессии-скользящего среднего второго ранга

Получим уравнения для расчета моделей линейных систем с обратной связью АРСС, параметры которых рассчитываются по кумулянтным функциям. Вначале рассмотрим способ построения модели АРСС второго ранга. Затем найдем уравнения, описывающие кумулянтные модели линейного предсказания ОАРСС третьего и четвертого рангов.

Приведем некоторые соотношения, позволяющие вычислять кумулянтные функции через моментные функции негауссовых стационарных процессов. Модели линейного предсказания можно построить для процессов с нулевым и не равным нулю математическим ожиданием. В первом случае системы уравнений, используемые для расчета параметров модели, значительно упрощаются. Если математическое ожидание негауссова процесса равно нулю, то выражения для кумулянтных функций второго, третьего и четвертого порядка имеют вид [1]:

$$\chi_2[i] = m_2[i],$$

$$\chi_3[i, j] = m_3[i, j],$$

$$\chi_4[i, j, k] = m_4[i, j, k] - m_2[i]m_2[k - j] - m_2[j]m_2[k - i] - m_2[j]m_2[j - i],$$

где $\chi_2[i]$, $\chi_3[i, j]$, $\chi_4[i, j, k]$, $m_2[i]$, $m_3[i, j]$ и $m_4[i, j, k]$ – кумулянтные и моментные функции второго, третьего и четвертого порядка соответственно. Таким образом, в случае равенства нулю математического ожидания моментные и кумулянтные функции второго и третьего ранга полностью совпадают. Здесь рассматриваются модели линейного предсказания процессов с нулевым средним. Предлагаемые принципы построения кумулянтных моделей можно обобщить на негауссовы процессы с ненулевым средним.

Для получения уравнений используются свойства симметрии линейности. Чтобы перейти от уравнений преобразования случайных процессов в линейных системах к кумулянтным или моментным разностным уравнениям, удобно воспользоваться кумулянтными и моментными скобками. Этот формальный аппарат применяется при кумулянтном анализе негауссовых случайных процессов [1]. Дискретные моментные и кумулянтные функции можно формально определить следующим образом

$$m_n[t_1, t_2, \dots, t_n] = \langle x[t_1]x[t_2] \dots x[t_n] \rangle, \quad (18.1, a)$$

$$\chi_n[t_1, t_2, \dots, t_n] = \langle x[t_1], x[t_2], \dots, x[t_n] \rangle, \quad (18.1, б)$$

где n – порядок кумулянтной или моментной функции. Здесь выражение $\langle x[t_1]x[t_2]\dots x[t_n] \rangle$ в (18.1, а) обозначает среднее от произведения $x[t_1]x[t_2]\dots x[t_n]$, а кумулянтная скобка (18.1, б) указывает, по какой комбинации отсчетов процесса была получена данная кумулянтная функция.

Используя моментные и кумулянтные скобки, удобно описывать некоторые свойства кумулянтных и моментных функций.

Пусть λ_i – детерминированные величины. Известно [1], что моментные и кумулянтные функции обладают следующими свойствами:

1. $\langle x[t_1]x[t_2]\dots x[t_n] \rangle$ и $\langle x[t_1], x[t_2], \dots, x[t_n] \rangle$ – симметрические функции своих аргументов.

$$2. \langle \lambda_1 x[t_1] \lambda_2 x[t_2] \dots \lambda_n x[t_n] \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \langle x[t_1] x[t_2] \dots x[t_n] \rangle. \quad (18.2, а)$$

$$\langle \lambda_1 x[t_1], \lambda_2 x[t_2], \dots, \lambda_n x[t_n] \rangle = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \langle x[t_1], x[t_2], \dots, x[t_n] \rangle. \quad (18.2, б)$$

$$3. \langle x[t_1](x[t_2] + x[t'_2]) \dots x[t_n] \rangle = \langle x[t_1]x[t_2] \dots x[t_n] \rangle + \langle x[t_1]x[t'_2] \dots x[t_n] \rangle, \quad (18.3, а)$$

$$\langle x[t_1], x[t_2] + x[t'_2], \dots, x[t_n] \rangle = \langle x[t_1], x[t_2], \dots, x[t_n] \rangle + \langle x[t_1], x[t'_2], \dots, x[t_n] \rangle. \quad (18.3, б)$$

$$4. \langle x[t_1]x[t_2]\dots x[t_n]a[t_i] \rangle = 0, \quad (18.4, а)$$

$$\langle x[t_1], x[t_2], \dots, x[t_n], a[t_i] \rangle = 0, \quad (18.4, б)$$

где $a[t_i]$ – статистически не связанная со всеми $x[t_i]$ случайная функция. Если случайная функция $a[t_i]$ – статистически связана с некоторыми или со всеми $x[t_i]$, то кумулянтная скобка равна их взаимной кумулянтной функции.

Согласно первому свойству, случайные функции можно произвольно переставлять при статистическом усреднении и в кумулянтной скобке. Второе и третье свойство отражают линейность операций усреднения и кумулянтной скобки. Четвертое свойство описывает отсутствие статистических связей высших порядков случайных функций.

Из совпадения первых трех свойств моментных и кумулянтных скобок следует, что любые операции или уравнения, использующие только свойства (18.2, 18.3), справедливые для моментных функций, верны также и для кумулянтных функций. Операция дифференцирования есть линейная операция, так же, как и эквивалентная ей, в дискретной области операция сдвига.

Это свойство приводит, в частности, к коммутуруемости операторов взятия производной с операторами усреднения и кумулянтной скобкой для непрерывных процессов

$$\left\langle \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} x(t_1) x(t_2) \dots x(t_n) \right\rangle = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \langle x(t_1) x(t_2) \dots x(t_n) \rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} [x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)] \right\rangle = \frac{\partial^n}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n} \langle x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n) \rangle$$

Аналогичные выражения получаются для оператора сдвига дискретных процессов

$$\langle \hat{z}_1 \hat{z}_2 \dots \hat{z}_n x[t_1] x[t_2] \dots x[t_n] \rangle = \hat{z}_1 \hat{z}_2 \dots \hat{z}_n \langle x[t_1] x[t_2] \dots x[t_n] \rangle, \quad (18.5, a)$$

$$\langle \hat{z}_1 \hat{z}_2 \dots \hat{z}_n [x[t_1], x[t_2], \dots, x[t_n]] \rangle = \hat{z}_1 \hat{z}_2 \dots \hat{z}_n \langle x[t_1], x[t_2], \dots, x[t_n] \rangle, \quad (18.5, б)$$

где действие оператора сдвига $\hat{z}_n$ на $x[t_n]$ определяется следующим образом: $\hat{z}_n^{\pm i} x[t_n] = x[t_n \pm i]$. Очевидно, что свойствами (18.5) обладают также и стационарные процессы.

Рассмотрим кумулянтную модель линейного предсказания АРСС второго ранга стационарного процесса [4]. Разностное уравнение, описывающее эту модель, определяется векторным операторным выражением

$$\Phi_2^\chi(\hat{z}) x[t] = Q_2^\chi(\hat{z}) a_2[t], \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (18.6)$$

где операторы АР $\Phi_2^\chi(\hat{z})$ и СС $Q_2^\chi(\hat{z})$ имеют вид

$$\Phi_2^\chi(\hat{z}) = \sum_{i=0}^{p_2} \Phi_2^\chi[i] \hat{z}^{-i}, \quad Q_2^\chi(\hat{z}) = \sum_{k=0}^{q_2} Q_2^\chi[k] \hat{z}^{-k}, \quad \Phi_2^\chi[0] = Q_2^\chi[0] = 1, \quad (18.7)$$

$a_2[t]$ – некоррелированная ошибка предсказания модели АРСС, $\Phi_2^\chi[i]$ и $Q_2^\chi[k]$ – векторы коэффициентов АР и СС соответственно, p_2 и q_2 – порядки моделей АР и СС соответственно. Верхний индекс χ у коэффициентов $\Phi_2^\chi[i]$ и $Q_2^\chi[k]$ указывает на использование кумулянтной модели линейного предсказания.

Для нахождения параметров кумулянтной модели АРСС необходимо иметь уравнения преобразования взаимной кумулянтной функции линейной системой случайного процесса и белого шума. Чтобы получить такие

уравнения, воспользуемся свойствами кумулянтных скобок (18.2, б) и (18.4, б). С этой целью найдем из (18.6) взаимную кумулянтную функцию

$$\langle \Phi_2^\chi(\hat{z})x[t], x[t-j] = Q_2^\chi(\hat{z})a_2[t], x[t-j] \rangle. \quad (18.8)$$

Учитывая свойство (2.102б), преобразуем кумулянтную скобку в (18.8) к виду

$$\Phi_2^\chi(\hat{z})\langle x[t], x[t-j] \rangle = Q_2^\chi(\hat{z})\langle a_2[t], x[t-j] \rangle,$$

или

$$\Phi_2^\chi(\hat{z})\chi_{2x}[j] = Q_2^\chi(\hat{z})\chi_{2xa}[-j, 0], \quad (18.9)$$

где $\chi_{2x}[j]$ – кумулянтная функция второго порядка стационарного случайного процесса $x[t]$, $\chi_{2xa}[-j, 0]$ – взаимная кумулянтная функция случайного процесса $x[t-j]$ и ошибки предсказания $a_2[t]$. Очевидно, что с учетом (18.4), $\chi_{2xa}[-j, 0]$ удовлетворяет соотношениям

$$\chi_{2xa}[-j, 0] = 0, \quad j > 0; \quad \chi_{2xa}[-j, 0] \neq 0, \quad j \leq 0.$$

При $j=0$ можно получить выражение, связывающее кумулянты случайного процесса и ошибки предсказания

$$\begin{aligned} \chi_{2x} &= \Phi_2^\chi[1]\chi_{2x}[1] + \Phi_2^\chi[2]\chi_{2x}[2] + \dots + \Phi_2^\chi[p_2]\chi_{2x}[p_2] + \\ &+ \chi_{2a} - Q_2^\chi[1]\chi_{2xa}[0, -1] - \dots - Q_2^\chi[q_2]\chi_{2xa}[0, -q_2], \end{aligned}$$

где χ_{2x} и χ_{2a} – кумулянты второго порядка случайного процесса $x[t]$ и ошибки предсказания $a_2[t]$.

Для нахождения взаимных кумулянтов $\chi_{2xa}[-j, -i]$ уравнение (18.9) нужно дополнить выражениями, которые получают из взаимной кумулянтной скобки

$$\langle \Phi_2^\chi(\hat{z})x[t], a_2[t-j] = Q_2^\chi(\hat{z})a_2[t], a_2[t-j] \rangle.$$

После преобразований этой кумулянтной скобки оно приводится к виду

$$\begin{aligned} \chi_{2xa}[0, -j] - \Phi_2^x[1]\chi_{2xa}[-1, -j] - \Phi_2^x[2]\chi_{2xa}[-2, -j] + \dots \\ \dots + \Phi_2^x[p_2]\chi_{2xa}[-p_2, -j] = -Q_2^x[j]\chi_{2a}. \end{aligned} \quad (18.10)$$

Из выражения (18.9) следует, что

$$\Phi_2^x(\hat{z})\chi_{2x}[j] = 0, \quad j \geq q_2 + 1. \quad (18.11)$$

Система уравнений (18.9), (18.10) и (18.11) достаточна для расчета параметров кумулянтной модели АРСС. У случайного процесса с нулевым математическим ожиданием кумулянтная функция второго порядка и корреляционная функция совпадают. Поэтому найденные выражения эквивалентны уравнениям для обычных моделей АРСС. Представленный наглядный способ нахождения кумулянтных уравнений второго ранга будет использован при выводе уравнений для кумулянтных моделей высших рангов.

Можно показать, что СПМ кумулянтной модели модели АРСС определяется выражением

$$P(f) = \frac{\left| 1 - \sum_{n=1}^q Q_2^x[k] e^{-j2\pi f k T} \right|^2}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi_2^x[i] e^{-j2\pi f i T} \right|^2} D_a.$$

Кумулянтная модель АРСС описывается полюсно–нулевой СПМ. Спектр такого процесса содержит узкополосные пики, определяемые моделью АР, и широкополосные максимумы, определяемые моделью СС. Следует помнить, что СПМ кумулянтной модели АРСС второго ранга совпадает с СПМ полученной по моментной модели второго ранга.

18.3 Обобщенная кумулянтная модель авторегрессии–скользящего среднего третьего ранга

Найдем уравнения для оценки параметров кумулянтной модели ОАРСС третьего ранга стационарного негауссова случайного процесса с не равной нулю кумулянтной функцией третьего порядка. Разностное уравнение, описывающее эту модель, определим операторным выражением [4]

$$\Phi_3^x(\hat{z})x[t] = Q_3^x(\hat{z})a_3[t], \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (18.12)$$

где операторы ОАР $\Phi_3^x(\hat{z})$ и ОСС $Q_3^x(\hat{z})$ имеют вид, аналогичный (18.7), $a_3[t]$ – негауссова ошибка предсказания кумулянтной модели третьего ранга. Следует иметь в виду, что коэффициенты ОАР и ОСС, а также ошибка предсказания зависят от сдвига l . Для сокращения записи этот свободный индекс будет опускаться. Для построения модели необходимо, чтобы ошибка предсказания имела нулевую кумулянтную функцию третьего порядка.

Получить уравнения для расчета параметров модели ОАРСС можно, если воспользоваться свойствами кумулянтных скобок (18.2, б) и (18.4, б). Найдем из (18.12) взаимную кумулянтную функцию

$$\langle \Phi_3^x(\hat{z})x[t], x[t-j], x[t-l] = Q_3^x(\hat{z})a_3[t], x[t-j], x[t-l] \rangle. \quad (18.13)$$

Используя свойство (18.2, б), преобразуем кумулянтную скобку в (18.13) к виду

$$\begin{aligned} m_3[j, j-l] &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[j-1, j-l] + \dots + \Phi_{3x}^x[p_3]\chi_{3x}[j-p_3, j-l] - \\ &- Q_3^x[1]\chi_{3xxa}[-j, -l, -1] - \dots - Q_3^x[q_3]\chi_{3xxa}[-j, -l, -q_3] + \chi_{3xxa}[-j, -l, 0], \end{aligned} \quad (18.14)$$

где $\chi_{3x}[0, j, j-l] \equiv \chi_{3x}[j, j-l]$ – кумулянтная функция третьего порядка стационарного случайного процесса, $\chi_{3xxa}[-j, -l, -i]$ – взаимная кумулянтная функция третьего порядка случайного процесса и ошибки предсказания.

Используя уравнение

$$\langle \Phi_3^x(\hat{z})x[t], x[t], x[t] = Q_3^x(\hat{z})a_3[t], x[t], x[t] \rangle,$$

можно получить выражения, связывающие кумулянты третьего порядка случайного процесса и ошибки предсказания

$$\begin{aligned} \chi_{3x} &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[1, 1] + \Phi_3^x[2]\chi_{3x}[2, 2] + \dots + \Phi_{3x}^x[p_3]\chi_{3x}[p_3, p_3] - \\ &- Q_3^x[1]\chi_{3xxa}[0, 0, -1] - \dots - Q_3^x[q_3]\chi_{3xxa}[0, 0, -q_3] + \chi_{3xa}, \end{aligned} \quad (18.15)$$

где χ_{3x} и χ_{3xa} – кумулянты третьего порядка случайного процесса $x[t]$ и ошибки предсказания $a_3[t]$.

Взаимные кумулянтные функции $\chi_{3xxa}[-j, -l, -i]$ в (18.14) и (18.15) находятся из кумулянтной скобки

$$\langle \Phi_3^x(\hat{z})x[t], a_3[t-j], x_3[t-l] = Q_3^x(\hat{z})a_3[t], a_3[t-j], x_3[t-l] \rangle,$$

которая преобразуется к уравнению вида

$$\begin{aligned} m_{3xxa}[0, -l, -j] = & \Phi_3^x[1]\chi_{3xxa}[-1, -l, -j] + \dots + \Phi_{3x}^x[p_3]\chi_{3xxa}[-p_3, -l, -j] - \\ & - Q_3^x[1]\chi_{3xaa}[-l, -1, -j] - \dots - Q_3^x[q_3]\chi_{3xaa}[-l, -q_3, -j] + \chi_{3xaa}[-l, 0, -j]. \end{aligned} \quad (18.16)$$

Для получения полной системы уравнений необходимо определить в (18.16) функцию $\chi_{3xaa}[-l, -i, -j]$. Она находится из взаимной кумулянтной скобки

$$\langle x[t-l], a_3[t-i], a_3[t-j] \rangle. \quad (18.17)$$

С учетом (18.12), кумулянтная скобка (18.17) при $l = i = j$ равна

$$\langle x[t-l], a_3[t-i], a_3[t-j] \rangle = \chi_{3a}. \quad (18.18)$$

Система уравнений (18.15), (18.16) и (18.18) является полной и может использоваться для расчета параметров кумулянтной модели ОАРСС третьего ранга. Порядок модели определяется по близости к нулю соответствующей кумулянтной функции ошибки предсказания.

В качестве примера рассмотрим кумулянтную модель ОАРСС(1,1) третьего ранга для произвольного фиксированного l для порядков $p_3 = 1, q_3 = 1$

$$x[t] = \Phi_3^x[1]x[t-1] - Q_3^x[1]a_3[t-1] + a_3[t]. \quad (18.19)$$

Кумулянтная функция процесса удовлетворяет уравнению, следующему из (18.14), при $p_3 = 1, q_3 = 1$

$$\begin{aligned} \chi_{3x}[j, j-l] = & \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[j-1, j-l] - \\ & - Q_3^x[1]\chi_{3xxa}[-j, -l, -1] + \chi_{3xxa}[-j, -l, 0]. \end{aligned} \quad (18.20)$$

Система уравнений, описывающая модель ОАРСС (1,1), как следует из (18.20), имеет вид

$$\begin{aligned}\chi_{3x} &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[1,1] - Q_3^x[1]\chi_{3xxa}[0,0,-1] + \chi_{3a}, j=0, \\ \chi_{3x}[1,1-l] &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[0,1-l] - Q_3^x[1]\chi_{3xxa}[-1,-l,-1], \\ \chi_{3x}[j,j-l] &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[j-1,j-l], j>1.\end{aligned}\tag{18.21}$$

Чтобы получить полную систему уравнений модели АРСС(1,1), необходимо задать значение индекса l .

Для $l=0$ получим из (18.21)

$$\begin{aligned}\chi_{3x} &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[1,1] - Q_3^x[1]\chi_{3xxa}[0,0,-1] + \chi_{3a}, j=0, \\ \chi_{3x}[1,1] &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[0,1] - Q_3^x[1]\chi_{3xxa}[-1,0,-1], \\ \chi_{3x}[j,j] &= \Phi_3^x[1]\chi_{3x}[j-1,j], j>1.\end{aligned}\tag{18.22}$$

Взаимную кумулянтную функцию $\chi_{3xxa}[0,0,-1]$ можно найти из (18.19), взяв совместную кумулянтную скобку с $x[t]$, $a_3[t-1]$

$$\chi_{3xxa}[0,0,-1] = \Phi_3^x[1]\chi_{3xxa}[0,-1,-1] - Q_3^x[1]\chi_{3xaa}[0,-1,-1]. \tag{18.23}$$

Кумулянтную функцию $\chi_{3xxa}[0,-1,-1]$, входящую в выражение (18.23), также найдем из (18.19), взяв совместную кумулянтную скобку с $x[t-1]$, $a_3[t-1]$

$$\chi_{3xxa}[0,-1,-1] = \Phi_3^x[1]\chi_{3xxa}[-1,-1,-1] - Q_3^x[1]\chi_{3xaa}[-1,-1,-1]. \tag{18.24}$$

Взаимные кумулянтные функции в (18.24) равны

$$\begin{aligned}\chi_{3xxa}[-1,-1,-1] &= \langle x[t-1], x[t-1], a_3[t-1] \rangle = \chi_{3a}, \\ \chi_{3xaa}[-1,-1,-1] &= \langle x[t-1], a_3[t-1], a_3[t-1] \rangle = \chi_{3a}.\end{aligned}\tag{18.25}$$

Тогда, с использованием соотношений (18.25), выражение (18.24) приводится к виду

$$\chi_{3xxa}[0, -1, -1] = (\Phi_3^\chi[1] - Q_3^\chi[1])\chi_{3a}. \quad (18.26)$$

Для нахождения $\chi_{3xaa}[0, -1, -1]$, входящего в выражение (18.23), возьмем совместную кумулянтную скобку (18.19) с $a_3[t-1]$, $a_3[t-1]$. Используя (18.25), получим

$$\chi_{3xaa}[0, -1, -1] = (\Phi_3^\chi[1] - Q_3^\chi[1])\chi_{3a}. \quad (18.27)$$

Подставляя найденные взаимные кумулянтные функции (18.26) и (18.27) в (18.23), приходим к выражению

$$\chi_{3xxa}[0, 0, -1] = (\Phi_3^\chi[1] - Q_3^\chi[1])^2 \chi_{3a}. \quad (18.28)$$

С учетом значений взаимных кумулянтных функций (18.26) и (18.28) система уравнений (18.22) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_{3x} &= \Phi_3^\chi[1]\chi_{3x}[1, 1] - Q_3^\chi[1](\Phi_3^\chi[1] - Q_3^\chi[1])^2 \chi_{3a} + \chi_{3a}, \\ \chi_{3x}[1, 1] &= \Phi_3^\chi[1]\chi_{3x}[0, 1] - Q_3^\chi[1](\Phi_3^\chi[1] - Q_3^\chi[1])\chi_{3a}, \\ \chi_{3x}[j, j] &= \Phi_3^\chi[1]\chi_{3x}[j-1, j], j > 1. \end{aligned} \quad (18.29)$$

Решая систему уравнений (18.29), можно определить параметры $\Phi_3^\chi[1]$, $Q_3^\chi[1]$ и третий кумулянт ошибки предсказания χ_{3a} .

Чтобы найти кумулянтные модели ОАР или ОСС третьего ранга, необходимо в операторном уравнении (18.12) положить равными нулю векторы коэффициентов ОСС или ОАР соответственно. Как показано выше, вид уравнений, описывающих кумулянтные модели, не будет отличаться от соответствующих моментных моделей линейного предсказания.

Свойства моментных и кумулянтных функций относительно линейных преобразований лежат в основе кумулянтных моделей линейного предсказания. Разностные уравнения кумулянтных моделей линейного предсказания совпадают по виду с аналогичными уравнениями для корреляционных и моментных моделей. Выборочные оценки кумулянтных функций негауссовых процессов вычисляются по выборочным оценкам моментных функций. Для этих целей используются соотношения, связывающие между собой моментные и кумулянтные функции. Вид уравнений для расчета параметров кумулянтных моделей совпадает с аналогичными уравнениями для моментных моделей. Оптимальность кумулянтной модели можно оценивать по близости

к нулю кумулянтных функций ошибок предсказания. Подобные рассуждения можно распространить и на модели линейного предсказания более высокого ранга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
2. Леонов В.П. Некоторые применения старших семиинвариантов в теории стационарных случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 124 с.
3. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. – К.: Выща школа, 1987. – 191 с.
4. Тихонов В.А. Кумулянтные модели линейного предсказания процессов авторегрессии-скользящего среднего // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2005. – Т. 48, №8. – С. 70–80.

19 КОМПЛЕКСНАЯ ОБОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕССИИ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

19.1 Введение

Для полного описания негауссовых процессов во временной области необходимо использовать весь набор моментных или кумулянтных функций [1], являющихся статистиками высших порядков. В научной литературе [1–4] задача получения статистик высших порядков комплексных негауссовых процессов, как правило, не рассматривается. Комплексная модель процессов и сигналов применяются для решения многих прикладных задач. Обработка квадратурных составляющих комплексного сигнала используется, например, для обнаружения полезного сигнала на фоне помех, в корректорах каналов связи, для комплексной демодуляции полосовых сигналов. Примерами комплексных сигналов являются аналитические сигналы, радио– или звуковые волны, рассеянные на неоднородностях атмосферы либо потоках жидкости при бесконтактных методах измерения скорости потока и интенсивности вихревых флуктуаций в нем.

Хотя большинство случайных процессов, описываемых моделями АР, являются действительными, комплексная модель АР на основе статистик второго порядка описывает более полно некоторые классы случайных процессов [5]. На основе статистик высших порядков негауссовых процессов можно получить модель ОАР, учитывающую негауссовы свойства действительных процессов [6]. Модель ОАР применяется для решения ряда задач, которые сложно либо невозможно решить, ограничиваясь статистиками второго порядка. Поэтому важной задачей является построение ОАР модели негауссовых комплексных процессов. Здесь получены статистики высших порядков негауссовых комплексных процессов, на основе которых построена комплексная ОАР модель.

19.2 Свойства моментных функций комплексного процесса

Пусть $\dot{x}[t]$ – стационарный комплексный негауссов процесс с нулевым средним и с ненулевой моментной функцией третьего порядка. Его моментная функция третьего порядка будет определяться выражением [7]

$$\dot{m}_3[k, l] \equiv \dot{m}_3[0, k, l] \equiv \dot{m}_3[0^{(*)}, k, l] = E\{\dot{x}^*[t]\dot{x}[t+k]\dot{x}[t+l]\}, \quad (19.1)$$

где символ «*» означает комплексное сопряжение, а символ «^(*)» приписывается тому сдвигу сомножителя, который является комплексно–сопряженным. В дальнейшем для упрощения обозначений символ «^(*)» будет часто опускаться, но последовательность сдвигов комплексно–сопряженных сомножителей необходимо определять согласно (19.1). Сдвиги k, l могут

принимать положительные, отрицательные и равные нулю значения. С учетом (19.1), комплексно–сопряженная моментная функция равна

$$\dot{m}_3^*[k, l] \equiv \dot{m}_3^*[0, k, l] \equiv \dot{m}_3^*[0, k^{(*)}, l^{(*)}] \equiv \dot{m}_3^*[k^{(*)}, l^{(*)}] = E\{\dot{x}[t]\dot{x}^*[t+k]\dot{x}^*[t+l]\}.$$

Тогда дисперсия моментной функции будет действительным числом $D_{m_3} = E\{\dot{m}_3^*[k, l]\dot{m}_3[k, l]\}$. Моментная функция процесса $\dot{x}[t]$, заданного на интервале $t = \overline{1, N}$, находится из выражения

$$\dot{m}_3[k, l] = \frac{1}{N} \sum_{t=s_1}^{s_2} \dot{x}^*[t]\dot{x}[t+k]\dot{x}[t+l],$$

где $s_1 = \max(1, 1-k, 1-l)$; $s_2 = \min(N, N-k, N-l)$. Для комплексной моментной функции правила перехода от отрицательных значений сдвигов к положительным сдвигам определяются из свойства инвариантности моментной функции стационарного процесса относительно сдвига времени. Согласно этому правилу, $\dot{m}_3[0^{(*)}, -k, -l] = \dot{m}_3[n^{(*)}, n-k, n-l]$.

Для моментных функций произвольных порядков справедливы выражения

$$\begin{aligned} \dot{m}_r[k, n, l, \dots] &= \dot{m}_r[0, k, l, n, \dots] = \dot{m}_r[0^{(*)}, k, n^{(*)}, l, \dots] = \dot{m}_r[k, n^{(*)}, l, \dots] = \\ &= E\{\dot{x}^*[t]\dot{x}[t+k]\dot{x}^*[t+n]\dot{x}[t+l]\dots\}. \end{aligned}$$

Сомножители с комплексным сопряжением необходимо брать через один. Моментные функции 2–го, 3–го и 4–го порядков определяются выражениями

$$\dot{m}_2[k] = \dot{m}_2[0^{(*)}, k] = E\{\dot{x}^*[t]\dot{x}[t+k]\}, \quad \dot{m}_3[0^{(*)}, k, l] = E\{\dot{x}^*[t]\dot{x}[t+k]\dot{x}[t+l]\},$$

$$\dot{m}_4[0^{(*)}, k, n^{(*)}, l] = E\{\dot{x}^*[t]\dot{x}[t+k]\dot{x}^*[t+n]\dot{x}[t+l]\}.$$

Четные моменты комплексных негауссовых процессов будут действительными. Например, при $r=2$ и $r=4$ имеем соответственно

$$\dot{m}_4 = E\{\dot{x}[t]\dot{x}^*[t]\}, \quad \dot{m}_4 = E\{\dot{x}[t]\dot{x}^*[t]\dot{x}[t]\dot{x}^*[t]\}.$$

Можно показать, что выражения, связывающие кумулянтные и моментные функции, остаются справедливыми и для комплексных процессов. Приведем некоторые соотношения, позволяющие вычислять комплексные

кумулянтные функции через комплексные моментные функции негауссовых стационарных процессов.

Для нахождения комплексных кумулянтных функций стационарных процессов можно использовать соотношения [8]:

$$\dot{\chi}_1 = \dot{m}_1,$$

$$\dot{\chi}_2[0, i] = \dot{m}_2[0, i] - \dot{m}_1^2,$$

$$\dot{\chi}_3[0, i, n] = \dot{m}_3[0, i, n] - \dot{m}_1(\dot{m}_2[0, n - i] + \dot{m}_2[0, n] + \dot{m}_2[0, i]) + 2\dot{m}_1^3.$$

19.3 Обобщенная модель авторегрессии комплексного процесса

Рассмотрим принципы построения модели ОАР негауссовых комплексных процессов на основе статистик высших порядков, которые аналогичны предложенным в [9] моделям ОАР для действительных процессов. Найдем уравнения, описывающие модель ОАР третьего ранга. Модель ОАР третьего ранга комплексного негауссова процесса с нулевым средним описывается рекуррентным уравнением

$$\dot{\chi}[t] = \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_3[i] \dot{\chi}[t-i] + \dot{a}_3[t], \quad (19.2)$$

где p и $\dot{\Phi}_3[i]$ – порядок и комплексные коэффициенты модели ОАР, $\dot{a}_3[t] = a_{3c}[t] + ja_{3s}[t]$ – комплексный случайный процесс типа белого шума, у которого отсутствуют статистические связи третьего порядка. Статистическая независимость ошибок предсказания означает, что

$$E\{\dot{a}_3[t] \dot{a}_3^*[t-k] \dot{a}_3[t-l]\} = 0, \quad 0 < k \leq p, \quad l \geq 0.$$

Получим выражения для расчета параметров комплексной модели ОАР третьего ранга, описываемой выражением (19.2). Умножим (19.1) на $\dot{\chi}^*[t-k] \dot{\chi}[t-l]$ и усредним

$$\begin{aligned} E\{\dot{\chi}[t] \dot{\chi}^*[t-k] \dot{\chi}[t-l]\} = \\ = \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_3[i] E\{\dot{\chi}[t-i] \dot{\chi}^*[t-k] \dot{\chi}[t-l]\} + E\{\dot{a}_3[t] \dot{\chi}^*[t-k] \dot{\chi}[t-l]\}. \end{aligned} \quad (19.3)$$

С учетом стационарности негауссова процесса $\dot{x}[t]$ и статистической независимости $\dot{a}_3[t]$, получим из (19.3)

$$\dot{m}_3[k, k-l] = \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_3[i] \dot{m}_3[k-i, k-l]. \quad (19.4)$$

Комплексные моментные функции, входящие в (19.4), равны

$$\dot{m}_3[k, k-l] = m_{3c}[k, k-l] + jm_{3s}[k, k-l] = E\{\dot{x}[t]\dot{x}^*[t-k]\dot{x}[t-l]\},$$

$$\dot{m}_3[k-i, k-l] = m_{3c}[k-i, k-l] + jm_{3s}[k-i, k-l] = E\{\dot{x}[t-i]\dot{x}^*[t-k]\dot{x}[t-l]\}.$$

Если в уравнении (19.4) выделить действительную и мнимую части, то его можно представить в виде системы двух уравнений

$$m_{3c}[k, k-l] = \sum_{i=1}^p (\Phi_{3c}[i]m_{3c}[k-i, k-l] - \Phi_{3s}[i]m_{3s}[k-i, k-l]), \quad (19.5)$$

$$m_{3s}[k, k-l] = \sum_{i=1}^p (\Phi_{3c}[i]m_{3s}[k-i, k-l] + \Phi_{3s}[i]m_{3c}[k-i, k-l]).$$

Коэффициенты ОАР не должны зависеть от сдвига l в том случае, когда моделируемый процесс $\dot{x}[t]$ является истинным процессом авторегрессии. Однако, если комплексный негауссов процесс $\dot{x}[t]$ был получен в результате нелинейного преобразования гауссова или негауссова порождающего процесса, то коэффициенты $\dot{\Phi}[i]$ и порядок модели могут зависеть от l . Поэтому значение сдвига l выбирается, исходя из свойств моделируемого процесса, требований к модели и условий решаемой задачи.

При $k=0, l=0$ из уравнения (19.3) получаем соотношение, связывающее комплексные моменты третьего порядка негауссова процесса и ошибки предсказания

$$\dot{m}_3 = \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_3[i] \dot{m}_3[i, i] + \dot{m}_{3a},$$

где $\dot{m}_3 = E\{\dot{x}[t]\dot{x}^*[t]\dot{x}[t]\}$; $\dot{m}_{3a} = E\{\dot{a}_3[t]\dot{a}_3^*[t]\dot{a}_3[t]\}$.

Аналогично строится обобщенная модель авторегрессии произвольного ранга комплексного негауссова процесса.

Модель ОАР r -го ранга описывается уравнением вида

$$\dot{x}[t] = \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_r[i] \dot{x}[t-i] + \dot{a}_r[t]. \quad (19.5)$$

Для построения модели ОАР r -го ранга будем полагать, что моментная функция r -го порядка ошибки предсказания равна нулю. Условие статистической независимости ошибки предсказания можно записать в виде

$$E\{\dot{a}[t]\dot{a}^*[t-k]\dot{a}[t-l]\dot{a}^*[t-n]\dots\} = 0.$$

Чтобы получить выражения для расчета коэффициентов ОАР, умножим в (19.5) левую и правую части на $\dot{x}^*[t-k]\dot{x}[t-l]\dot{x}^*[t-n]\dots$ и усредним. В результате несложных преобразований получим

$$\dot{m}_r[k, k-l, k-n, \dots] = \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_r[i] \dot{m}_r[k-i, k-l, k-n, \dots],$$

где p и $\dot{\Phi}_r[i]$ — порядок и коэффициенты модели ОАР r -го ранга.

Выбор сдвигов $n, l, \dots$ зависит от свойств негауссова процесса и требований к модели. Выражение, связывающее моменты r -го порядка и ошибки предсказания, получаем при $k, n, l, \dots = 0$

$$\dot{m}_r = \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_r[i] \dot{m}_r[i, i, \dots, i] + \dot{m}_{ra},$$

где $\dot{m}_r = E\{\dot{x}[t]\dot{x}^*[t]\dot{x}[t]\dots\}$, $\dot{m}_{ra} = E\{\dot{a}[t]\dot{a}^*[t]\dot{a}[t]\dots\}$.

В данном разделе развита теория построения статистик высших порядков комплексных негауссовых процессов. На основе комплексных моментных функций синтезирована комплексная модель ОАР. Получены выражения для расчета комплексных коэффициентов ОАР третьего и произвольного ранга.

19.4 Параметрические спектры комплексных обобщенных моделей авторегрессии

В [7] показано, что выражение для ОАР комплексного параметрического спектра третьего порядка комплексного негауссова процесса имеет вид

$$\dot{P}(\omega_1, \omega_2) = \dot{H}(\omega_1)\dot{H}(\omega_2)\dot{H}^*(\omega_1 + \omega_2)\dot{m}_{3a}, \quad (19.6)$$

где $\dot{H}(\omega) = \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_3[i] e^{-j\omega iT}\right)^{-1}$. Параметрический спектр третьего порядка является комплексным.

Для упрощения анализа двумерного параметрического спектра третьего порядка можно рассматривать набор его сечений, полагая одну из частотных переменных равной константе. Иногда удобно рассматривать такой спектр в нулевом сечении, т. е. полагая одну из частотных переменных в (19.6) равной нулю

$$\dot{P}(\omega) = \dot{P}(\omega, 0) = |\dot{H}(\omega)|^2 \dot{m}_{3a} \dot{b} = \frac{\dot{m}_{3a} \dot{b}}{\left|1 - \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_3[i] e^{-j\omega Ti}\right|^2}, \quad \dot{b} = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p \dot{\Phi}_3[i]}. \quad (19.7)$$

Таким образом, параметрический спектр третьего порядка комплексного процесса является комплексной величиной даже при $\omega_2 = 0$, что отличает его от спектра мощности и от параметрического спектра третьего порядка действительного процесса [10]. Заметим, что действительная и мнимая части параметрической оценки спектра высших порядков могут принимать положительные и отрицательные значения. Однако форма спектра зависит от параметров модели $\dot{\Phi}_r[i]$. Ниже будут рассмотрены примеры применения формулы для оценки выборочных значений спектральных плотностей третьего порядка.

19.5 Генерация одномодовых комплексных негауссовых процессов по заданным параметрам спектра высшего порядка

При проектировании систем обработки случайных процессов методом математического моделирования необходимо уметь моделировать выборки сигналов и полей. На основе комплексной модели ОАР можно построить генератор комплексных негауссовых процессов с заданными параметрами спектра высших порядков. Ниже описывается способ получения комплексных процессов с одномодовым и двумодовым спектром [11].

Рассмотрим задачу генерирования комплексного имитационного негауссова процесса с заданными параметрами спектра третьего порядка. В качестве задаваемых характеристик, описывающих спектр мощности высших порядков, используются количество спектральных пиков, их центральные частоты и полосы занимаемых ими частот.

Для получения одномодового комплексного процесса можно использовать модель ОАР первого порядка.

Из (19.5) запишем систему разностных уравнений для модели первого порядка

$$\begin{aligned} m_{3c}[k, k-l] &= \Phi_{3c} m_{3c}[k-1, k-l] - \Phi_{3s} m_{3s}[k-1, k-l], \\ m_{3s}[k, k-l] &= \Phi_{3c} m_{3s}[k-1, k-l] + \Phi_{3s} m_{3c}[k-1, k-l]. \end{aligned} \quad (19.8)$$

Характеристическое уравнение системы (19.8) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -c + \Phi_{3c} & -\Phi_{3s} \\ \Phi_{3s} & -c + \Phi_{3c} \end{vmatrix} = 0. \quad (19.9)$$

Для решения уравнения (19.9) необходимо найти корни квадратного уравнения

$$c^2 - 2c\Phi_{3c} + \Phi_{3c}^2 + \Phi_{3s}^2 = 0. \quad (19.10)$$

Рассмотрим случай, когда корни уравнения комплексные. Уравнение (19.10) может быть также представлено как

$$\prod_{i=1}^2 (c - c[i]) = 0, \quad (19.11)$$

где $c[i]$ – два комплексно–сопряженных корня. Корни характеристического уравнения имеют вид экспоненциальных функций

$$c[1,2] = \exp\left(\pm j\omega_1 T - \frac{\Delta\omega_1 T}{2}\right), \quad (19.12)$$

где ω_1 – собственная частота линейной системы, описываемой моделью ОАР, $\Delta\omega_1$ – ширина спектра по уровню половинной мощности, T – интервал дискретизации. Из (19.10) и (19.11) найдем связь корней характеристического уравнения и коэффициентов ОАР

$$\begin{aligned} 2\Phi_{3c} &= c[1] + c[2], \\ \Phi_{3c}^2 + \Phi_{3s}^2 &= c[1]c[2]. \end{aligned} \quad (19.13)$$

С учетом (19.12) из (19.13) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{3c} &= \exp\left(-\frac{\Delta\omega_1 T}{2}\right) \cos \omega_1 T, \\ \Phi_{3s} &= \exp\left(-\frac{\Delta\omega_1 T}{2}\right) \sin \omega_1 T. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Рассмотрим пример генерации одномодового комплексного негауссова процесса первого порядка ($p = 1$) с заданными характеристиками спектра: центральной частотой $f = 0.2$; полосой занимаемых частот $\Delta f = 0.03$ (в относительных единицах). Комплексный коэффициент формирующего ОАР фильтра, полученный из (19.14), равен $\dot{\Phi}_3[1] = 0.2812 + j0.8655$. При подстановке значения коэффициента в (19.7) получаем заданный теоретический спектр третьего порядка, действительная и мнимая части одностороннего спектра показаны на рис. 19.1 (кривые 1).

Оценивался также спектр по реализации процесса. Для генерации негауссова процесса на вход формирующего фильтра подавался порождающий процесс, представляющий собой комплексный негауссов белый шум. Из системы уравнений (19.5) находились оценки комплексного коэффициента ОАР модели выходного процесса для некоторых значений сдвига l по выборочным значениям моментной функции. Полученные оценки коэффициента ОАР использовались для нахождения параметрических спектров сгенерированной реализации. На рис. 19.1 (кривые 2) представлена такая нормированная оценка для сдвига $l = -1$, полученная по выборке объемом $N = 2000$ отсчетов.

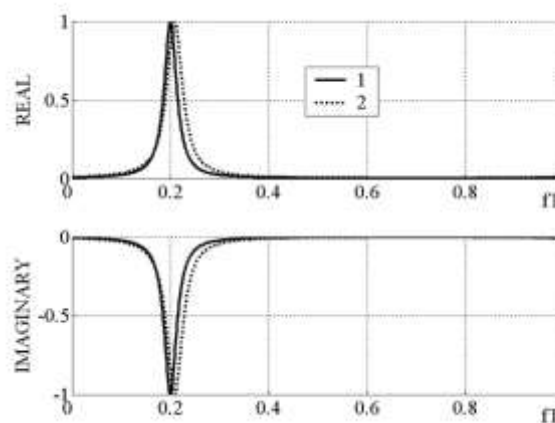


Рисунок 19.1 – Параметрические оценки комплексного спектра третьего порядка комплексной модели ОАР первого порядка третьего ранга (1 – теоретический спектр, 2 – выборочная оценка спектра)

19.6 Генерирование двумодовых комплексных негауссовых процессов по заданным параметрам спектра высшего порядка

Найдем коэффициенты ОАР модели для генерации негауссова комплексного процесса, имеющего две спектральные моды. Для этого используется комплексная модель ОАР второго порядка.

Коэффициенты ОАР находятся из системы разностных уравнений (19.5), которая при $p = 2$ имеет вид

$$m_{3c}[i, i-l] = \Phi_{3c}[1]m_{3c}[i-1, i-l] + \Phi_{3c}[2]m_{3c}[i-2, i-l] - \Phi_{3s}[1]m_{3s}[i-1, i-l] - \Phi_{3s}[2]m_{3s}[i-2, i-l], \quad (19.15)$$

$$m_{3s}[i, i-l] = \Phi_{3c}[1]m_{3s}[i-1, i-l] + \Phi_{3c}[2]m_{3s}[i-2, i-l] + \Phi_{3s}[1]m_{3c}[i-1, i-l] + \Phi_{3s}[2]m_{3c}[i-2, i-l].$$

Характеристическое уравнение для системы уравнений (19.15) записывается следующим образом [12]:

$$\begin{vmatrix} -c^2 + c\Phi_{3c}[1] + \Phi_{3c}[2] & -c\Phi_{3s}[1] - \Phi_{3s}[2] \\ c\Phi_{3s}[1] + \Phi_{3s}[2] & -c^2 + c\Phi_{3c}[1] + \Phi_{3c}[2] \end{vmatrix} = 0. \quad (19.16)$$

Уравнение (19.16) сводится к соответствующему алгебраическому уравнению четвертой степени

$$c^4 - 2c^3\Phi_{3c}[1] + c^2(\Phi_{3s}[1] - 2\Phi_{3c}[2] + \Phi_{3c}^2[1]) + 2c(\Phi_{3c}[1]\Phi_{3c}[2] + \Phi_{3s}[1]\Phi_{3s}[2]) + \Phi_{3c}^2[2] + \Phi_{3s}^2[2] = 0. \quad (19.17)$$

Используя корни уравнения (19.17), его можно представить в виде

$$\prod_{i=1}^4 (c - c[i]) = 0. \quad (19.18)$$

Из (19.17) и (19.18) найдем соотношения, связывающие корни характеристического уравнения и коэффициенты ОАР

$$\begin{aligned} -2\Phi_{3c}[1] &= c[1] + c[2] + c[3] + c[4], \\ \Phi_{3s}^2[1] - 2\Phi_{3c}[2] + \Phi_{3c}^2[1] &= \\ &= c[1]c[2] + c[1]c[3] + c[1]c[4] + c[3]c[4] + c[2]c[3] + c[2]c[4], \\ -2(\Phi_{3c}[1]\Phi_{3c}[2] + \Phi_{3s}[1]\Phi_{3s}[2]) &= \\ &= c[1]c[2]c[3] + c[1]c[2]c[4] + c[1]c[3]c[4] + c[2]c[3]c[4], \\ \Phi_{3c}^2[2] + \Phi_{3s}^2[2] &= c[1]c[2]c[3]c[4]. \end{aligned} \quad (19.19)$$

В случае комплексных корней характеристического уравнения (19.17) они представляются в виде

$$c[1,2] = \exp\left(-\frac{\Delta\omega_1}{2} \pm j\omega_1 T\right), \quad (19.20)$$

$$c[3,4] = \exp\left(-\frac{\Delta\omega_2}{2} \pm j\omega_2 T\right).$$

При решении системы алгебраических уравнений (19.19) с использованием (19.20) возможны несколько решений. Полученные наборы коэффициентов ОАР проверяются на соответствие заданным параметрам спектра.

По описанной методике был получен комплексный двумодовый процесс с параметрами спектра: для первой моды – $f_1 = 0.3$, $\Delta f_1 = 0.04$; для второй – $f_2 = 0.6$, $\Delta f_2 = 0.03$. Решение системы уравнений (19.19) дает несколько корней, из которых заданным параметрам спектра отвечает набор коэффициентов: $\dot{\Phi}_3[1] = -1.0088 + j.3038$, $\dot{\Phi}_3[2] = -0.6493 + j.4718$. Мнимая и действительная части теоретического параметрического спектра, рассчитанные по найденным коэффициентам, представлены на рис. 19.2 (кривые 1). Кривые 2 и 3 соответствуют ОАР параметрическим оценкам реализации с выхода фильтра для сдвигов $l = 0; 1$ и получены по выборке длиной $N = 2000$ отсчетов. Из графиков, представленных на рис. 19.1 и рис. 19.2 следует, что рассчитанные согласно (19.13) и (19.19) коэффициенты ОАР достаточно точно соответствуют задаваемым характеристикам спектра. Упростить расчет коэффициентов АР по параметрам спектра можно, если использовать соотношения (5.13).

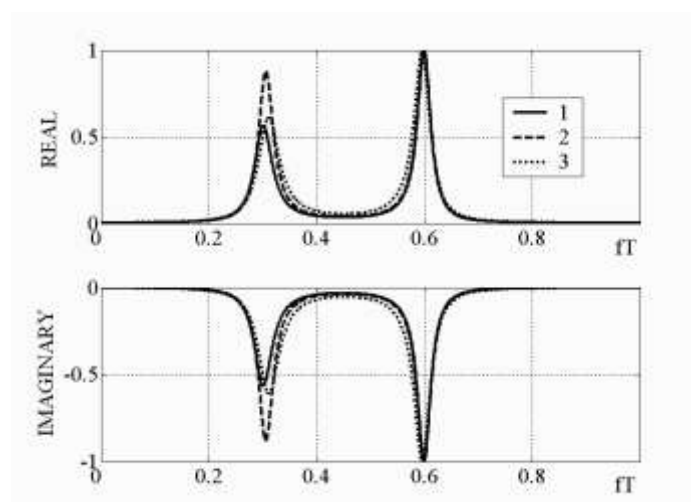


Рисунок 19.2 – Параметрические оценки комплексного спектра третьего порядка комплексной модели ОАР второго порядка третьего ранга

(1 – теоретический спектр, 2 и 3 – выборочная оценка спектра при $l = 0; 1$)

Таким образом, в разделе представлен метод генерации квадратурных составляющих узкополосного процесса по заданным параметрам спектра высшего порядка с помощью комплексной модели ОАР. Показана аналитическая связь параметров ОАР модели с центральной частотой моды и шириной полосы по уровню 0.5. Спектры сгенерированных комплексных процессов ОАР достаточно точно соответствуют задаваемым параметрам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
2. Журбенко И.Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 240 с.
3. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. – К.: Выща школа, 1987. – 191 с.
4. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
5. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
6. Тихонов В.А. Обобщенная модель скользящего среднего негауссовых процессов // Радиотехника. – 2003. – №133. – С. 208–211.
7. Тихонов В.А. Нетребенко К.В. Комплексная обобщенная модель авторегрессии негауссовых процессов // Известие вузов. Радиоэлектроника. – 2006. – №8. – С. 21–30.
8. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
9. Тихонов В.А. Обобщенная модель авторегрессии негауссовых процессов // Радиотехника. – 2003. – №132. – С. 78–82.
10. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Параметрическое оценивание спектров высших порядков негауссовых процессов // АСУ и приборы автоматики. – 2004. – №127. – С. 68–73.
11. Тихонов В.А., Зубков О.В., Сидоров Г.И. Генерирование квадратурных составляющих случайного узкополосного аналитического сигнала на несущей частоте по заданным параметрам спектральной плотности мощности // АСУ и приборы автоматики. – 2003. – №124. – С. 18–23.
12. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие для студентов вузов. – М: Наука, 1985. – 128 с.

20 ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

20.1 Введение

Моделью линейного предсказания является метод представления случайного процесса на выходе линейной предсказывающей системы на вход, которой подается белый шум. Задача построения модели сводится, в основном, к нахождению параметров этой линейной системы. Для описания линейной системы предсказания используются линейные операторы. Однако, на наш взгляд, операторный анализ таких систем еще недостаточно развит.

В разделе развивается теория параметрической оценки спектров высших порядков на основе моделей ОАР, ОСС и ОАРСС с использованием линейных операторов. Ниже будут получены формулы параметрической оценки спектров второго и высших порядков на основе классической и обобщенных моделей линейного предсказания произвольного ранга. При их выводе использовались свойства операторных уравнений, описывающих преобразования моментных функций и спектров второго и высших порядков негауссова белого шума в линейных системах, характеризуемых моделями линейного предсказания [1]. Найдены собственные функции и собственные значения операторов авторегрессии и скользящего среднего во временном и в частотном представлении.

В разделе получены выражения для параметрических спектров на основе анализа операторов ОАР и ОСС и их представления по собственным функциям оператора сдвига назад. В теории линейных операторов показано, что собственные значения операторов могут составлять непрерывный или дискретный спектр. Таким способом удалось выразить параметрические оценки спектров всех порядков через спектры линейных операторов ОАР и ОСС. Показано, что собственной функцией операторов ОАР и ОСС является комплексная экспонента. Тогда спектры этих операторов определяют формулы параметрических оценок спектров второго и высших порядков.

20.2 Операторный анализ дискретных линейных систем

Выражения для параметрической спектральной оценки будут получены на основе операторного анализа дискретных линейных систем. Хотя такой подход не нашел широкого распространения в анализе линейных систем, он позволяет простым способом перейти от уравнений во временном представлении к их частотному представлению. Используя дискретное частотное представление операторов авторегрессии и скользящего среднего, можно получить выражения для параметрического оценивания спектров второго и высших порядков. В приводимых ниже выражениях нормировочные коэффициенты не учитываются, т. к. они сокращаются в используемых уравнениях, а также при нормировке спектров.

Найдем сначала операторные уравнения для дискретной линейной системы, на вход которой подается негауссов случайный процесс $y[t]$ в дискретные моменты времени t . Будем рассматривать модели систем линейного предсказания вперед и назад, так как последние также необходимы для получения выражений спектральных оценок. Соответствующие разностные уравнения АРСС имеют вид

$$\Phi(\hat{z}_t)x[t] = Q(\hat{z}_t)y[t], \quad (20.1, a)$$

$$\Phi(\hat{z}_t^{-1})x[t] = Q(\hat{z}_t^{-1})y[t], \quad (20.1, б)$$

где линейные операторы $\Phi(\hat{z}_t), Q(\hat{z}_t)$ и $\Phi(\hat{z}_t^{-1}), Q(\hat{z}_t^{-1})$, характеризующие систему, описываются выражениями

$$\Phi(\hat{z}_t) = \sum_{i=0}^p \Phi[i] \hat{z}_t^{-iT}, \quad Q(\hat{z}_t) = \sum_{n=0}^q Q[n] \hat{z}_t^{-nT}, \quad (20.2, a)$$

$$\Phi(\hat{z}_t^{-1}) = \sum_{i=0}^p \Phi[i] \hat{z}_t^{+iT}, \quad Q(\hat{z}_t^{-1}) = \sum_{n=0}^q Q[n] \hat{z}_t^{+nT}, \quad Q[0] = \Phi[0] = 1, \quad (20.2, б)$$

а T – интервал дискретизации. В операторах линейного предсказания оператор сдвига действует на номер отсчета случайного процесса. Чтобы получить выражения для параметрических спектров как функцию дискретной частоты, удобно рассматривать оператор сдвига, действие которого приводит к сдвигу случайного процесса на дискретное время $\pm iT$. Действие операторов сдвига $\hat{z}_t^{\pm iT}$ определяется соотношениями

$$\hat{z}_t^{\pm iT} x[t] = x[t \pm iT].$$

Таким образом, оператор $\hat{z}_t^{-iT}$ уменьшает, а оператор $\hat{z}_t^{+iT}$ увеличивает текущее значение времени t на iT интервалов дискретизации. В уравнениях для моделей линейного предсказания будут использоваться произведения двух и более операторов сдвига вперед $\hat{z}_{t_1}^{+iT} \hat{z}_{t_2}^{+iT} \dots \hat{z}_{t_p}^{+iT}$. Дискретный временной индекс при t указывает на какой из временных индексов многомерной функции действует данный оператор

$$\hat{z}_{t_1}^{+iT} \hat{z}_{t_2}^{+kT} \dots \hat{z}_{t_p}^{+nT} x[t_1, t_2, \dots, t_p] = x[t_1 + iT, t_2 + kT, \dots, t_p + nT].$$

Комплексные экспоненты являются собственными функциями оператора сдвига

$$\hat{z}_t^{\pm iT} e^{-j\omega t} = e^{\pm j\omega iT} e^{-j\omega t}, \quad \hat{z}_t^{\pm iT} e^{j\omega t} = e^{\pm j\omega iT} e^{j\omega t},$$

а их собственные значения равны [2]

$$z = e^{\pm j\omega iT}.$$

Это согласуется с известным свойством сдвига во времени сигнала, который приводит к соответствующему сдвигу фазовой характеристики спектра в том же направлении. Заметим, что сдвиг аргумента функции в отрицательном направлении оси времени сдвигает функцию в положительном направлении оси времени. Поэтому действие оператора сдвига назад эквивалентно положительному приращению аргумента функции и наоборот.

Для произведения операторов сдвига вперед типа $\hat{z}_{t_1}^{+iT} \hat{z}_{t_2}^{+iT} \dots \hat{z}_{t_r}^{+iT}$ собственная функция и собственные значения многомерные. Например, из уравнения

$$\begin{aligned} \hat{z}_{t_1}^{+iT} \hat{z}_{t_2}^{+iT} \dots \hat{z}_{t_{r-1}}^{+iT} e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2} \dots e^{j\omega_{r-1} t_{r-1}} = \\ = e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})iT} e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2} \dots e^{j\omega_{r-1} t_{r-1}} \end{aligned}$$

следует, что для собственной функции $e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2} \dots e^{j\omega_{r-1} t_{r-1}}$ собственные значения равны $e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})iT}$.

Операторы $\Phi(\hat{z}_t)$, $Q(\hat{z}_t)$ и $\Phi(\hat{z}_t^{-1})$, $Q(\hat{z}_t^{-1})$ также обладают собственными функциями в виде комплексной экспоненты [1]

$$\Phi(\hat{z}_t) e^{\pm j\omega t} = \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega iT} e^{\pm j\omega t}, \quad (20.3, a)$$

$$\Phi(\hat{z}_t^{-1}) e^{\pm j\omega t} = \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{j\omega iT} e^{\pm j\omega t},$$

$$Q(\hat{z}_t)e^{\pm j\omega t} = \sum_{n=0}^q Q[n]e^{-j\omega nT}e^{\pm j\omega t}, \quad (20.3, б)$$

$$Q(\hat{z}_t^{-1})e^{\pm j\omega t} = \sum_{n=0}^q Q[n]e^{j\omega nT}e^{\pm j\omega t}.$$

а их собственные значения равны соответственно

$$\Psi(\omega) = \sum_{i=0}^p \Phi[i]e^{-j\omega iT}, \quad \Psi(-\omega) = \sum_{i=0}^p \Phi[i]e^{j\omega iT}, \quad (20.4, а)$$

$$\Theta(\omega) = \sum_{n=0}^q Q[n]e^{-j\omega nT}, \quad \Theta(-\omega) = \sum_{n=0}^q Q[n]e^{j\omega nT}. \quad (20.4, б)$$

Так как собственные значения операторов $\hat{z}_t^{-iT}$ и $\hat{z}_t^{+iT}$, а также $\Phi(\hat{z}_t)$, $Q(\hat{z}_t)$ и $\Phi(\hat{z}_t^{-1})$, $Q(\hat{z}_t^{-1})$ комплексные, то они не являются эрмитовыми операторами.

Собственные значения многомерных операторов ОАР и ОСС определяются соотношениями

$$\Phi(\hat{z}_{t_1}^{-iT} \hat{z}_{t_2}^{-iT} \dots \hat{z}_{t_{r-1}}^{-iT})e^{j\omega_1 t_1}e^{j\omega_2 t_2} \dots e^{j\omega_{r-1} t_{r-1}} = \quad (20.5, а)$$

$$= \sum_{i=0}^p \Phi[i]e^{j\omega_1 t_1}e^{j\omega_2 t_2} \dots e^{j\omega_{r-1} t_{r-1}},$$

$$Q(\hat{z}_{t_1}^{-iT} \hat{z}_{t_2}^{-iT} \dots \hat{z}_{t_{r-1}}^{-iT})e^{j\omega_1 t_1}e^{j\omega_2 t_2} \dots e^{j\omega_{r-1} t_{r-1}} = \quad (20.5, б)$$

$$= \sum_{n=0}^q Q[n]e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})nT}e^{j\omega_1 t_1}e^{j\omega_2 t_2} \dots e^{j\omega_{r-1} t_{r-1}}.$$

Таким образом, собственные значения многомерных операторов ОАР и ОСС равны

$$\Psi(-\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{r-1}) = \sum_{i=0}^p \Phi[i]e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})iT}, \quad (20.6, а)$$

$$\Theta(-\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{r-1}) = \sum_{n=0}^q Q[n]e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})nT}. \quad (20.6, б)$$

Найдем вид операторов $\Phi(\hat{z}_t), Q(\hat{z}_t)$ и $\Phi(\hat{z}_t^{-1}), Q(\hat{z}_t^{-1})$, а также уравнения (20.1, а) в частотном представлении. Пусть полная ортонормированная система базисных функций представлена собственными функциями $e^{-j\omega t}$ оператора сдвига назад $\hat{z}_t^{-iT}$. Тогда случайный процесс с конечной энергией можно представить рядом Фурье

$$x[t] = \sum_{\omega'=0}^{\infty} S_x(\omega') e^{j\omega' t}, \quad y[t] = \sum_{\omega'=0}^{\infty} S_y(\omega') e^{j\omega' t}, \quad (20.7)$$

где $S_x(\omega')$ и $S_y(\omega')$ – представление случайного процесса с конечной энергией в частотной области [3, 4]. Подставим (20.7) в (20.1, а), а затем умножим слева правую и левую части полученного выражения на $e^{-j\omega t}$ и просуммируем по t . Полученное выражение имеет вид

$$\sum_{\omega'=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} e^{-j\omega t} \Phi(\hat{z}_t) e^{j\omega' t} S_x(\omega') = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} e^{-j\omega t} Q(\hat{z}_t) e^{j\omega' t} S_y(\omega').$$

Из этого выражения следует, что уравнение (20.1, а) в представлении собственных функций оператора сдвига назад можно записать следующим образом:

$$\sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{\Phi}_{\omega'\omega} S_x(\omega') = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{Q}_{\omega'\omega} S_y(\omega'), \quad (20.8)$$

где ядра $\hat{\Phi}_{\omega'\omega}$ и $\hat{Q}_{\omega'\omega}$ операторов $\Phi(\hat{z}_t)$ и в представлении собственных функций оператора сдвига назад равны

$$\hat{\Phi}_{\omega'\omega} = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-j\omega' t} \Phi(\hat{z}_t) e^{j\omega t}, \quad \hat{Q}_{\omega'\omega} = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-j\omega' t} Q(\hat{z}_t) e^{j\omega t}. \quad (20.9)$$

Аналогично определим ядра операторов $\Phi(\hat{z}_t^{-1})$ и $Q(\hat{z}_t^{-1})$

$$\hat{\Phi}_{-\omega'\omega} = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-j\omega' t} \Phi(\hat{z}_t^{-1}) e^{j\omega t}, \quad \hat{Q}_{-\omega'\omega} = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-j\omega' t} Q(\hat{z}_t^{-1}) e^{j\omega t}. \quad (20.10)$$

В частотном представлении, или точнее в собственном представлении, оператор сдвига выражается через собственное значение и символ Кронекера.

Этот оператор имеет вид диагональной матрицы

$$\hat{z}_{\omega'\omega}^{\pm iT} = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-j\omega't} \hat{z}_t^{\pm iT} e^{j\omega t} = e^{\pm j\omega iT} \delta_{\omega'\omega}.$$

Таким образом, в частотном представлении оператор сдвига смещает фазы и изменяет частоты ω' на ω . С учетом (20.3) и (20.4) ядра операторов $\Phi(\hat{z}_t)$, $Q(\hat{z}_t)$ и $\Phi(\hat{z}_t^{-1})$, $Q(\hat{z}_t^{-1})$ в представлении собственных функций равны

$$\hat{\Phi}_{\omega'\omega} = \Psi(\omega') \delta_{\omega'\omega}, \quad \hat{\Phi}_{-\omega'\omega} = \Psi(-\omega') \delta_{\omega'\omega}, \quad (20.11, а)$$

$$\hat{Q}_{\omega'\omega} = \Theta(\omega') \delta_{\omega'\omega}, \quad \hat{Q}_{-\omega'\omega} = \Theta(-\omega') \delta_{\omega'\omega}. \quad (20.11, б)$$

Из (20.8) следует, что уравнение (20.1 а) можно представить как

$$\Phi(\hat{z}_\omega) S_x(\omega') = Q(\hat{z}_\omega) S_y(\omega'), \quad (20.12)$$

где операторы $\Phi(\hat{z}_t)$ и $Q(\hat{z}_t)$ в собственном представлении оператора сдвига выражаются через свои ядра (20.11)

$$\Phi(\hat{z}_\omega) = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{\Phi}_{\omega'\omega}, \quad Q(\hat{z}_\omega) = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{Q}_{\omega'\omega}. \quad (20.13)$$

Следовательно, вид операторных уравнений (20.1, а) и (20.12) не зависит от используемого представления.

Используя представления операторов (20.11, а) и (20.11, б), после суммирования в левой и правой частях уравнения (20.12) по частотам ω' , уравнение (20.12) описывается выражением

$$\Psi(\omega) S_x(\omega) = \Theta(\omega) S_y(\omega). \quad (20.14)$$

Уравнение (20.14) можно записать через передаточную функцию системы

$$H(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{S_y(\omega)} = \frac{\Theta(\omega)}{\Psi(\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega nT}}{\sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega iT}}.$$

20.3 Операторный анализ преобразования корреляционной функции в линейной системе

Покажем, что вид уравнений преобразования корреляционных и моментных функций также не зависит от используемого представления. Перемножив правые и левые части уравнений (20.1, а) и уравнения

$$\Phi(\hat{z}_t)x[t-i] = Q(\hat{z}_t)y[t-i],$$

а затем, усреднив, получим

$$\Phi(\hat{z}_t^{-1})\Phi(\hat{z}_t)R_x[i] = Q(\hat{z}_t^{-1})Q(\hat{z}_t)R_y[i]. \quad (20.15)$$

Здесь оператор $\hat{z}_t^{-1}$ появился после вычитания временных индексов у корреляционных функций $t - (t-i) = i$. Тогда оператор сдвига назад, действующий на выражение в скобке, после вычитания действует на индекс i как оператор сдвига вперед. Операторное уравнение (20.15) описывает преобразование корреляционной функции стационарного процесса линейной системой.

Используя представление корреляционной функции в базисе собственной функции $e^{-j\omega t}$ оператора сдвига, уравнение (20.15) представим в виде

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} P_x(\omega)\Phi(\hat{z}_t^{-1})\Phi(\hat{z}_t)e^{j\omega t} = \sum_{\omega=0}^{\infty} P_y(\omega)Q(\hat{z}_t^{-1})Q(\hat{z}_t)e^{j\omega t}. \quad (20.16)$$

Можно доказать, что

$$\Phi(\hat{z}_t)e^{j\omega t} = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{\Phi}_{\omega\omega'}e^{j\omega't}, \quad Q(\hat{z}_t)e^{j\omega t} = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{Q}_{\omega\omega'}e^{j\omega't}. \quad (20.17)$$

Для этого левые и правые части выражений (20.17) необходимо умножить на $e^{-j\omega t}$, а затем просуммировать по t , и выполнить несложные преобразования. В результате этих операций получают уже ранее соотношения (20.9).

Учитывая (20.17), уравнение (20.16) преобразуется к виду

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{\omega'=0}^{\infty} P_x(\omega)\hat{\Phi}_{\omega\omega'}\Phi(\hat{z}_t^{-1})e^{j\omega't} = \sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{\omega'=0}^{\infty} P_y(\omega)\hat{Q}_{\omega\omega'}Q(\hat{z}_t^{-1})e^{j\omega't}. \quad (20.18)$$

Применяя выражения, аналогичные (20.17) для операторов $\Phi(\hat{z}_t^{-1})$ и $Q(\hat{z}_t^{-1})$, и учитывая (20.10), уравнение (20.18) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{\omega'=0}^{\infty} \sum_{\omega''=0}^{\infty} P_x(\omega) \hat{\Phi}_{\omega\omega'} \hat{\Phi}_{-\omega'\omega''} e^{j\omega''t} = \\ = \sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{\omega'=0}^{\infty} \sum_{\omega''=0}^{\infty} P_y(\omega) \hat{Q}_{\omega\omega'} \hat{Q}_{-\omega'\omega''} e^{j\omega''t}. \end{aligned} \quad (20.19)$$

Уравнение (20.19) легко привести к операторному виду, аналогичному (20.12). Для этого умножим левую и правую части уравнения (20.19) на $e^{-j\omega t}$ и просуммируем по t . После преобразований и замены переменных получим

$$\sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{\omega'=0}^{\infty} P_x(\omega) \hat{\Phi}_{\omega\omega'} \hat{\Phi}_{-\omega'\omega''} = \sum_{\omega=0}^{\infty} \sum_{\omega'=0}^{\infty} P_y(\omega) \hat{Q}_{\omega\omega'} \hat{Q}_{-\omega'\omega''}.$$

Окончательно это выражение можно представить в виде

$$\Phi(\hat{z}_{-\omega''}) \Phi(\hat{z}_{\omega'}) P_x(\omega) = Q(\hat{z}_{-\omega''}) Q(\hat{z}_{\omega'}) P_y(\omega), \quad (20.20)$$

где операторы $\Phi(\hat{z}_t)$ и $Q(\hat{z}_t)$ в собственном представлении оператора сдвига выражаются через свои ядра соотношениями типа (20.13), а операторы $\Phi(\hat{z}_t^{-1})$ и $Q(\hat{z}_t^{-1})$ выражаются через свои ядра с помощью выражений

$$\Phi(\hat{z}_{-\omega}) = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{\Phi}_{-\omega'\omega}, \quad Q(\hat{z}_{-\omega}) = \sum_{\omega'=0}^{\infty} \hat{Q}_{-\omega'\omega}.$$

Таким образом, уравнение (20.20) в представлении собственных функций оператора сдвига аналогично уравнению (20.15).

Учитывая соотношения (20.11) для ядер операторов $\Phi(\hat{z}_t)$, $Q(\hat{z}_t)$ и $\Phi(\hat{z}_t^{-1})$, $Q(\hat{z}_t^{-1})$ в представлении собственных функций, можно выразить уравнение (20.19) через собственные значения и символы Кронекера. Для дальнейших преобразований уравнения (20.19) необходимо его левую и правую части умножить на $e^{-j\omega t}$, а затем просуммировать по t и выполнить несложные преобразования.

В результате уравнение (20.19) принимает вид

$$\sum_{\omega'=0}^{\infty} P_x(\omega')\Psi(\omega')\Psi(-\omega')\delta_{\omega\omega'} = \sum_{\omega'=0}^{\infty} P_y(\omega')\Theta(\omega')\Theta(-\omega')\delta_{\omega\omega'}.$$

Суммируя по ω' , уравнение преобразования СПМ линейной системой можно представить в виде, аналогичном (20.14)

$$\Psi(\omega)\Psi(-\omega)P_x(\omega) = \Theta(\omega)\Theta(-\omega)P_y(\omega). \quad (20.21)$$

Сравнивая уравнения (20.1, а) и (20.14), а также уравнения (20.15) и (20.21) можно сделать вывод, что вид уравнений для корреляционной функции и соответствующего спектра не зависит от их представления во временной или частотной области.

В теории операторов наборы собственных значений операторов называются его спектром. Как будет показано ниже, спектры операторов $\Phi(\hat{z}_t)$, $Q(\hat{z}_t)$ позволяют легко определить спектры процессов линейного предсказания всех порядков.

Таким образом, используя свойства операторов, описывающих дискретную линейную систему, можно легко переходить от преобразования сигналов и их корреляционных функций к преобразованию спектров сигналов и СПМ в этих системах. С помощью этого метода будут получены уравнения для преобразования спектральных плотностей любого порядка в линейных системах, а также выражения для параметрических оценок спектров высших порядков.

Обычное применение операторов для описания линейных систем, например, в [5], ограничивается скорее удобством краткой записи уравнений. Это же утверждение можно отнести и к использованию операторов линейного предсказания [6]. Вместе с тем, теория операторов с развитым математическим аппаратом лежит в основе построения некоторых научных теорий, например, квантовой механики. Поэтому представляется естественным применение для описания линейных систем в статистической радиотехнике таких понятий, как собственные функции и собственные числа линейных операторов, элементов теории представлений операторов [7]. Такой подход позволяет не только по-новому взглянуть на такие методы анализа случайных процессов, как преобразование Фурье, спектральный анализ, но и получить наглядным образом некоторые более общие уравнения и выражения статистической радиотехники.

20.4 Операторный анализ преобразования негауссова белого шума в дискретных линейных системах

Рассмотрим линейную систему, описываемую моделью АРСС, на вход которой подается белый шум $a[t]$. В этом случае уравнение преобразования белого шума совпадает с (20.7, а) при $y[t] = a[t]$, а операторы $\Phi(\hat{z}_t)$ и $Q(\hat{z}_t)$, имеющие вид (20.2), являются операторами АР и СС соответственно. Как следует из (20.15), в операторном виде преобразование корреляционной функции стационарного негауссова белого шума линейной системой, описываемой уравнением типа (20.1, а), можно представить следующим образом:

$$\Phi(\hat{z}_t^{-1})\Phi(\hat{z}_t)R_x[i] = Q(\hat{z}_t^{-1})Q(\hat{z}_t)R_a[i],$$

где $R_x[i]$, $R_a[i]$ — корреляционные функции процесса АРСС и негауссова белого шума соответственно. Уравнение (20.9) в частотном представлении, согласно (20.20), имеет вид

$$\Phi(\hat{z}_{-\omega''})\Phi(\hat{z}_{\omega'})P_x(\omega) = Q(\hat{z}_{-\omega''})Q(\hat{z}_{\omega'})P_a(\omega).$$

В терминах собственных значений операторов АР и СС это уравнение приводится к виду

$$\Psi(-\omega)\Psi(\omega)P_x(\omega) = \Theta(-\omega)\Theta(\omega)P_a(\omega).$$

Из него можно получить уравнение преобразования СПМ белого шума в линейной системе, используя собственные значения операторов (20.4, а) и (20.4, б)

$$\left| \sum_{i=0}^p \Phi[i]e^{-j\omega iT} \right|^2 P_x(\omega) = \left| \sum_{n=0}^q Q[n]e^{-j\omega nT} \right|^2 P_a(\omega).$$

Это уравнение по существу является выражением для квадрата амплитудной частотной характеристики линейной системы

$$|H(\omega)|^2 = \frac{P_x(\omega)}{P_a(\omega)} = \frac{\left| \sum_{n=0}^q Q[n]e^{-j\omega nT} \right|^2}{\left| \sum_{i=0}^p \Phi[i]e^{-j\omega iT} \right|^2}. \quad (20.22)$$

Учитывая, что для белого шума $P_a(\omega) = D_a$, из (20.22) получим известное выражение для параметрической оценки СПМ модели АРСС [6]

$$P_x(\omega) = D_a \frac{\left| \sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega nT} \right|^2}{\left| \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega iT} \right|^2}.$$

Таким образом, использование элементов теории линейных операторов позволяет легко прийти к выражениям для параметрической спектральной оценки. Они интерпретируются как уравнения преобразования корреляционной функции белого шума линейной системой в представлении собственных функций оператора сдвига.

20.5 Параметрические оценки спектра третьего порядка

Как это было сделано для корреляционных функций, можно показать, что разностное уравнение для моментных функций третьего порядка случайного стационарного процесса определяется следующим уравнением

$$\Phi(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) \Phi(\hat{z}_2) \Phi(\hat{z}_1) m_{3x}[i, i-k] = Q(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) Q(\hat{z}_2) Q(\hat{z}_1) m_{3a}[i, i-k], \quad (20.23)$$

где операторы сдвига во временном представлении $\hat{z}_1$ и $\hat{z}_2$ действуют соответственно на первый i и второй $i-k$ индексы моментных функций третьего порядка $m_{3x}[i, i-k]$ процесса и белого шума $m_{3a}[i, i-k]$. Найдем вид уравнения (20.23) в представлении собственных функций оператора сдвига. Для этого выразим моментные функции процесса $m_{3x}[t_1, t_2]$ и белого шума $m_{3a}[t_1, t_2]$, где $t_1 = i$, $t_2 = i-k$, через обратное преобразование Фурье от спектров третьего порядка

$$m_{3x}[t_1, t_2] = \sum_{\omega_1, \omega_2=0}^{\infty} P_{3x}(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}, \quad (20.24)$$

$$m_{3a}[t_1, t_2] = \sum_{\omega_1, \omega_2=0}^{\infty} m_{3a}(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}.$$

где $P_{3x}(\omega_1, \omega_2)$ и $m_{3a}(\omega_1, \omega_2) = m_{3a}$ – спектральные плотности третьего порядка негауссова случайного процесса и негауссова белого шума соответственно.

Подставляя (20.24) в (20.23), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_1, \omega_2=0}^{\infty} P_{3x}(\omega_1, \omega_2) \Phi(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) \Phi(\hat{z}_2) \Phi(\hat{z}_1) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2} = \\ = \sum_{\omega_1, \omega_2=0}^{\infty} m_{3a}(\omega_1, \omega_2) Q(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) Q(\hat{z}_2) Q(\hat{z}_1) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}. \end{aligned} \quad (20.25)$$

Действие операторов $\Phi(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1})$ и $Q(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1})$ на двумерную собственную функцию $e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}$ можно представить в виде, аналогичном (20.17)

$$\Phi(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2} = \sum_{\omega'_1, \omega'_2=0}^{\infty} \hat{\Phi}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2} e^{j\omega'_1 t_1} e^{j\omega'_2 t_2}, \quad (20.26, a)$$

$$Q(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2} = \sum_{\omega'_1, \omega'_2=0}^{\infty} \hat{Q}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2} e^{j\omega'_1 t_1} e^{j\omega'_2 t_2}, \quad (20.26, б)$$

где $\hat{\Phi}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2}$ и $\hat{Q}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2}$ – ядра операторов $\Phi(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1})$ и $Q(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1})$.

Выражения для ядер можно найти, если умножить (20.26, а) на $e^{-j\omega'_1 t_1} e^{-j\omega'_2 t_2}$ и просуммировать по t_1 и t_2

$$\hat{\Phi}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2} = \sum_{t_1, t_2=0}^{\infty} e^{-j\omega'_1 t_1} e^{-j\omega'_2 t_2} \Phi(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2},$$

$$\hat{Q}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2} = \sum_{t_1, t_2=0}^{\infty} e^{-j\omega'_1 t_1} e^{-j\omega'_2 t_2} Q(\hat{z}_2^{-1} \hat{z}_1^{-1}) e^{j\omega_1 t_1} e^{j\omega_2 t_2}.$$

Используя (20.17) и (20.26), уравнение (20.25) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2, \omega''_1, \omega''_2=0}^{\infty} P_{3x}(\omega_1, \omega_2) \times \hat{\Phi}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2} \hat{\Phi}_{\omega_1 \omega'_1} \hat{\Phi}_{\omega_2 \omega'_2} e^{j\omega''_1 t_1} e^{j\omega''_2 t_2} = \\ = \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2, \omega''_1, \omega''_2=0}^{\infty} m_{3a}(\omega_1, \omega_2) \times \hat{Q}_{\omega_1 \omega_2 \omega'_1 \omega'_2} \hat{Q}_{\omega_1 \omega'_1} \hat{Q}_{\omega_2 \omega'_2} e^{j\omega''_1 t_1} e^{j\omega''_2 t_2}. \end{aligned} \quad (20.27)$$

Уравнение (20.27) легко представить в операторном виде аналогичном (20.20). Для этого умножим левую и правую части уравнения (20.27)

на $e^{-j\omega_1''t_1}e^{-j\omega_2''t_2}$ и просуммируем по t_1 и t_2 . После преобразований и замены переменных получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_1', \omega_2'=0}^{\infty} P_{3x}(\omega_1, \omega_2) \hat{\Phi}_{\omega_1\omega_2\omega_1''\omega_2''} \hat{\Phi}_{\omega_1\omega_1'} \hat{\Phi}_{\omega_2\omega_2'} = \\ & = \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_1', \omega_2'=0}^{\infty} m_{3a}(\omega_1, \omega_2) \hat{Q}_{\omega_1\omega_2\omega_1''\omega_2''} \hat{Q}_{\omega_1\omega_1'} \hat{Q}_{\omega_2\omega_2'}. \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать в операторной форме

$$\begin{aligned} & \Phi(\hat{z}_{-\omega_2''}^{-1} \hat{z}_{-\omega_1''}^{-1}) \Phi(\hat{z}_{\omega_2'}) \Phi(\hat{z}_{\omega_1'}) P_{3x}(\omega_1, \omega_2) = \\ & = Q(\hat{z}_{-\omega_2''}^{-1} \hat{z}_{-\omega_1''}^{-1}) Q(\hat{z}_{\omega_2'}) Q(\hat{z}_{\omega_1'}) m_{3a}(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

где операторы ОАР и ОСС в представлении собственных функций оператора сдвига выражаются через свои ядра согласно (20.13), а также

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\hat{z}_{-\omega_2''}^{-1} \hat{z}_{-\omega_1''}^{-1}) &= \sum_{\omega_1'', \omega_2''=0}^{\infty} \hat{\Phi}_{\omega_1\omega_2\omega_1''\omega_2''}, \\ \hat{Q}(\hat{z}_{-\omega_2''}^{-1} \hat{z}_{-\omega_1''}^{-1}) &= \sum_{\omega_1'', \omega_2''=0}^{\infty} \hat{Q}_{\omega_1\omega_2\omega_1''\omega_2''}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (20.5) и (20.16) для собственных значений операторов, уравнение (20.27) можно представить в виде

$$\Psi(-\omega_2 - \omega_1) \Psi(\omega_2) \Psi(\omega_1) P_{3x}(\omega_1, \omega_2) = \Theta(-\omega_2 - \omega_1) \Theta(\omega_2) \Theta(\omega_1) m_{3a}(\omega_1, \omega_2).$$

Подставляя в это уравнение значения $\Psi(\omega)$ и $\Theta(\omega)$ в явном виде, приходим к выражению для параметрической оценки спектральной плотности третьего порядка

$$P_{3x}(\omega_1, \omega_2) = m_{3a} \frac{\sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega_1 n T} \sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega_2 n T} \sum_{n=0}^q Q[n] e^{j(\omega_1 + \omega_2) n T}}{\sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega_1 i T} \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega_2 i T} \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{j(\omega_1 + \omega_2) i T}}, \quad (20.28)$$

где $m_{3a}(\omega_1, \omega_2) = m_{3a}$.

Выражение для оценки спектральной плотности третьего порядка случайного процесса ОАРСС можно упростить, если рассматривать сечение $\omega_2 = 0$. Тогда из (20.28) получим действительную параметрическую оценку спектра третьего порядка для стационарного негауссова случайного процесса $x[t]$

$$P_{3x}(\omega) = Km_{3a} \frac{\left| \sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega nT} \right|^2}{\left| \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega iT} \right|^2}, \quad K = \frac{\sum_{n=0}^q Q[n]}{\sum_{i=0}^p \Phi[i]}. \quad (20.29)$$

Таким образом, операторные уравнения и их представления в частотной области позволяют получить выражения для параметрических спектральных оценок третьего порядка негауссовых процессов.

20.6 Параметрические оценки спектра произвольного порядка

Полученные выше выражения позволяют довольно просто получать формулы для параметрических спектральных оценок высших порядков. Для произвольного порядка r операторное уравнение преобразования моментной функции линейной системой, описываемой моделью ОАРСС, имеет вид

$$\begin{aligned} & \Phi(\hat{z}_1^{-1} \hat{z}_2^{-1} \dots \hat{z}_{r-1}^{-1}) \Phi(\hat{z}_1) \Phi(\hat{z}_2) \dots \Phi(\hat{z}_{r-1}) m_{rx}[i, i-j, \dots, i-l] = \\ & = Q(\hat{z}_1^{-1} \hat{z}_2^{-1} \dots \hat{z}_{r-1}^{-1}) Q(\hat{z}_1) Q(\hat{z}_2) \dots Q(\hat{z}_{r-1}) m_{ra}[i, i-j, \dots, i-l]. \end{aligned}$$

В собственном представлении операторов $\hat{\Phi}(\hat{z}_t)$ и $\hat{Q}(\hat{z}_t)$ это уравнение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \Psi(-\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{r-1}) \Psi(\omega_1) \Psi(\omega_2) \dots \Psi(\omega_{r-1}) P_{rx}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1}) = \\ & = \Theta(-\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{r-1}) \Theta(\omega_1) \Theta(\omega_2) \dots \Theta(\omega_{r-1}) m_{ra}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1}). \end{aligned}$$

Выражение для параметрической спектральной оценки высшего порядка принимает вид

$$P_{rx}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1}) = \quad (20.30)$$

$$= m_{ra} \frac{\sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega_1 nT}}{\sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega_1 iT}} \cdot \frac{\sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega_2 nT} \dots \sum_{n=0}^q Q[n] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})nT}}{\sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega_2 iT} \dots \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})iT}}.$$

Если использовать сечение $\omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_{r-1} = 0$, то получим выражение, аналогичное (20.29)

$$P_{rx}(\omega) = Km_{ra} \frac{\left| \sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega nT} \right|^2}{\left| \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega iT} \right|^2}, \quad K = \left(\frac{\sum_{n=0}^q Q[n]}{\sum_{i=0}^p \Phi[i]} \right)^{r-2}.$$

Параметрические спектральные оценки высших порядков для моделей ОАР и ОСС можно получить из (20.30). Для модели ОАР выражение принимает вид

$$P_{rx}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1}) = \quad (20.31)$$

$$= m_{ra} \frac{1}{\sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega_1 iT} \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega_2 iT} \dots \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})iT}}.$$

Тогда сечение ОАР оценки спектра при $\omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_{r-1} = 0$ описывается выражением

$$P_{rx}(\omega) = \frac{Km_{ra}}{\left| \sum_{i=0}^p \Phi[i] e^{-j\omega iT} \right|^2}, \quad K = \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^p \Phi[i] \right)^{r-2}}.$$

Аналогично получается выражение параметрической спектральной оценки высших порядков для моделей ОСС. Из (20.30) следует

$$\begin{aligned}
P_{rx}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1}) = \\
= m_{ra} \sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega_1 nT} \sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega_2 nT} \dots \sum_{n=0}^q Q[n] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1})nT}.
\end{aligned}
\tag{20.32}$$

Для сечения $\omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_{r-1} = 0$ оценки спектра (20.31) получаем

$$P_{rx}(\omega_1) = Km_{ra} \left| \sum_{n=0}^q Q[n] e^{-j\omega_1 nT} \right|^2, \quad K = \left(\sum_{n=0}^q Q[n] \right)^{r-2}.$$

Как правило, наибольший интерес представляют оценки спектров второго, третьего и четвертого порядков. Оценки параметров, используемых в спектральных оценках, получают на основе обобщенных моделей линейного предсказания высших рангов.

Использование элементов теории операторов дает более глубокое понимание линейного предсказания, а также позволило получить основные соотношения для классических моделей и естественным образом прийти к обобщенным моделям линейного предсказания. Показано, что комплексная экспонента является собственной функцией оператора сдвига и операторов линейного предсказания. Собственными значениями оператора сдвига является функция сдвига фазы, что также следует из теории сигналов. Собственными значениями операторов линейного предсказания являются передаточные функции в частотной области линейных систем. Разностному уравнению во временной области соответствует эквивалентное в частотной области выражение для преобразования спектра белого шума линейной системой. Показано, что операторные уравнения для преобразования корреляционной и моментной функции третьего порядка линейной системой во временной области дают выражения для преобразования спектров второго и высших порядков. Эти выражения применяются для параметрической оценки СПМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В.А. Параметрические оценки спектров высших порядков негауссовых статистически связанных процессов // Радиоэлектроника. – 2005. – №11. – С.27–39. (Изв. вузов).
2. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. (Метод пространства состояний). – М.: Наука, 1970. – 704 с.
3. Омельченко В.А. Вероятностные и детерминистские модели сигналов в электросвязи: Учеб. пособие. – К.: УМК ВО, 1991. – 184 с.
4. Рыбалко А.М. Специальные главы математики для инженеров. – Харьков: 2002. – 141 с.
5. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.
6. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
7. Френкс Л. Теория сигналов. – М.: Сов. радио, 1969. – 344 с.

21 СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

21.1 Введение

Применение параметрической оценки спектров дает во многих случаях преимущества по сравнению с использованием коррелограммного или периодограммного методов оценок СПМ. Это, прежде всего, связано с высоким спектральным разрешением при коротких реализациях, отсутствием боковых лепестков в спектре. Спектральные отсчеты вычисляются по аналитическим выражениям, что позволяет проводить их математическое преобразование и анализ этих выражений. Важно, что параметрические спектры зависят только от небольшого числа параметров модели. Вследствие этого упрощается решение ряда задач с применением спектрального анализа, например, распознавание случайных процессов по спектру. Точность параметрического спектрального анализа зависит от точности модели линейного предсказания анализируемого случайного процесса.

При решении ряда прикладных задач для анализа негауссовых процессов необходимо использовать спектры высших порядков. Негауссов случайный процесс полностью описывается набором спектров всех порядков, оценки которых получают либо периодограммным методом, либо преобразованием Фурье от моментных или кумулянтных функций. Оценкам спектров высших порядков присущи те же недостатки, что и оценкам СПМ, полученным коррелограммным или периодограммным методами.

Как показано в предыдущих разделах, параметры моделей линейного предсказания могут вычисляться либо по корреляционным функциям, либо по моментным или кумулянтным функциям. В связи с этим представляют интерес выражения для параметрических оценок спектров по моделям ОАР, ОСС и ОАРСС. Ниже будут получены формулы параметрической оценки спектров высших порядков на основе обобщенных моделей линейного предсказания произвольного ранга. При выводе этих формул использовались свойства преобразования моментных функций белого шума и их спектров при его прохождении через линейные цепи, описываемые моделями ОАР, ОСС и ОАРСС. Найденные выражения совпадают с выражениями параметрических оценок спектров, полученными выше на основе операторного анализа линейных систем. Параметрические оценки спектров высших порядков описываются комплексными многомерными функциями. Во многих случаях оказываются полезными сечения параметрических спектров высших порядков, которые действительно, положительны и зависят от одной частоты.

Для моделирования негауссовых случайных процессов найдены соотношения, связывающие коэффициенты ОАР и характеристики спектров, такие как частоты пиков и их ширины полос по уровню 0.5.

Показано, что с помощью формирующего авторегрессионного фильтра можно получить негауссовы процессы с заданной формой спектра.

21.2 Оценивание спектров высших порядков на основе обобщенной модели авторегрессии-скользящего среднего

Одним из важнейших примеров практического использования моделей линейного предсказания является параметрическое спектральное оценивание случайных процессов. Параметры, входящие в формулы для спектральных оценок, получают из соответствующих систем уравнений по оценкам корреляционной функции. Обобщенные модели линейного предсказания также можно использовать для получения параметрических спектральных оценок высших порядков. Коэффициенты обобщенных моделей линейного предсказания рассчитывают с помощью представленных во втором разделе систем уравнений по соответствующим моментным или кумулянтным функциям.

Получим выражения для обобщенных параметрических оценок спектра негауссова случайного процесса $x[t]$, формируемого линейной системой, описываемой уравнением

$$\sum_{k=0}^p \Phi[k]x[t-k] = \sum_{n=0}^q Q[n]a[t-n].$$

Это уравнение описывает линейную систему ОАРСС, на вход которой поступает $a[t]$. Передаточная функция такой системы имеет вид

$$H(z) = \frac{\sum_{n=0}^q Q[n]z^{-n}}{\sum_{k=0}^p \Phi[k]z^{-k}}. \quad (21.1)$$

Чтобы получить рациональную частотную характеристику линейного фильтра, описываемого моделью ОАРСС, сделаем замену в (21.1) $z = e^{j\omega T}$ [1]

$$H(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^q Q[n]e^{-j\omega Tn}}{\sum_{k=0}^p \Phi[k]e^{-j\omega Tk}}. \quad (21.2)$$

Для спектра произвольного порядка формула, связывающая спектры высших порядков выходного $\tilde{m}_{xr}(0, \omega_2, \dots, \omega_r)$ и входного $\tilde{m}_{ar}(0, \omega_2, \dots, \omega_r)$ процессов, имеет вид [2]

$$\tilde{m}_{xr}(0, \omega_2, \dots, \omega_r) = \tilde{m}_{ar}(0, \omega_2, \dots, \omega_r) H(\omega_2) \dots H(\omega_r) H(-\omega_2 - \dots - \omega_r).$$

Если входным процессом линейной системы с передаточной функцией (21.1) является белый шум, эта формула дает

$$\tilde{m}_{xr}(0, \omega_2, \dots, \omega_r) = m_{ar} H(\omega_2) \dots H(\omega_r) H(-\omega_2 - \dots - \omega_r), \quad (21.3)$$

где m_{ar} – момент r -го порядка порождающего негауссова белого шума. Используя (21.2), из (21.3) получаем выражение для обобщенных параметрических спектральных оценок [3]

$$P_r(0, \omega_2, \dots, \omega_r) = m_{ar} \times \quad (21.4)$$

$$\times \frac{\sum_{i=0}^q Q[i] e^{-j\omega_2 Ti} \sum_{i=0}^q Q[i] e^{-j\omega_3 Ti} \dots \sum_{i=0}^q Q[i] e^{j(\omega_2 + \dots + \omega_r) Ti}}{\sum_{k=0}^p \Phi[k] e^{-j\omega_2 Tk} \sum_{k=0}^p \Phi[k] e^{-j\omega_3 Tk} \dots \sum_{k=0}^p \Phi[k] e^{j(\omega_2 + \dots + \omega_r) Tk}}.$$

Таким образом, комплексная параметрическая спектральная плотность r -го порядка процесса ОАРСС определяется моментами r -го порядка порождающего негауссова белого шума, умноженного на дробно-рациональную частотную характеристику r -го порядка. Оценки коэффициентов $\Phi[k]$ и $Q[i]$ обобщенных моделей r -го ранга получают для выбранного набора сдвигов g_j , $j = 1, 2, \dots, r - 2$ моментной функции r -го порядка.

Используя выражение (21.4), можно найти формулы для параметрических спектральных оценок произвольного порядка. Так, известная формула для параметрической спектральной оценки второго порядка модели АРСС может быть получена из (21.4) при $r = 2$

$$P_2(\omega) = D_a \frac{\sum_{i=0}^q Q_2[i] e^{-j\omega Ti} \sum_{i=0}^q Q_2[i] e^{j\omega Ti}}{\sum_{k=0}^p \Phi_2[k] e^{-j\omega Tk} \sum_{k=0}^p \Phi_2[k] e^{j\omega Tk}} = D_a \frac{\left| \sum_{i=0}^q Q_2[i] e^{-j\omega Ti} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p \Phi_2[k] e^{-j\omega Tk} \right|^2}.$$

Аналогичным образом получается выражение для параметрической спектральной плотности ОАРСС третьего порядка при $r = 3$

$$P_3(\omega_1, \omega_2) = m_{3a}^g \frac{\sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{-j\omega_1 Ti} \sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{-j\omega_2 Ti} \sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{j(\omega_1 + \omega_2) Ti}}{\sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{-j\omega_1 Tk} \sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{-j\omega_2 Tk} \sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{j(\omega_1 + \omega_2) Tk}}. \quad (21.5, a)$$

Часто вместо двумерной спектральной плотности $P_3(\omega_1, \omega_2)$ удобнее пользоваться одномерной $P_3(\omega_1, 0) = P_3(\omega)$. Тогда выражение (21.5) упрощается

$$P_3(\omega) = m_{3a}^g K_3 \frac{\left| \sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{-j\omega Ti} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{-j\omega Tk} \right|^2}, \quad (21.5, б)$$

где постоянная K_3 равна

$$K_3 = \frac{\sum_{i=0}^q Q_3^g[i]}{\sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k]}.$$

Если полагать одну из частот постоянной величиной, то можно двумерный спектр исследовать с помощью набора одномерных спектров.

Выражение для спектральной плотности четвертого порядка модели ОАРСС четвертого ранга имеет вид

$$P_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = m_{4a}^{g_1, g_2} \times$$

$$\times \frac{\sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2}[i] e^{-j\omega_1 Ti} \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2}[i] e^{-j\omega_2 Ti} \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2}[i] e^{-j\omega_3 Ti}}{\sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{-j\omega_1 Tk} \sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{-j\omega_2 Tk} \sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{-j\omega_3 Tk}} \times$$

$$\times \frac{\sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2}[i] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) Ti}}{\sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) Tk}}. \quad (21.6)$$

Для анализа спектральной плотности четвертого порядка можно также применять одномерные спектры. В таком случае достаточно воспользоваться выражением, следующим из (21.6) при $\omega_2 = \omega_3 = 0$

$$P_4(\omega) = m_{4a}^{g_1, g_2} K_4 \frac{\left| \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i] e^{-j\omega T i} \right|^2}{\left| \sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2} [k] e^{-j\omega T k} \right|^2},$$

где постоянная K_4 равна

$$K_4 = \left(\frac{\sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i]}{\sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2} [k]} \right)^2.$$

Спектры высших порядков модели ОАРСС описывают негауссовы случайные процессы со смешанным спектром, которые содержат узкополосные и широкополосные составляющие. Выбор порядка спектра зависит от негауссовых характеристик случайного процесса. В зависимости от свойств негауссовых процессов одномерные спектры высших порядков могут иметь близкое сходство со спектрами второго порядка. В ряде случаев они имеют заметные отличия. Исходя из условий решаемой задачи, можно исследовать различные варианты обобщенных моделей ОАРСС, выбирать сдвиги g_l , определять соответствующие порядки моделей. Достоинства обобщенных параметрических спектральных оценок по сравнению с моментными и кумулянтными спектрами высших порядков такие же, как и у параметрических спектральных оценок второго порядка [4].

21.3 Спектры высших порядков обобщенной модели авторегрессии

Авторегрессионные спектральные оценки высших порядков рационально использовать в тех случаях, когда спектры высших порядков состоят из узкополосных составляющих. В таких случаях моментные функции имеют значительную длину.

Приведем выражения для спектров ОАР, которые можно получить из общего соотношения (21.5). ОАР спектр третьего порядка определяется знаменателем выражения (21.5)

$$P_3(\omega_1, \omega_2) = \frac{m_{3a}^g}{\sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{-j\omega_1 T k} \sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{-j\omega_2 T k} \sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{j(\omega_1 + \omega_2) T k}}. \quad (21.7)$$

При использовании одномерного спектра третьего порядка он рассчитывается по формуле, следующей из (21.7) при $\omega_2 = 0$

$$P_3(\omega) = \frac{m_{3a}^g K_3}{\left| \sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k] e^{-j\omega T k} \right|^2}, \quad (21.8)$$

где постоянная K_3 равна

$$K_3 = \frac{1}{\sum_{k=0}^p \Phi_3^g[k]}.$$

Для получения выражения для спектра четвертого порядка модели ОАР можно воспользоваться формулой (21.6) для ОАРСС спектра.

Тогда в случае модели ОАР она принимает вид [5]

$$P_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{m_{4a}^{g_1, g_2}}{\sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{-j\omega_1 T k} \sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{-j\omega_2 T k} \sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{-j\omega_3 T k} \sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) T k}}. \quad (21.9)$$

Одномерный спектр можно определить из (21.9) при $\omega_2 = \omega_3 = 0$. Упростив это выражение, получим

$$P_4(\omega) = \frac{m_{4a}^{g_1, g_2} K_4}{\left| \sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] e^{-j\omega T k} \right|^2},$$

где постоянная K_4 вычисляется по формуле

$$K_4 = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^p \Phi_4^{g_1, g_2}[k] \right)^2}.$$

Параметрические оценки спектров произвольного r -го порядка модели ОАР можно получить из (21.4). Спектр r -го порядка описывается соотношением

$$P_r(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1}) = \frac{m_{ra}^{g_1, \dots, g_{r-2}}}{\sum_{k=0}^p \Phi_r^{g_1, \dots, g_{r-2}}[k] e^{-j\omega_1 T k} \sum_{k=0}^p \Phi_r^{g_1, \dots, g_{r-2}}[k] e^{-j\omega_2 T k} \dots \sum_{k=0}^p \Phi_r^{g_1, \dots, g_{r-2}}[k] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1}) T k}}.$$

В частности, при $r=2$ получаем известное выражение для параметрической АР спектральной оценки

$$P(\omega) = D_a / \left| 1 - \sum_{k=1}^p \Phi[k] e^{-j\omega T k} \right|^2. \quad (21.10)$$

Полученные соотношения будут использованы для параметрической оценки спектров высших порядков реальных негауссовых случайных процессов и имитационных моделей процессов. Одномерные спектры высших порядков применяются для анализа негауссовых процессов [2, 6]. Их полезно сравнивать с оценками СПМ. Они будут использованы при анализе спектров высших порядков негауссовых процессов, полученных с помощью линейного формирующего фильтра с негауссовым порождающим процессом типа белого шума. В этом случае одномерные спектры высших порядков с нулевыми сечениями частот близки к оценкам СПМ. Детали двумерного спектра третьего порядка лучше изучать по соответствующим сечениям этого спектра. При анализе многомерных спектров с размерностью выше двух, невозможно построить графики спектров. Поэтому использование одномерных сечений спектров, зачастую наиболее приемлемый способ анализа спектров высших порядков.

21.4 Генерация случайных процессов с заданными формами спектров

Конструктивность моделей линейного предсказания дает возможность достаточно просто синтезировать генераторы случайных процессов. Для этих целей используется метод формирующих фильтров [1]. Модели линейного предсказания описываются определенными корреляционными и моментными функциями, а также формами спектра. Если строится модель линейного предсказания случайного процесса с произвольными корреляционными и моментными функциями, то порядок модели строго не определен и модель будет лишь приближенно описывать случайный процесс. Для большинства реальных процессов можно

подобрать подходящую модель линейного предсказания и получить довольно точную параметрическую оценку спектра. С этой целью используется итеративный подход к построению моделей [1]. Согласование модели с данными проводят в три этапа. Первый этап включает идентификацию, под которой подразумевается выбор подкласса моделей с использованием данных и дополнительной информации о том, как был сгенерирован процесс. На втором этапе производится оценка, под которой подразумевается эффективное использование данных для получения выводов о параметрах модели, определяющих ее адекватность. Третий этап заключается в диагностической проверке степени согласования подогнанной модели с данными, с целью обнаружения недостатков модели и ее улучшения.

Описанные в данном подразделе методы генерации негауссовых случайных процессов, позволяют получить истинные процессы ОАР и ОСС.

Если на вход линейного фильтра предсказания подается гауссов порождающий процесс, то выходной процесс будет также гауссовым. Негауссовы случайные процессы получают в случае, когда на вход формирующих фильтров подаются негауссовы порождающие процессы. При генерации процессов линейного предсказания в качестве порождающего процесса применяется белый шум с гауссовой или негауссовой плотностью распределения. Форма спектральной плотности сгенерированного процесса определяется частотной характеристикой высшего порядка формирующего фильтра, зависящей от порядка и коэффициентов модели линейного предсказания.

В научной литературе, как правило, рассматривается задача оценки порядка и коэффициентов модели линейного предсказания по заданной выборке. В данном подразделе описаны методы расчета коэффициентов модели линейного предсказания по заданным характеристикам спектральной плотности или непосредственно по ее отсчетам. Это дает возможность получать, а затем обрабатывать случайные процессы с разными формами спектров. При генерации негауссовых случайных процессов следует учитывать эффект нормализации выходного негауссова процесса, который особенно заметен для узкополосных формирующих фильтров. Для получения узкополосных негауссовых процессов необходимо выбирать такие параметры порождающего негауссова белого шума, при которых коэффициенты асимметрии и эксцесса выхода имеют значительные величины.

Предложенные методы моделирования негауссовых процессов полезны при анализе способов обработки статистически связанных процессов, не использующих плотности распределения. К ним относятся способы, основанные на спектральном анализе, линейном предсказании, кумулянтном или моментном анализе и другие. Подбором параметров распределения негауссова порождающего процесса можно сформировать процесс линейного предсказания с заданным значением асимметрии или эксцесса. Полученные предложенными методами случайные процессы, являются истинными процессами линейного предсказания с известными порядками и коэффициентами. Поэтому при оценке потенциальных возможностей новых систем обработки по имитационным

случайным процессам исключаются многие случайные погрешности и факторы, которые возникают при обработке реальных случайных процессов.

21.5 Генерация негауссовых случайных процессов обобщенной авторегрессии с заданными спектральными характеристиками

Применение методов статистического моделирования базируется на генерации случайного процесса с заданными статистическими характеристиками [7, 8]. Конструктивные свойства модели ОАР позволяют получить случайные процессы с заданными статистическими характеристиками. В качестве таких характеристик эффективно использовать ширину полосы и частоту пиков спектральной плотности моделируемого процесса.

Генерирование негауссовых процессов с заданными статистическими характеристиками высших порядков, несомненно, более сложная задача, чем генерирование случайных процессов с заданными статистическими характеристиками второго порядка. Задача сильно упрощается, если параметрические многомерные спектры заменять их сечениями с заданными сдвигами $l, k, \dots, u$. В этом случае можно генерировать негауссовы случайные процессы с заданным сечением спектра высшего порядка. Для этих целей используется связь параметров спектра и коэффициентов ОАР, описанная в разделе 2.

Для получения дискретных процессов ОАР используется генератор, показанный на рис. 21.1. Генерация случайного процесса осуществляется с помощью порождающего негауссова случайного процесса. Порождающий процесс в виде белого шума с негауссовой функцией распределения пропускается через формирующий фильтр, параметры которого определяются соответствующей моделью ОАР.

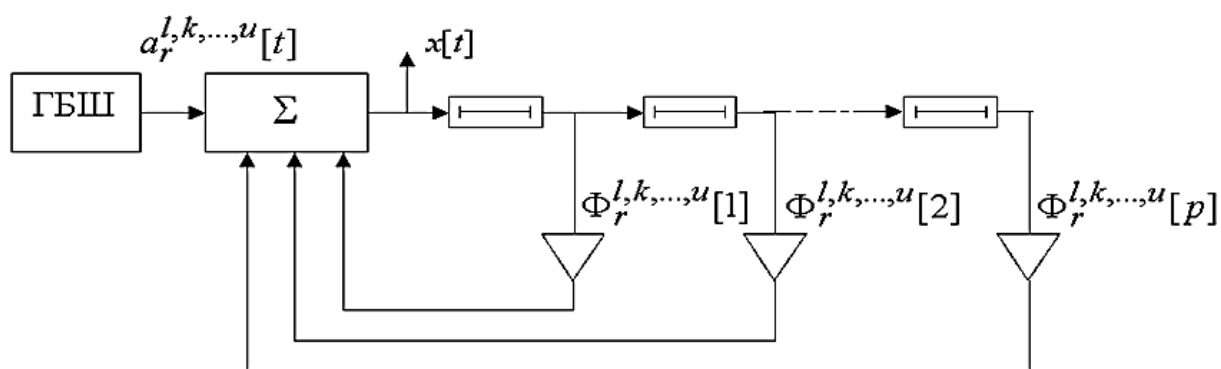


Рисунок 21.1 – Генератор дискретного процесса ОАР

Для получения стационарного случайного процесса ОАР необходимо, чтобы корни характеристического уравнения (14.36) удовлетворяли условию стационарности. При генерации процесса ОАР следует учитывать, что наличие обратной связи в формирующем фильтре приводит к появлению интервала

нестационарности генерируемого процесса. Момент времени, с которого процесс можно считать стационарным, определяется временем установления процесса.

Выражения, связывающие параметры спектральной плотности сечения спектра высшего порядка с коэффициентами ОАР совпадают с (1.19). Ниже рассмотрены некоторые примеры определения параметров генераторов ОАР процессов, когда заданы характеристики спектральной плотности, а также найдены параметрические оценки спектральной плотности моделируемых процессов. Для генерации негауссовых случайных процессов используется генератор, структурная схема которого приведена на рис. 21.1, на вход которого подается негауссов белый шум.

1. Низкочастотный случайный негауссов процесс ОАР с пиком на нулевой частоте

Получим выборку негауссова случайного процесса, спектр которого сосредоточен вблизи нулевой частоты. Низкочастотный случайный процесс с пиком на нулевой частоте и шириной полосы Δf_1 моделируется процессом ОАР первого порядка. Порождающим процессом был негауссов белый шум с гамма-распределением. При коэффициенте формы 0.4 коэффициенты асимметрии и эксцесса составляли: $\gamma_1 = 3.12$, $\gamma_2 = 12.32$. Значительные коэффициенты асимметрии и эксцесса выбирались с учетом нормализации процесса на выходе узкополосного формирующего фильтра, приводящей к заметному снижению негауссовости сгенерированного процесса. Оценки производились при длине выборки 500 отсчетов. Для нахождения коэффициентов модели ОАР первого порядка по заданной ширине полосы воспользуемся полученными ранее соотношениями (1.19). Подставляя (1.20, а) в (1.19), получаем формулу для расчета теоретического коэффициента ОАР (1)

$$\Phi_3^I[1] = \exp(-\pi \Delta f_1 T).$$

Здесь и в дальнейшем частота дискретизации выражается в относительных единицах $F = 1/T$, где $T = 0.01$. Рассчитанные теоретические значения коэффициентов ОАР(1) для $\Delta f_1 = 5$ и $\Delta f_1 = 10$ составляли соответственно $\Phi_3^I[1] = 0.8546$ и $\Phi_3^I[1] = 0.7304$. Первый сгенерированный негауссов процесс для $\Delta f_1 = 5$ имел выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса $\gamma_1 = 1.18$ и $\gamma_2 = 1.65$. Уменьшение коэффициентов асимметрии и эксцесса связано с нормализацией случайного процесса, проходящего через узкополосный формирующий фильтр.

На рис. 21.2 показаны параметрические теоретический и выборочный спектры низкочастотного случайного процесса для $\Delta f_1 = 5$. Для получения выборочной оценки спектра использовалась модель ОАР третьего ранга. Сечение спектра рассчитывалось по выражению (21.8), полученному с использованием выражения (21.7) при $\omega_2 = 0$. Постоянные коэффициенты K_3

и третий начальный момент сокращаются при нормировке спектра. Как видно из графиков, показанных на рис. 21.2, спектральная плотность модели ОАР характеризуют низкочастотные случайные процессы с пиками на нулевой частоте и заданными ширинами полос.

Второй сгенерированный негауссов процесс с большей шириной полосы $\Delta f_1 = 10$ имел выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса $\gamma_1 = 1.57$ и $\gamma_2 = 3.13$. Рост коэффициентов асимметрии и эксцесса, по сравнению с первым процессом, связан с увеличением ширины полосы второго формирующего фильтра. На рис. 21.3 показана параметрическая выборочная оценка спектральной плотности, полученная по модели ОАР(1) третьего ранга для заданной ширины полосы $\Delta f_1 = 10$. Для сравнения на этом же графике показан теоретический спектр. Выборочные оценки спектров, представленных на рис. 21.2 и 21.3 получены по моделям ОАР(1) третьего ранга для сдвига $l = 1$.

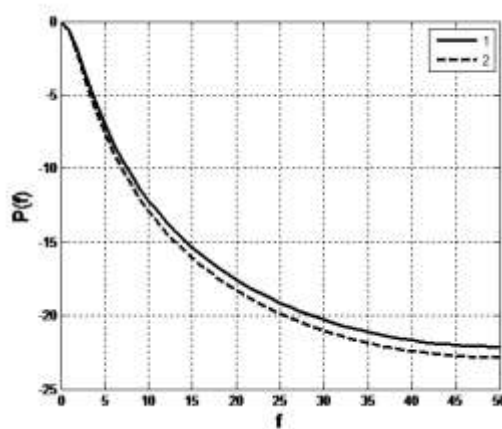


Рисунок 21.2 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности по модели ОАР(1) третьего ранга для $\Delta f_1 = 5$.

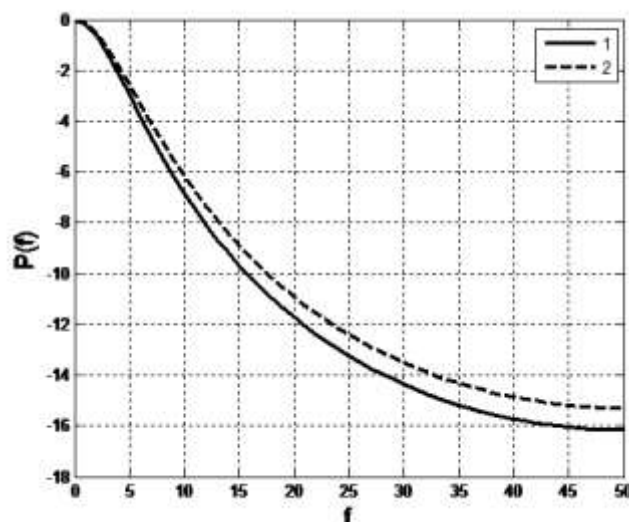


Рисунок 21.3 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности по модели ОАР(1) третьего ранга для $\Delta f_1 = 10$.

2. Одномодовый случайный негауссов процесс ОАР второго порядка с заданными частотой пика f_1 и шириной полосы Δf_1

Для получения одномодового случайного процесса ОАР с пиком на ненулевой частоте необходимо, чтобы корни характеристического уравнения были комплексными. Этому условию удовлетворяет модель ОАР второго порядка. Пусть заданы частота пика f_1 и его ширина полосы Δf_1 .

С учетом (1.19, б) и (1.21) формулы для расчета теоретических коэффициентов ОАР имеют вид

$$\Phi_3[1] = 2 \cos(2\pi f_1 T) \exp(-\pi \Delta f_1 T), \quad (21.22, а)$$

$$\Phi_3[2] = -\exp(-2\pi \Delta f_1 T). \quad (21.22, б)$$

В табл. 21.1 приведены рассчитанные коэффициенты ОАР для двух различных значений частот максимумов и ширин полос спектральной плотности. В качестве порождающего процесса использовался тот же негауссов белый шум, что и в предыдущих имитационных экспериментах. На рис. 21.4 представлены графики теоретической и выборочной спектральной плотности для модели ОАР второго порядка третьего ранга при заданных $f_1 = 20$ и $\Delta f_1 = 5$. Для этого процесса выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса составили: $\gamma_1 = 0,75$ и $\gamma_2 = 3,07$. Выборочная оценка спектра получена по модели ОАР(2) третьего ранга для сдвига $l = 1$.

Таблица 21.1 Коэффициенты ОАР генератора процесса ОАР второго порядка

f_1	Δf_1	$\Phi_3[1]$	$\Phi_3[2]$
20	5	0.5282	-0.7304
40	10	-0.1818	-0.5335

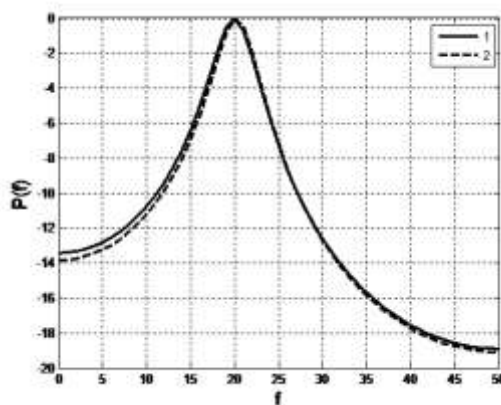


Рисунок 21.4 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности для моделей ОАР (2) третьего ранга для $f_1 = 20$ и $\Delta f_1 = 5$.

Моментные функции заметно отличаются от корреляционной функции. Это отличие касается в основном значений этих функций при отрицательных сдвигах (рис. 21.5). Значения моментной функции при отрицательных сдвигах быстро убывают. Из 13.7 следует, например, что $m_3[0, -10] = m_3[10, 10]$. Это значит, что значение моментной функции со сдвигом -10 равно десятому значению моментной функции сечения в точке со сдвигом 10 . Моментная функция в этой точке уже достаточно мала и малоинформативна.

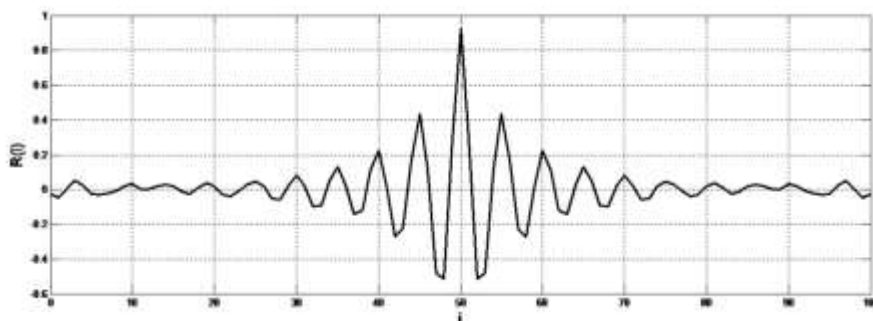


Рисунок 21.5, а – Корреляционная функция негауссова имитационного процесса ОАР для $f_1 = 20$ и $\Delta f_1 = 5$.

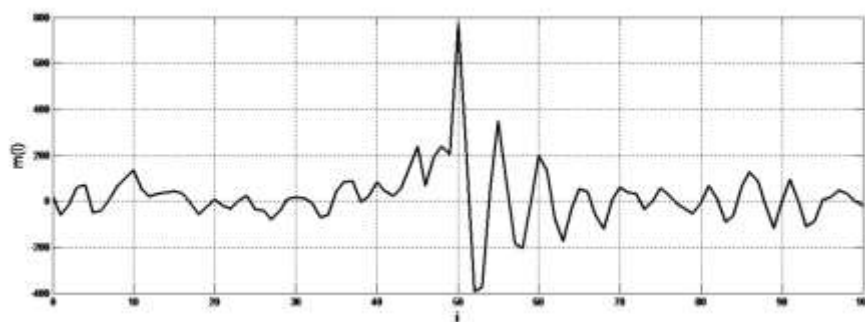


Рисунок 21.5, б – Моментная функция негауссова имитационного процесса ОАР для $f_1 = 20$ и $\Delta f_1 = 5$ при сдвиге $l = 0$

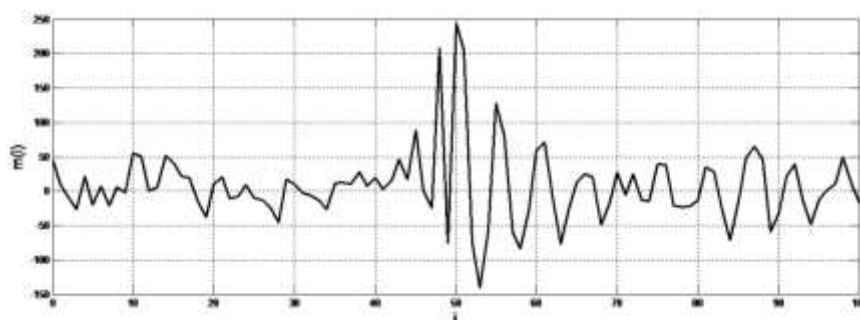


Рисунок 21.5, в – Моментная функция негауссова имитационного процесса ОАР для $f_1 = 20$ и $\Delta f_1 = 5$ при сдвиге $l = 1$.

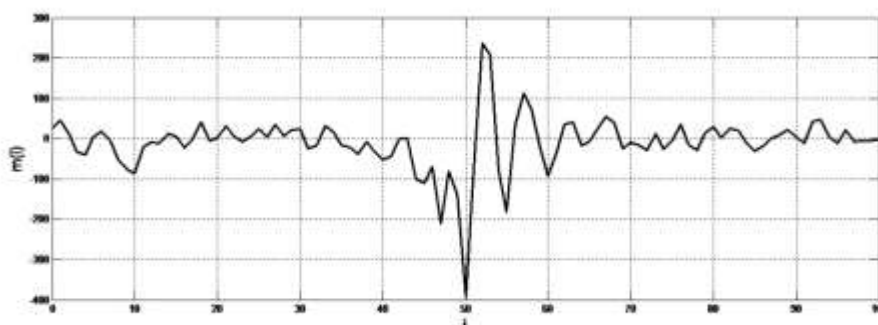


Рисунок 21.5, г – Моментная функция негауссова имитационного процесса ОАР для $f_1 = 20$ и $\Delta f_1 = 5$ при сдвиге $l = 2$.

При малых значениях сдвигов их влияние на точность оценки параметрического спектра невелико. На рис. 21.6 показаны выборочные оценки параметрического спектра второго ранга и третьего ранга при различных сдвигах.

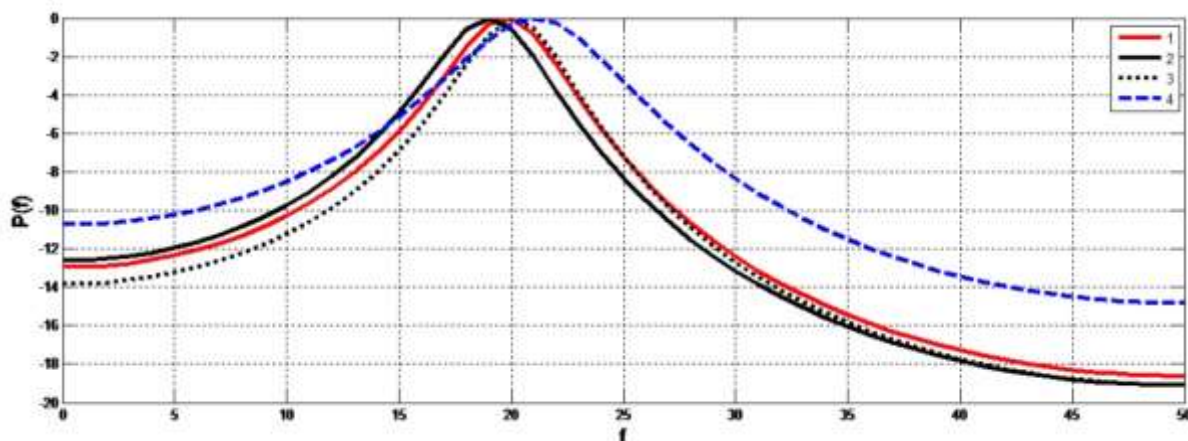


Рисунок 21.6 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности для моделей АР (2) и ОАР (2) третьего ранга для $f_1 = 20$ и $\Delta f_1 = 5$: 1– для модели АР(2) и 2– для модели ОАР (2) при сдвигах: $l = 0$, 3– $l = 1$, 4– $l = 2$

На рис. 21.7 представлены графики теоретической и выборочной спектральной плотности для модели ОАР второго порядка третьего ранга при заданных $f_1 = 40$ и $\Delta f_1 = 10$. Для второго процесса выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса составили: $\gamma_1 = 0.04$ и $\gamma_2 = 3.57$. Несмотря на то, что коэффициент асимметрии близок к нулю, выборочная оценка спектра третьего порядка близка к теоретической. Выборочная оценка спектра получена по модели ОАР(2) третьего ранга для сдвига $l = 1$.

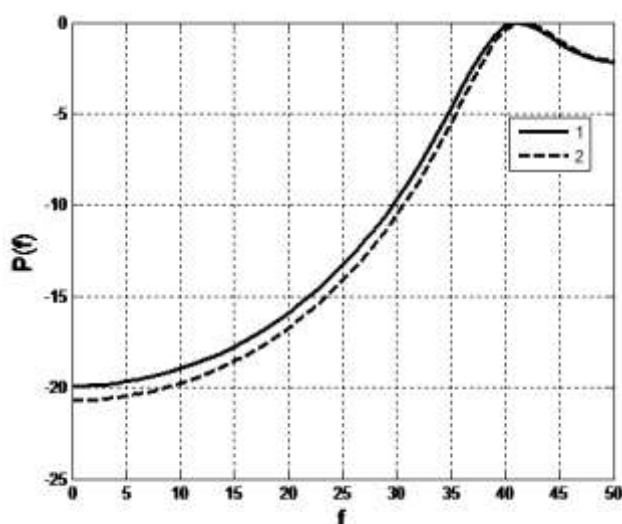


Рисунок 21.7 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности моделей ОАР(2) третьего ранга для $f_1 = 40$ и $\Delta f_1 = 10$.

Суммируя процессы ОАР первого и второго порядков с заданными одномодовыми спектрами, подбирая их мощность, можно получить многомодовый случайный процесс с заданным отношением мощностей спектральных пиков. Полученный таким образом результирующий процесс, однако, не является процессом ОАР.

3. Двухмодовый случайный процесс ОАР третьего порядка

Найдем коэффициенты двухмодового процесса ОАР, у которого один пик находится на нулевой частоте, а второй пик соответствует частоте f_1 . Такие процессы описываются моделью ОАР третьего порядка. Соответствующие коэффициенты ОАР определяются соотношениями (1.19, в), полученными с использованием (1.20) и (1.21)

$$\Phi_3^l[1] = 2 \cos(2\pi f_1 T) \exp(-\pi \Delta f_1 T) + \exp(-\pi \Delta f_2 T),$$

$$\Phi_3^l[2] = -[\exp(-2\pi \Delta f_1 T) + 2 \exp(-\pi \Delta f_1 T - \pi \Delta f_2 T) \cos(2\pi f_1 T)],$$

$$\Phi_3^l[3] = \exp(-2\pi \Delta f_1 T - \pi \Delta f_2 T),$$

где Δf_1 и Δf_2 – ширина пиков на ненулевой и нулевой частотах соответственно. В таблице 21.2 приведены коэффициенты ОАР третьего порядка для заданных Δf_1 , f_1 и Δf_2 . Графики параметрических оценок спектральной плотности показаны на рис. 21.8 и рис. 21.9. Для первого процесса выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса составили: $\gamma_1 = 1.38$ и $\gamma_2 = 2.49$, для второго: $\gamma_1 = 0.77$ и $\gamma_2 = 1.66$, а сдвиг равнялся $l = 1$.

Таблица 21.2 Коэффициенты модели ОАР случайного процесса с двумодовой спектральной плотностью

f_1	Δf_1	Δf_2	$\Phi_3^l[1]$	$\Phi_3^l[2]$	$\Phi_3^l[3]$
15	5	10	1.735	-1.465	0.534
40	2	2,5	-0.5950	0.5228	0.8153

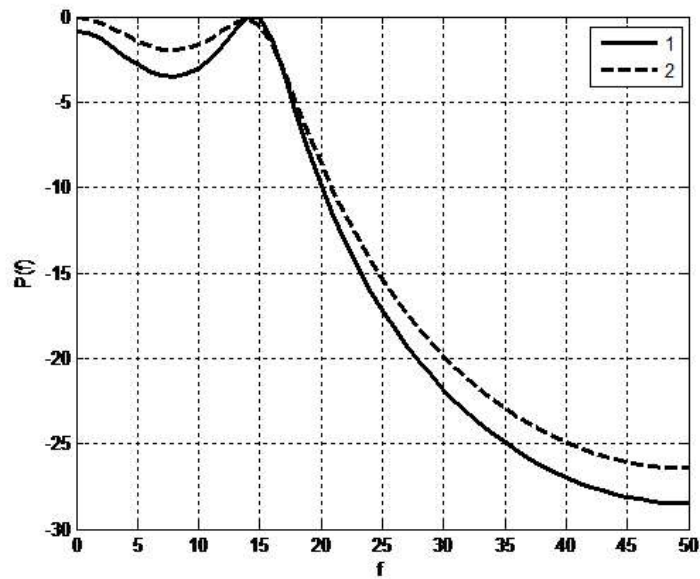


Рисунок 21.8 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности моделей ОАР (3) третьего ранга для $f_1 = 15$ и $\Delta f_1 = 5$, $\Delta f_2 = 10$.

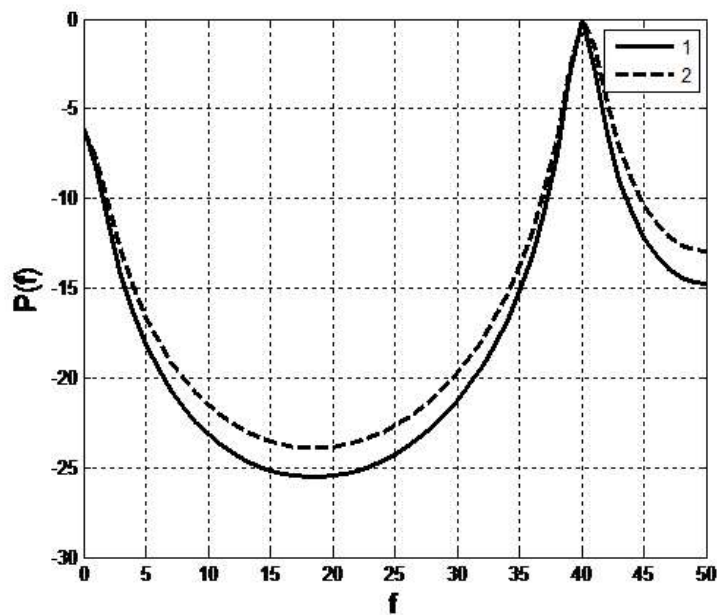


Рисунок 21.9 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности моделей ОАР (3) третьего ранга для $f_1 = 40$ и $\Delta f_1 = 2$, $\Delta f_2 = 2,5$.

4. Двухмодовый случайный процесс ОАР четвертого порядка

Получим выражения для расчета коэффициентов ОАР случайного процесса с заданными частотами пиков f_1 , f_2 и соответствующих ширин полос

$\Delta f_1, \Delta f_2$. Случайный процесс с такими параметрами спектральной плотности соответствует модели ОАР четвертого порядка. Коэффициенты ОАР вычисляются согласно (1.19, г) по формулам

$$\Phi_3^l[1] = 2 \cos(2\pi f_1 T) \exp(-\pi \Delta f_1 T) + 2 \cos(2\pi f_2 T) \exp(-\pi \Delta f_2 T);$$

$$\begin{aligned} \Phi_3^l[2] = & -[\exp(-2\pi \Delta f_1 T) + \exp(-2\pi \Delta f_2 T) + 2 \exp(-\pi \Delta f_1 T - \pi \Delta f_2 T) \times \\ & \times \cos(2\pi f_1 T + 2\pi f_2 T) + 2 \exp(-\pi \Delta f_1 T - \pi \Delta f_2 T) \cos(2\pi f_1 T - 2\pi f_2 T)], \end{aligned}$$

$$\Phi_3^l[3] = 2 \exp(-\pi \Delta f_1 T - 2\pi \Delta f_2 T) \cos(2\pi f_1 T) + 2 \exp(-2\pi \Delta f_1 T - \pi \Delta f_2 T) \cos(2\pi f_2 T);$$

$$\Phi_3^l[4] = -\exp(-2\pi \Delta f_1 - 2\pi \Delta f_2).$$

В таблице 21.3 приведены значения коэффициентов ОАР модели четвертого порядка при различных f_i и Δf_i , $i=1, 2, 3, 4$.

Таблица 21.3 Коэффициенты модели ОАР случайного процесса с двумодовой спектральной плотностью с пиками на ненулевой частоте

№	f_1	Δf_1	f_2	Δf_2	$\Phi_3^l[1]$	$\Phi_3^l[2]$	$\Phi_3^l[3]$	$\Phi_3^l[4]$
1	15	2	30	3	0.5415	-1.0892	0.4183	-0.7304
2	5	2	40	2	0.2668	0.9504	0.2353	-0.7778
3	15	5	30	10	0.5533	-0.8104	0.2063	-0.3897
4	10	7,5	20	10	1.7298	-1.7348	0.9638	-0.3330

Для порождающего процесса выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса составили: $\gamma_1 = 2.59$ и $\gamma_2 = 8.26$. Для сгенерированных негауссовых процессов значения асимметрии и эксцесса представлены в табл. 21.4.

Таблица 21.4 Коэффициенты асимметрии и эксцесса для модели ОАР случайного процесса с двумодовой спектральной плотностью с пиками на ненулевой частоте

№	f_1	Δf_1	f_2	Δf_2	γ_1	γ_2
1	15	2	30	3	0.24	2.02
2	5	2	40	2	0.36	0.15
3	15	5	30	10	0.91	3.37
4	10	7.5	20	10	1.16	2.32

На рис. 21.10 и рис. 21.11 представлены графики параметрической оценки спектральной плотности для параметров спектров соответствующих №1 и №2 табл. 21.3. На графиках наблюдается полное разрешение пиков спектральной плотности. Два пика достаточно далеко удалены друг от друга и имеют узкую полосу пика спектральной плотности. Высота заметно больше у первого пика, т. к. он расположен левее на оси частот.

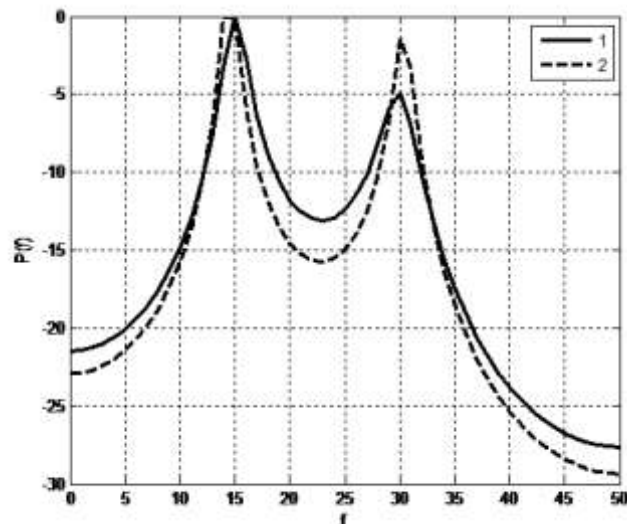


Рисунок 21.10 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности моделей ОАР (4) третьего ранга для $f_1 = 15$ и $\Delta f_1 = 2$, $f_2 = 30$, $\Delta f_2 = 3$

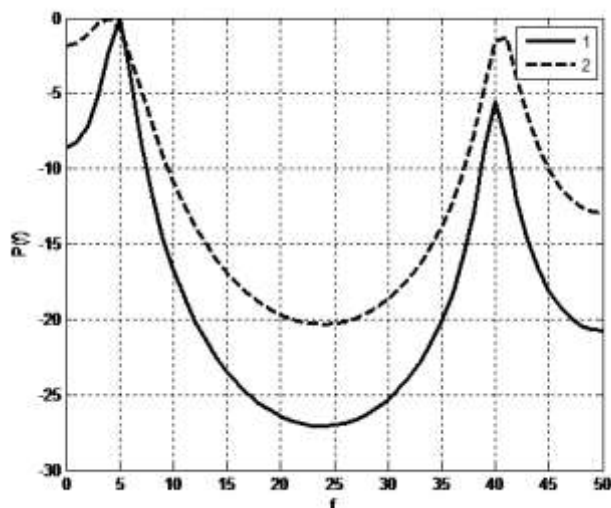


Рисунок 21.11 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности моделей ОАР(4) третьего ранга для $f_1 = 5$ и $\Delta f_1 = 2$, $f_2 = 40$, $\Delta f_2 = 2$

На рис. 21.12 рис. 21.13 представлены графики оценки спектральной плотности для второго набора параметров спектров №3 и №4 из табл. 21.3. Частоты пиков и их ширины полос подобраны таким образом, чтобы второй пик хуже разрешался или появлялась точка перегиба в спектре. Большие ширины полос приводят к росту асимметрии и эксцесса выходного процесса. Выборочные оценки спектров третьего порядка, представленные на рис. 21.10 – рис. 21.12 получены по моделям ОАР(4) третьего ранга для сдвига $l=1$. Для выборочного спектра на рис. 21.13 сдвиг составлял $l=0$.

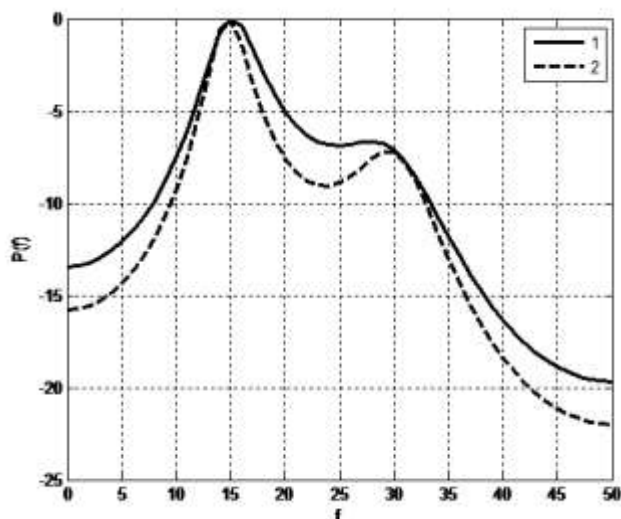


Рисунок 21.12 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности моделей ОАР(4) третьего ранга для $f_1=5$ и $\Delta f_1=5$, $f_2=30$, $\Delta f_2=10$

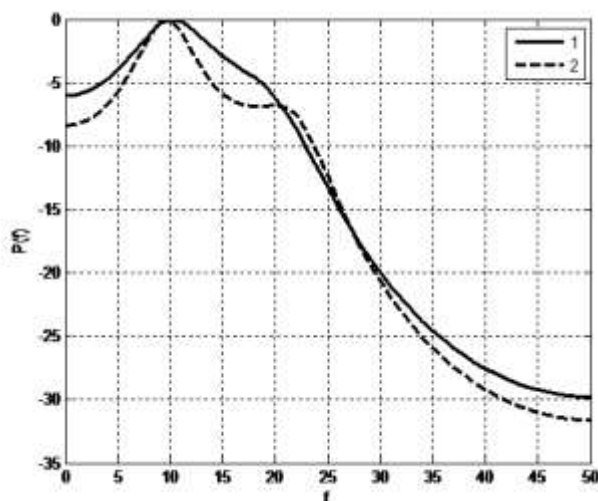


Рисунок 21.13 – Параметрические теоретическая и выборочная оценка спектральной плотности моделей ОАР (4) третьего ранга для $f_1=10$ и $\Delta f_1=7.5$, $f_2=20$, $\Delta f_2=10$.

Предложенный метод расчета коэффициентов ОАР по параметрам спектральной плотности позволяет получать процессы ОАР, используя порождающий процесс типа белого шума, подаваемый на вход генератора (рис. 21.1). Как показал анализ графиков параметрических оценок спектральной плотности, они точно соответствуют задаваемым параметрам. В последующих главах на примерах использования обобщенных моделей линейного предсказания показана полезность предложенного способа генерации негауссовых ОАР процессов. Там же методом статистического моделирования доказана достаточная точность выборочной параметрической оценки спектральной точности высших порядков. Так как вид операторов АР и ОАР и характеристических функций для моделей АР и ОАР совпадают, то уравнения (1.19) справедливы как для модели АР второго ранга, так и для моделей высших рангов.

Анализ графиков показывает, что отклонения между задаваемой СПМ и его оценкой незначительны. Данная точность является приемлемой для большинства инженерных приложений. Предложенный метод генерации коррелированных случайных процессов АР особенно полезен в тех случаях, когда необходимо обрабатывать процессы АР с заданным порядком и формой спектра, а также некоторыми видами корреляционной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
2. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.
3. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Параметрическое оценивание спектров высших порядков негауссовых процессов // АСУ и приборы автоматики. – 2004. – №127. – С. 68–73.
4. Марпл–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
5. Тихонов В.А. Нетребенко К.В. Параметрическое оценивание спектров четвертого порядка негауссовых процессов // Радиотехника. – 2004. – №137. – С. 118–122.
6. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. – К.: Выща школа, 1987. – 191 с.
7. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1971. – 326 с.
8. Омельченко В.О., Безрук В.М., Драган Я.П., Колесников О.О., Омельченко А.В. Імовірнісні моделі випадкових сигналів і полів у прикладах і задачах: Навч. посібник / За ред. В.О. Омельченка. – К.: ІСДО, 1996. – 272 с.

22 СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

22.1 Введение

В разделе получены выражения для спектральной плотности модели ОСС, как частный случай выражений для спектральной плотности модели ОАРСС. Модель ОСС рационально использовать для процессов с широкополосным спектром. Показано, для оценки коэффициентов ОСС можно использовать не только системы нелинейных уравнений (раздел 15), но и способ оценки по модели ОАР высокого порядка, используемый ранее для модели СС [1].

На основе свойства обратимости спектров ОАР и ОСС при равных коэффициентах моделей, получен способ расчета коэффициентов ОСС по характеристикам спектра. Этот способ использовался для генерации широкополосных негауссовых процессов с задаваемыми формами спектров. Приведенные примеры демонстрируют некоторые возможности формирования негауссовых процессов и оценки их параметров.

22.2 Спектры высших порядков обобщенной модели скользящего среднего

Спектральные оценки скользящего среднего высших порядков рационально использовать в тех случаях, когда спектры высших порядков состоят из широкополосных составляющих. Приведем выражения для спектров ОСС, которые можно получить из общего соотношения (21.4).

Спектр СС третьего порядка определяется числителем выражения (21.5) и имеет вид

$$P_3(\omega_1, \omega_2) = m_{3a}^g \sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{-j\omega_1 T i} \sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{-j\omega_2 T i} \sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{j(\omega_1 + \omega_2) T i}. \quad (22.1, a)$$

В некоторых случаях вместо двумерной спектральной плотности $P_3(\omega_1, \omega_2)$ удобно воспользоваться одномерным сечением $P_3(0, \omega_1) = P_3(\omega)$. Тогда выражение (22.1a) упрощается

$$P_3(\omega) = m_{3a}^g K_3 \left| \sum_{i=0}^q Q_3^g[i] e^{-j\omega T i} \right|^2, \quad (22.1, б)$$

где постоянная K_3 равна

$$K_3 = \sum_{i=0}^q Q_3^g[i].$$

При получении выражения для спектральной плотности четвертого порядка модели ОСС, можно воспользоваться формулой (21.6) для ОАРСС. Для модели ОСС она принимает вид

$$\begin{aligned}
 P_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= m_{4a}^{g_1, g_2} \times \\
 &\times \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i] e^{-j\omega_1 Ti} \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i] e^{-j\omega_2 Ti} \times \\
 &\times \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i] e^{-j\omega_3 Ti} \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i] e^{-j(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) Ti}.
 \end{aligned} \tag{22.2}$$

Одномерную спектральную плотность четвертого порядка модели ОСС можно получить из (22.2). Упрощая это выражение при $\omega_2 = \omega_3 = 0$, получим

$$P_4(\omega) = m_{4a}^{g_1, g_2} K_4 \left| \sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i] e^{-j\omega Ti} \right|^2,$$

где постоянная K_4 определяется следующим образом:

$$K_4 = \left(\sum_{i=0}^q Q_4^{g_1, g_2} [i] \right)^2.$$

Параметрические спектральные оценки высших порядков для модели ОСС можно получить из (21.4). Спектр r -го порядка описывается выражением

$$\begin{aligned}
 P_r(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{r-1}) &= \\
 &= m_{ra}^{g_1, \dots, g_{r-2}} \sum_{i=0}^q Q_r^{g_1, \dots, g_{r-2}} [i] e^{-j\omega_1 Ti} \sum_{i=0}^q Q_r^{g_1, \dots, g_{r-2}} [i] e^{-j\omega_2 Ti} \dots \\
 &\dots \sum_{i=0}^q Q_r^{g_1, \dots, g_{r-1}} [i] e^{j(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{r-1}) Ti}.
 \end{aligned}$$

В частности, при $r = 2$ получаем известное выражение для параметрической СС спектральной оценки

$$P(\omega) = D_a \left| 1 - \sum_{i=1}^q Q[i] e^{-j\omega T i} \right|^2.$$

Использование параметрических спектров высших порядков на основе моделей ОАР, ОСС и ОАРОСС, позволяет получить дополнительные характеристики негауссовых случайных процессов, которые невозможно обнаружить на спектрах второго порядка. Формы спектров высших порядков могут заметно отличаться от спектров второго порядка, что объясняется наличием статистических связей высших порядков [2, 3, 4].

22.3 Генерация случайного процесса обобщенного скользящего среднего с заданными спектральными характеристиками

Для получения широкополосных случайных процессов можно использовать генератор процесса ОСС, представленный рис. 22.1. Задача генерации процессов ОСС сильно упрощается, если коэффициенты ОСС известны, например, рассчитаны ранее по оценкам моментной функции реальных процессов. Однако часто необходимо получить реализации случайных процессов ОСС с заданными параметрами спектральной плотности.

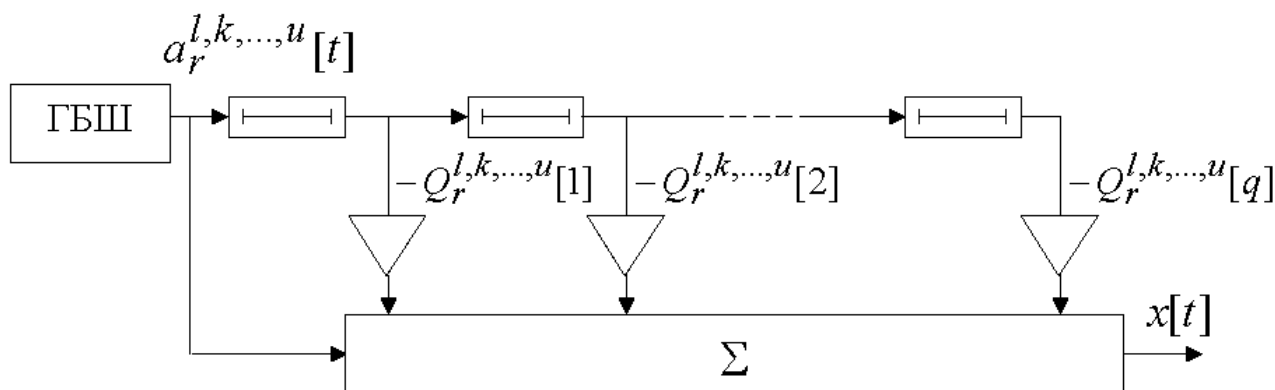


Рисунок 22.1 – Генератор процесса ОСС

Покажем, что модель ОСС позволяет формировать широкополосные случайные процессы с заданными спектральными характеристиками. Такими характеристиками будут положение на оси частот минимума спектра и ширина полосы спектра по уровню 0,5 от этого минимума. Ниже будут определены соотношения, связывающие коэффициенты ОСС и указанные параметры спектральной плотности.

Если предположить, что коэффициенты ОСС и ОАР равны, то из (21.7) и (22.1) видно, что $P_{ОСС}(f) = P_{ОАР}(f)^{-1}$. Тогда частоты пиков в ОАР спектре будут совпадать с частотами минимумов в ОСС спектре, а ширина полосы спектра ОАР по уровню 0.5 будет равна ширине полосы от минимума ОСС спектра. Такую связь спектральных плотностей моделей ОСС и ОАР можно использовать для расчета коэффициентов ОСС по заданным характеристикам спектра. Чтобы вычислить коэффициенты ОСС по корням характеристического уравнения, необходимо задать частоты минимумов и их ширину полос минимумов спектров модели ОСС. Подставляя найденные таким способом корни в (1.19), вычисляют коэффициенты ОАР и приравнивают их к коэффициентам ОСС.

Приведем примеры моделирования процессов ОСС третьего ранга с заданными характеристиками спектральной плотности. На рис. 22.2 показаны оценки спектральной плотности на основе модели ОСС второго порядка с коэффициентами $Q_3^I[1] = -0.86$, $Q_3^I[2] = -0.53$. Коэффициенты ОСС рассчитаны по параметрам спектральной плотности модели ОСС с частотой минимума $f_1 = 35$ и шириной полосы минимума $\Delta f_1 = 10$ по формулам (1.19, б). Порождающий процесс представлял собой белый шум с гамма-распределением длиной 1000 отсчетов. Для порождающего процесса выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса составили: $\gamma_1 = 2.61$ и $\gamma_2 = 8.25$. Сформированный негауссов процесс ОСС имел асимметрию и эксцесс равные: $\gamma_1 = 1.60$ и $\gamma_2 = 3.02$ соответственно.

Выборочные коэффициенты ОСС рассчитывались по способу, описанному в [1]. Вначале рассчитывались коэффициенты модели ОАР высокого порядка. Затем рассчитывались коэффициенты ОАР заданного порядка. В данном примере вначале использовалась модель 200-го порядка, а затем второго порядка. Найденные таким способом коэффициенты ОАР являлись выборочными коэффициентами модели ОСС. Как видно из графиков, показанных на рис. 22.2, спектры процесса ОСС имеют близкие к заданным выборочные спектральные плотности. Для сравнения на этом же графике показан теоретический спектр, рассчитанный по параметрам модели ОСС второго порядка.

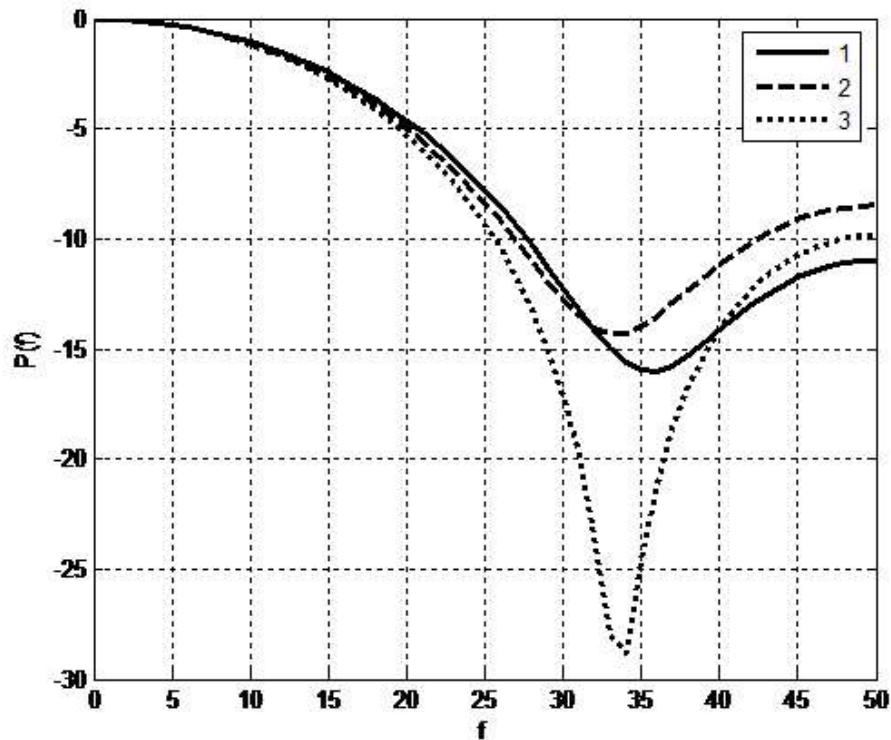


Рисунок 22.2 – Спектральная плотность процесса ОСС для модели ОСС второго порядка с параметрами спектра $f_1 = 35$, $\Delta f_1 = 10$:

- 1 – теоретический спектр по параметрам модели,
- 2 – выборочная оценка параметрического спектра для $l = 0$,
- 3 – выборочная оценка параметрического спектра для $l = 1$

Во втором примере получен негауссов широкополосный процесс ОСС (4) с определенными выше параметрами спектра: $f_1 = 0$, $\Delta f_1 = 10$, $f_2 = 50$, $\Delta f_2 = 10$. Коэффициенты ОСС получены приравнением к коэффициентам ОАР (4), рассчитанным по формулам (1.19, г). Для этого процесса коэффициенты ОСС (4) составляли: $Q_3^l[1] = 0$, $Q_3^l[2] = 1.07$, $Q_3^l[3] = 0$, $Q_3^l[4] = -0.28$. На рис. 22.3 представлены графики спектральной плотности процесса ОСС четвертого порядка, рассчитанной по формуле (22.1, б), которая получена из (22.1, а) при $\omega_2 = 0$. Как видно из рис. 22.3, выборочная спектральная плотность процесса ОСС незначительно отличается от теоретической. Следовательно, предложенный метод получения негауссовых процессов ОСС с задаваемыми параметрами спектра дает приемлемые оценки коэффициентов ОСС.

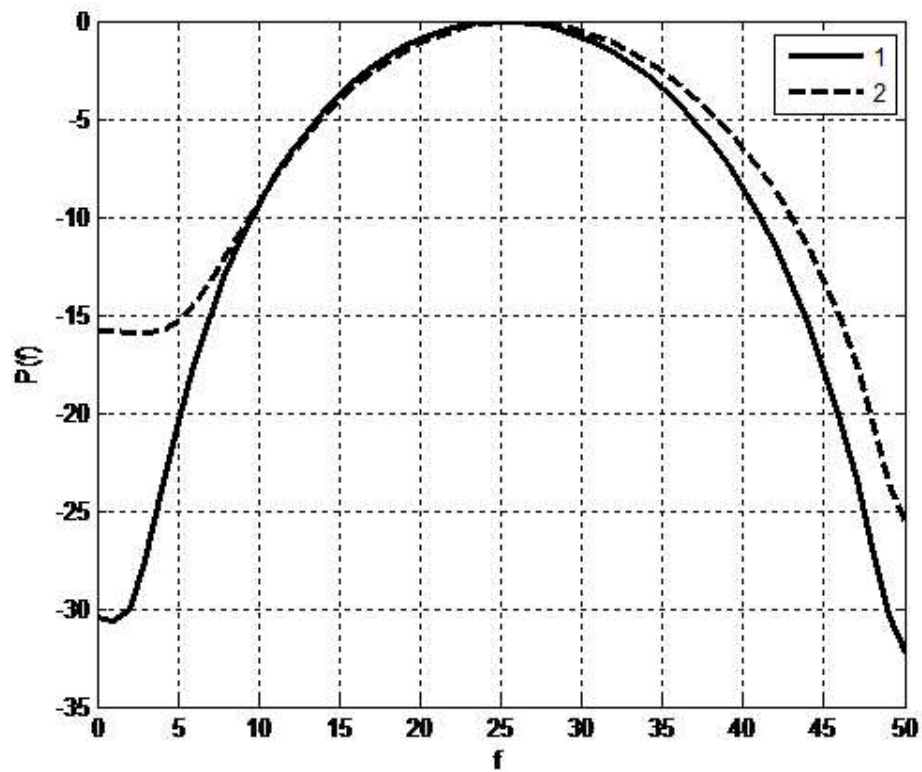


Рисунок 22.2 – Теоретическая и выборочная параметрические спектральные плотности модели ОСС четвертого порядка с параметрами спектра:

$$f_1 = 0, \Delta f_1 = 10, f_2 = 50, \Delta f_2 = 10.$$

Предложенный метод позволяет получать оценки коэффициентов ОСС для более сложных спектров. При этом следует учитывать ранги, порядки моделей, сдвиги моментных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марпл – мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
2. Журбенко И.Г. Анализ стационарных и однородных случайных систем. – М.: Изд-во моск. ун-та, 1987. – 240 с.
3. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
4. Кунченко Ю.П. Нелинейная оценка параметров негауссовских радиотехнических сигналов. – К.: Выща школа, 1987. – 191с.

23 ОЦЕНКА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА И КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХ

23.1 Введение

Одним из важнейших направлений использования моделей линейного предсказания является параметрический спектральный анализ случайных процессов [1–6]. Использование параметрических спектров во многих случаях предпочтительнее использования спектров Фурье. Приведенные выше выражения для параметрической оценки спектров высших порядков, не только обобщают известные выражения для параметрической оценки СПМ, но и позволяют получить дополнительные возможности. В данном разделе рассмотрены некоторые практические задачи спектрального анализа, решение которых осуществляется с применением спектров высших порядков.

Точность оценок параметрических спектров высших порядков негауссовых процессов зависит от таких основных факторов: точности используемой модели линейного предсказания высших рангов, степени негауссовости анализируемых процессов, мощности и плотности распределения помех и шумов. Точность модели линейного предсказания зависит от правильности выбора адекватной модели (ОАР, ОСС или ОАРСС), от точности оценки порядка модели, от точности оценок коэффициентов модели, зависящей от устойчивости оценок корреляционных или моментных функций. Устойчивость оценок моментных функций, а, следовательно, и точность модели, зависят от того, насколько сильно у процесса выражены негауссовы свойства. О степени негауссовости процесса можно судить по величине коэффициентов асимметрии (13.8, а) и эксцесса (13.8, б).

Анализ и обработка случайных процессов, как правило, производится в ограниченной полосе частот. Если в этой полосе частот процесс обладает негауссовыми свойствами, то его моментная функция будет отлична от нуля и, следовательно, можно строить обобщенные модели линейного предсказания. Применяемый метод определения степени негауссовости процесса по оценкам коэффициентов асимметрии и эксцесса дает интегральную характеристику процесса, не зависящую от частоты. Ниже предложен метод исследования гауссовых и негауссовых процессов путем оценивания коэффициентов асимметрии и эксцесса для различных полос частоты процесса. Применение этого метода позволяет проводить более тонкий частотный анализ процессов и шумов, определять адекватность обобщенных моделей линейного предсказания, качественно оценивать потенциальную точность параметрических спектров высших порядков.

Особый интерес при исследовании спектров высших порядков представляет изучение влияния коррелированных помех и шумов на точность параметрических оценок спектров. Оценивание СПМ на фоне помех и шумов представляет сложную практическую задачу, которая в ряде случаев не решается в рамках корреляционной теории. Особенно эта проблема

актуальна для параметрического спектрального оценивания, так как на точность оценивания параметров модели существенное влияние оказывают помехи и шумы. В данном разделе теоретически обоснована возможность применения статистик высших порядков для снижения влияния помех и шумов на точность оценивания СПМ и спектров высших порядков. Приведен ряд примеров, поясняющих и доказывающих возможность повышения точности оценки спектров.

23.2 Анализ спектральных составляющих процессов с помощью асимметрии и эксцесса

При анализе гауссовых и негауссовых процессов часто необходимо оценивать характеристики распределения плотности вероятности. Чем значительнее отклонение характеристик распределения от гауссова, тем точнее и устойчивее статистики высших порядков негауссовых процессов, а, следовательно, и выше эффективность их использования в прикладных задачах. Методы обработки негауссовых процессов, основанные на использовании моментных и кумулянтных функций, предполагают, что они должны быть отличны от нуля. Значения моментных и кумулянтных функций негауссовых случайных процессов зависят от величины статистических связей высших порядков. О наличии статистических связей высших порядков во многих случаях можно судить по величине коэффициентов асимметрии и эксцесса.

Как правило, большинство анализируемых негауссовых процессов имеют ограниченную полосу частот. Поэтому наибольший интерес представляют оценки характеристик негауссовости процесса в этой полосе частот. Существующие методы оценки характеристик распределения не предполагают определения их распределения по частоте. Так, наиболее простые параметры распределения, асимметрия и эксцесс, оцениваются интегрально вне зависимости от частоты. Как показали эксперименты по исследованию этих параметров процессов, они могут существенно зависеть от частоты.

Для оценивания распределения по частоте асимметрии и эксцесса был предложен метод спектрального анализа на основе набора полосовых фильтров, настроенных на последовательный ряд центральных частот. В анализаторе спектра использовались наборы авторегрессионных накапливающих фильтров с заданной шириной полосы. У процесса на выходе каждого фильтра оценивались значения коэффициентов асимметрии и эксцесса

$$\gamma_1(f) = m_3(f) / \sigma^3(f),$$

$$\gamma_2(f) = m_4(f) / \sigma^4(f) - 3,$$

где $m_3(f)$ и $m_4(f)$ – центральные моменты третьего и четвертого порядков, $\sigma(f)$ – среднеквадратическое отклонение процесса, полученного на выходе полосового фильтра с центральной частотой f . Вследствие нормализации негауссовых процессов абсолютные значения $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ на выходе узкополосных фильтров имеют заниженные значения. Поэтому интерес представляет форма зависимости от частоты $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$, их отличие от нуля на разных частотах.

Рассмотрим указанные зависимости $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ для гауссовых и негауссовых процессов типа белого шума, имитационных и реальных сигналов, которые позволяют глубже понять статистические свойства анализируемых процессов. Для получения имитационных гауссовых и негауссовых процессов использовался метод формирующего фильтра, на вход которого подавался порождающий процесс типа белого шума с различными типами распределений. Как показал анализ, $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ белых шумов могут сильно изменяться по частоте и существенно зависеть от длины анализируемой выборки. На рис. 23.1 представлены спектры $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ гауссова белого шума длиной $N = 500$ отсчетов. Спектры были получены с помощью фильтров с шириной полосы $\Delta f = 0.1$. Интегральные значения асимметрии (13.8, а) и эксцесса (13.8, б), рассчитанные по всей выборке, составляли $\gamma_1 = 0.02$, $\gamma_2 = 0.04$. Как видно из графиков, с учетом того, что значения $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ занижены в несколько раз, наблюдаются некоторые колебания $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ относительно нулевого уровня. Особенно заметно отличие от гауссова процесса в $\gamma_2(f)$ на низких и высоких частотах. На рис. 23.2 представлены $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$, полученные по выборке длиной $N = 200$ отсчетов. На графиках наблюдаются отличия от гауссова процесса, которые становятся более очевидными. Это обстоятельство следует учитывать при использовании оптимальных методов обработки сигналов на фоне гауссовых шумов при коротких реализациях. Графики, представленные на рис. 23.3, показывают, что при значительной длине выборки ($N = 5000$) $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ близки к гауссовым. На рис. 23.4 представлены графики $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ аналогового генератора гауссова белого шума. Интегральные значения асимметрии и эксцесса составляли $\gamma_1 = 0.06$ и $\gamma_2 = -0.1$ соответственно. На графике $\gamma_1(f)$ заметно отличие от нуля на низких частотах, а на графике $\gamma_2(f)$ такое отличие наблюдается на низких и высоких частотах.

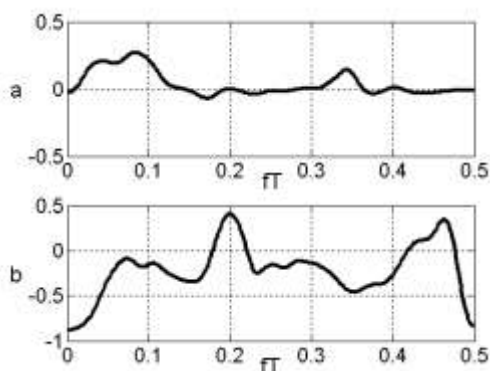


Рисунок 23.1 – Распределение по частоте асимметрии (a) и эксцесса (b) гауссова белого шума, $N = 500$.

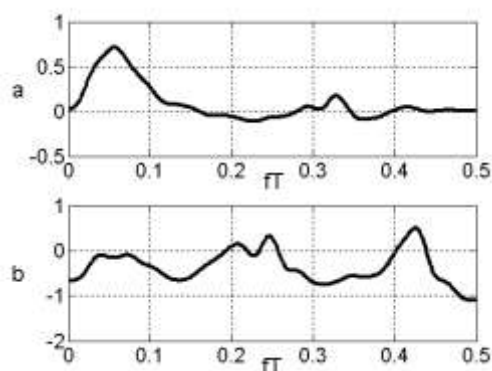


Рисунок 23.2 – Распределение по частоте асимметрии (a) и эксцесса (b) гауссова белого шума, $N = 200$.

Проводились исследования зависимости $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ от частоты для нескольких типов негауссовых белых шумов, используемых для получения негауссовых процессов. На рис. 23.5 представлены графики $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ для белого шума с равномерным распределением. Данные были получены по выборкам длиной $N = 5000$. Интегральные значения асимметрии и эксцесса составляли $\gamma_1 = -0.02$ и $\gamma_2 = -1.19$, что близко к теоретическим $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = -1.2$ [7]. На графике $\gamma_1(f)$ отличие коэффициента от нуля на всех частотах незначительно. Неравномерность негауссовых свойств равномерно распределенного процесса особенно заметна на графике $\gamma_2(f)$.

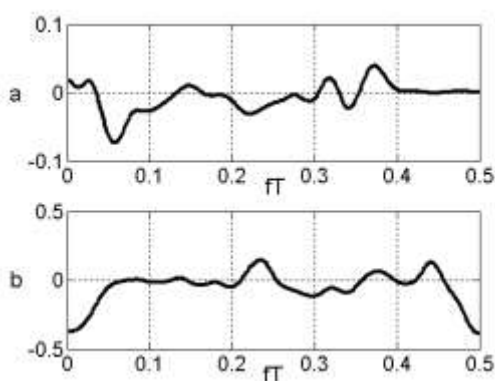


Рисунок 23.3 – Распределение по частоте асимметрии (a) и эксцесса (b) гауссова белого шума, $N = 5000$.

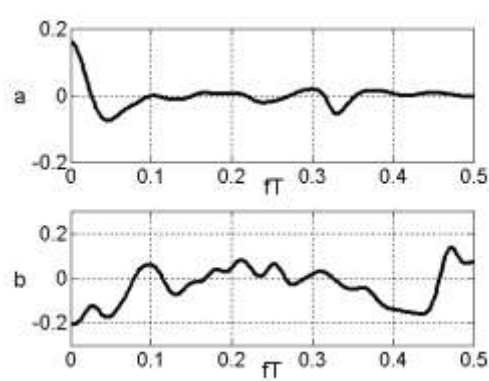


Рисунок 23.4 – Спектр асимметрии (a) эксцесса (b) аналогового гауссова белого шума, $N = 5000$.

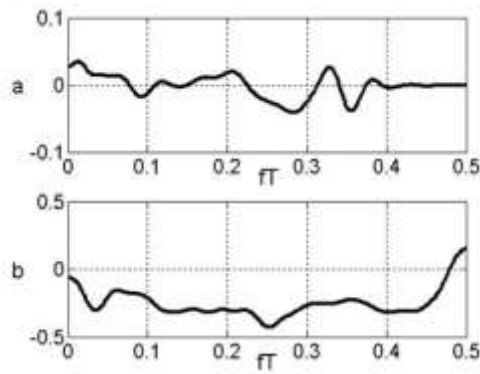


Рисунок 23.5 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (b) белого шума с равномерным распределением, $N = 5000$.

Зависимость $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ от частоты для негауссова белого шума с гамма-распределением показаны на рис. 23.6 и 23.7 для $N = 5000$. Для получения такого процесса использовался алгоритм, описанный в [8]. На рис. 23.6 показаны $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ для процесса с гамма-распределением с параметром формы $b = 0.05$ и параметром масштаба $c = 1$, а на рис. 23.7 для параметров $b = 0.5$ и $c = 1$. Интегральные значения асимметрии и эксцесса составляли для первого процесса $\gamma_1 = 8.05$ и $\gamma_2 = 88.7$, для второго $\gamma_1 = 2.86$ и $\gamma_2 = 11.8$. Как видно из графиков, $\gamma_1(f)$ на частотах выше $fT = 0.35$ значения асимметрии близки к гауссовым. Исследования $\gamma_1(f)$, проведенные для различных коррелированных процессов и процессов типа белого шума, показали, что на высоких частотах наблюдается симметризация плотности распределения негауссовых процессов узкополосным фильтром.

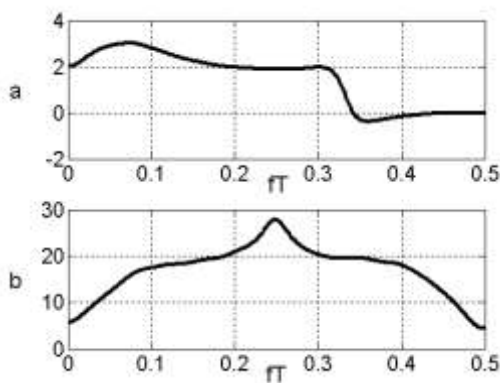


Рисунок 23.6 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (b) белого шума с гамма-распределением, $b = 0.05$, $c = 1$

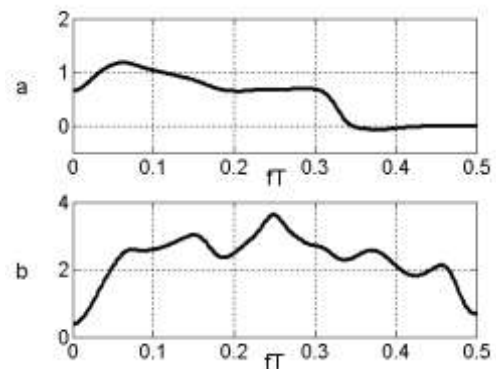


Рисунок 23.7 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (b) белого шума с гамма-распределением, $b = 0.5$, $c = 1$

Проводился анализ $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ белого шума с распределением Парето, полученный из процесса с равномерным распределением методом, описанным в [7]. На рис. 23.8 и 23.9 представлены графики $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ для процессов типа белого шума с Парето распределением для параметров формы $c=5$ и $c=25$ соответственно. Интегральные значения коэффициентов асимметрии и эксцесса составляли: $\gamma_1=4.6$, $\gamma_2=44.8$ и $\gamma_1=2.4$, $\gamma_2=8.8$. Как видно из графиков, распределение асимметрии и эксцесса по частоте весьма неравномерно. При частотах выше $fT=0.4$ асимметрия близка к нулю. Заметим, что интегральное значение асимметрии положительно и на всех частотах асимметрия также положительна. Как показали исследования, спектр $\gamma_2(f)$ для гамма, Парето, Вейбулла, Коши, Стюдента распределений белого шума имеет форму перевернутого V. Для равномерно распределенного белого шума $\gamma_2(f)$ имеет форму V.

Как показывают графики спектра $\gamma_1(f)$ негауссова белого шума, на высоких частотах они близки к нулю. Если такие процессы используются в качестве порождающих для высокочастотных узкополосных негауссовых процессов АР, то вследствие симметризации плотности распределения формирующим фильтром, процесс будет иметь моментную функцию третьего порядка, близкую к нулю. Поэтому спектральные оценки третьего порядка сгенерированных коррелированных негауссовых процессов АР на таких частотах могут быть неточными и неустойчивыми.

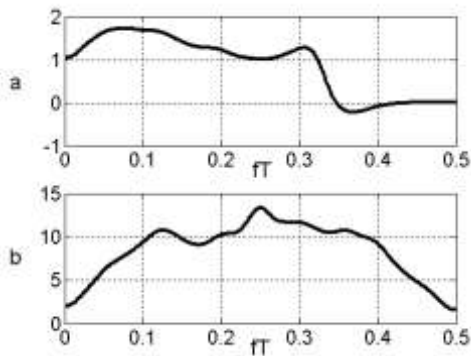


Рисунок 23.8 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (б) белого шума с распределением Парето, $c=5$

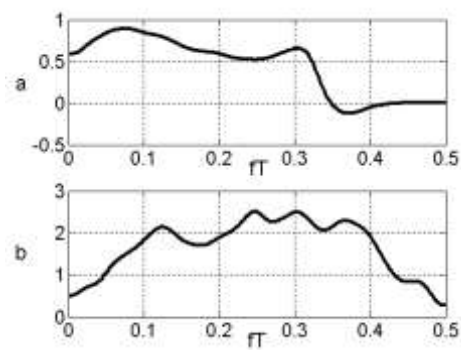


Рисунок 23.9 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (б) белого шума с распределением Парето, $c=25$

На рис. 23.10 и 23.11 представлены спектры $\gamma_1(f)$ для АР процессов с пиками на частотах $fT=0.2$ и $fT=0.45$. Полоса занимаемых частот для обоих процессов составляла $\Delta f=0.04$. В качестве порождающего негауссова процесса использовался белый шум с гамма-распределением. Вследствие нормализации на частотах пиков значения $\gamma_1(f)$ близки к нулю.

Вблизи частоты $fT = 0.45$ полоса с нулевой асимметрией стала значительно шире, чем у белого шума с гамма-распределением. Интегральные значения асимметрии и эксцесса этих для выборок составляли $\gamma_1 = 0.47$, $\gamma_2 = 1.92$ и $\gamma_1 = -0.0016$, $\gamma_2 = 1.88$ соответственно.

На рис. 23.12 представлены графики параметрических оценок спектра двух выборок процессов АР с пиками на задаваемых частотах 0.2 и 0.45. Как видно из графика, оценки спектра на основе модели ОАР третьего ранга для выборок задаваемой частотой 0.45 неточны и неустойчивы. Подобный эффект наблюдался и для других порождающих процессов типа белого шума.

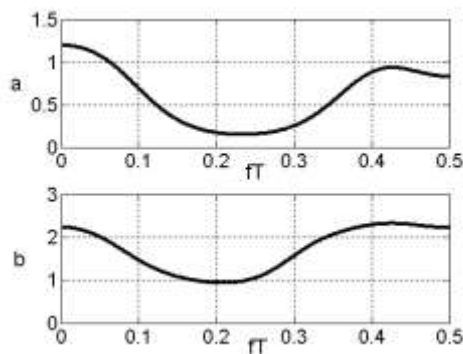


Рисунок 23.10 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (b) коррелированного процесса с γ -распределением ($b = 0.5$, $c = 1$) и параметрами спектра $fT = 0.2$, $\Delta f = 0.04$

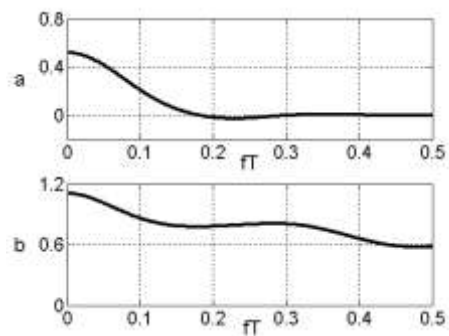


Рисунок 23.11 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (b) коррелированного процесса с γ -распределением ($b = 0.5$, $c = 1$) и параметрами спектра $fT = 0.45$, $\Delta f = 0.04$

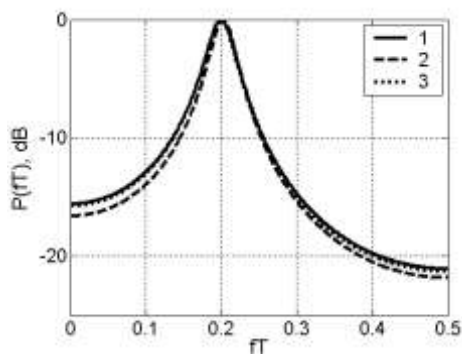


Рисунок 23.12 – Выборочные параметрические спектры процесса с параметрами спектра $fT = 0.2$, $\Delta f = 0.04$, 1 — АР(2); 2 — ОАР 3-й ранг, $l = 0$; 3 — ОАР 3-й ранг, $l = 1$

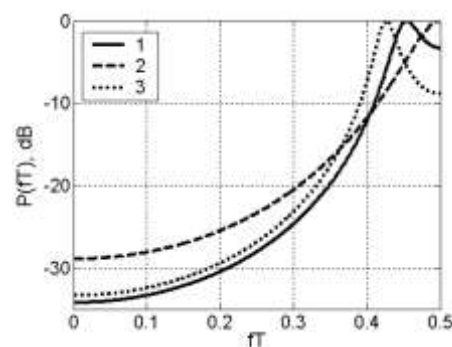


Рисунок 23.13 – Выборочные параметрические спектры процесса с параметрами спектра $fT = 0.45$, $\Delta f = 0.04$: 1 — АР(2); 2 — ОАР 3-й ранг, $l = 0$; 3 — ОАР 3-й ранг, $l = 1$

Исследование $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ негауссовых и гауссовых реальных процессов дает дополнительные возможности для их анализа. Механизмы формирования случайного процесса на разных частотах могут существенно отличаться, что не всегда можно обнаружить, используя моментные функции или спектральный анализ. На рис. 23.14 и рис. 23.15 представлены АР (б) и ОАР (б) спектры второго, третьего и четвертого порядков радиолокационных сигналов, отраженных от трех разных, но близких по структуре целей. На графиках заметно отличие спектральных оценок второго и третьего порядков. Параметрические спектры третьего порядка для разных сдвигов $l=0$ и $l=1$ имеют похожие формы, что свидетельствует об устойчивости оценок. Отметим, что в спектрах высших порядков часто наблюдаются ярко выраженные пики на тех частотах, на которых в спектрах второго порядка только заметны перегибы либо слабые пики. Спектры четвертого порядка более похожи на спектры второго порядка, так как моментная функция четвертого порядка зависит от функции корреляции. На графиках $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$, представленных на рис. 23.16, наблюдаются значительные изменения показателей негауссовости от частоты. Отметим, что большинству пиков на спектрах высших порядков соответствуют экстремумы на графиках $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$. Для некоторых процессов пикам на спектрах соответствует на графиках $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ усиление негауссовых характеристик процесса, для других процессов на частотах пиков происходит нормализация негауссова процесса.

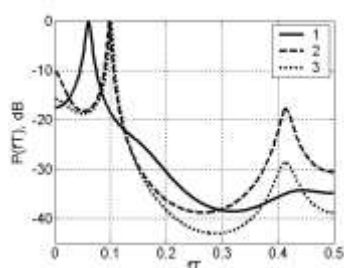


Рисунок 23.14, а –
Выборочные
параметрические
спектры первого
радиолокационного
сигнала:
1 – АР (б);
2 – ОАР (б) 3–й ранг,
 $l=0$;
3 – ОАР (б) 3–й ранг,
 $l=1$

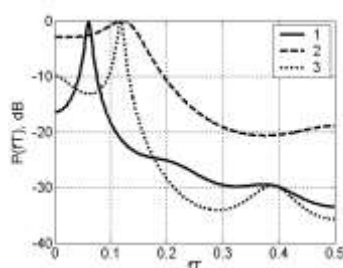


Рисунок 23.14, б –
Выборочные
параметрические
спектры второго
радиолокационного
сигнала:
1 – АР (б);
2 – ОАР (б) 3–й ранг,
 $l=0$;
3 – ОАР (б) 3–й ранг,
 $l=1$

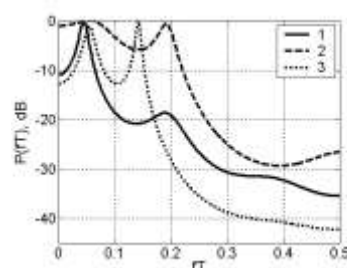


Рисунок 23.14, в –
Выборочные
параметрические
спектры третьего
радиолокационного
сигнала:
1 – АР (б);
2 – ОАР (б) 3–й ранг,
 $l=0$;
3 – ОАР (б) 3–й ранг,
 $l=1$

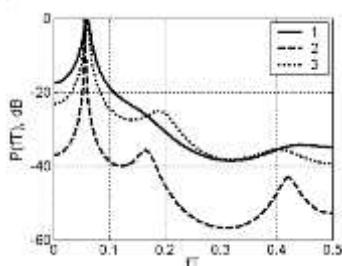


Рисунок 23.15, а –
Выборочные
параметрические
спектры первого
радиолокационного
сигнала:
1 – АР (6);
2 – ОАР (6) 4-й ранг,
 $l=0, k=0$;
3 – ОАР (6) 4-й ранг,
 $l=1, k=1$

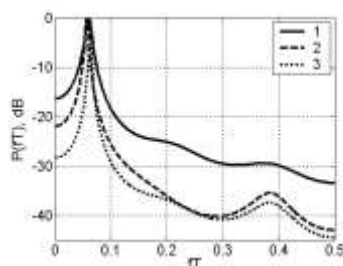


Рисунок 23.15, б –
Выборочные
параметрические
спектры второго
радиолокационного
сигнала:
1 – АР (6);
2 – ОАР (6) 4-й ранг,
 $l=0, k=0$;
3 – ОАР (6) 4-й ранг,
 $l=1, k=1$

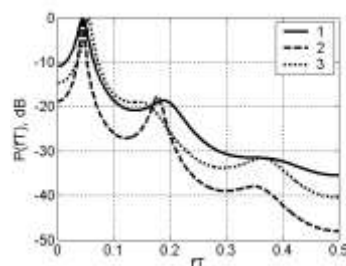


Рис.23.15, в –
Выборочные
параметрические
спектры третьего
радиолокационного
сигнала:
1 – АР (6);
2 – ОАР (6) 4-й ранг,
 $l=0, k=0$;
3 – ОАР (6) 4-й ранг,
 $l=1, k=1$

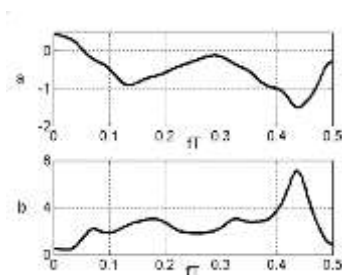


Рисунок 23.16, а. –
Распределение по
частоте асимметрии (а)
и эксцесса (b) первого
радиолокационного
сигнала

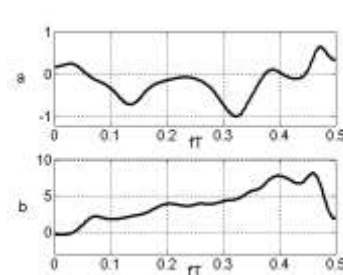


Рисунок 23.16, б –
Распределение по
частоте асимметрии (а)
и эксцесса (b) второго
радиолокационного
сигнала

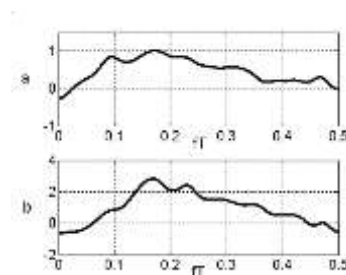


Рисунок 23.16, в –
Распределение по
частоте асимметрии (а)
и эксцесса (b) третьего
радиолокационного
сигнала

Аналогичные исследования проводились для ультразвукового зондирующего сигнала биологического происхождения, у которого коэффициенты асимметрии и эксцесса составляли $\gamma_1 = -0.74$, $\gamma_2 = 0.64$. На рис. 23.17 показаны графики АР (8) и ОАР (8) спектров второго, третьего и четвертого порядков этих сигналов. Хотя некоторые фрагменты спектров второго и третьего порядков совпадают, наблюдаются определенные отличия между ними. В частности, отличия есть между спектрами третьего порядка, найденными для $l=0$ и $l=1$. Спектры четвертого порядка, как уже отмечалось, имеют довольно близкое сходство со спектрами второго порядка.

В области перегиба в спектре второго порядка на частоте 0.35, на спектрах третьего и четвертого порядков наблюдаются отчетливые пики. На рис. 23.18 представлены графики $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$ для этих сигналов. Сравнение с графиками спектров показывает, что на частотах пиков, как правило, наблюдаются экстремумы $\gamma_1(f)$ и $\gamma_2(f)$. Изучение подобных закономерностей, по-видимому, может способствовать более глубокому пониманию исследуемых процессов.

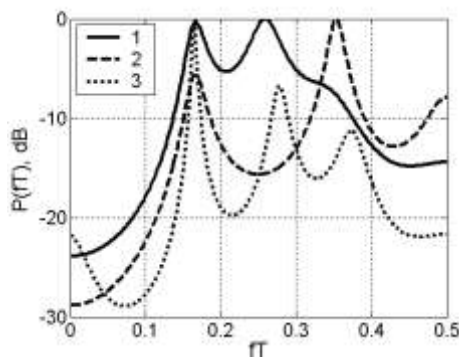


Рисунок 23.17, а – Выборочные параметрические спектры ультразвукового сигнала:

- 1 – АР (8);
- 2 – ОАР (8) 3-й ранг, $l = 0$;
- 3 – ОАР (8) 3-й ранг, $l = 1$

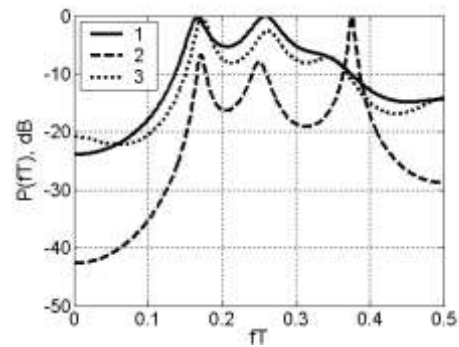


Рисунок 23.17, б – Выборочные параметрические спектры ультразвукового сигнала:

- 1 – АР (8);
- 2 – ОАР (8) 4-й ранг, $l = 0$, $k = 0$;
- 3 – ОАР (8) 4-й ранг, $l = 1$, $k = 1$

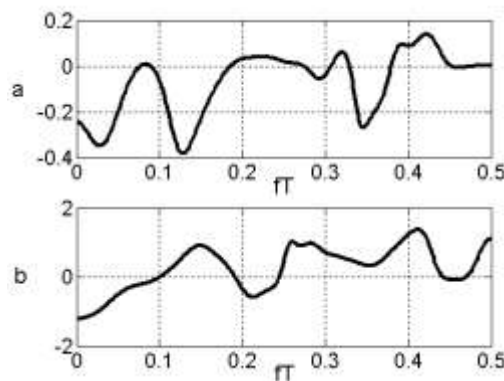


Рисунок 23.18 – Распределение по частоте асимметрии (а) и эксцесса (b) ультразвукового сигнала

23.3 Оценка параметров модели авторегрессии второго порядка сигналов при наличии аддитивного белого шума

Одной из проблем спектрального анализа является получение достоверной оценки СПМ полезного сигнала при наличии белого шума или коррелированной помехи [2]. На точность оценки параметров моделей линейного предсказания полезного сигнала существенное влияние оказывает

уровень помех. Влияние помех приводит к искажению, статистической неустойчивости получаемых спектральных оценок, ухудшению спектрального разрешения.

При наличии аддитивного белого шума смесь сигнала $x[t]$ с шумом $n[t]$ описывается выражением вида

$$y[t] = x[t] + n[t],$$

а его корреляционная функция

$$R_y[j] = R_x[j] + D_n \delta[j],$$

где $R_x[j]$ – корреляционная функция сигнала при отсутствии шума, D_n – дисперсия белого шума, $\delta[j]$ – дельта функция Дирака. Коэффициенты корреляции смеси связаны с коэффициентами корреляции $r_x[j]$ соотношениями

$$r_y[j] = \frac{R_y[j]}{D_y} = \frac{q^2}{1+q^2} r_x[j] = \beta r_x[j], \text{ при } j \neq 0, \quad r_y[0] = 1,$$

где q^2 — отношение сигнал–помеха, равное

$$q^2 = \frac{D_x}{D_n}.$$

Легко увидеть, что с ростом q^2 влияние шума на нормированную корреляционную функцию смеси уменьшается и $r_y[j] \rightarrow r_x[j]$. При $q^2 \rightarrow 0$, коэффициент корреляции смеси стремится к нулю, т. е. $r_y[j] \rightarrow 0$, $j \neq 0$. Повышение дисперсии белого шума приводит к росту ширины полосы СПМ смеси сигнала и белого шума. Это легко доказать на примере модели АР второго порядка [9]. Наличие аддитивного белого шума смещает случайным образом оценку частоты пиков СПМ сигнала $x[t]$. Следовательно, изменения оценок параметров моделей линейного предсказания при наличии белого шума искажают спектральные оценки.

Одним из методов снижения влияния помехи на оценки коэффициентов АР является регуляризация системы уравнений Юла–Уокера. При решении системы уравнений могут возникать неустойчивые решения. Такие решения появляются в тех случаях, когда незначительные изменения параметров системы уравнений приводят к существенному изменению решения системы,

например, при близости к нулю главного определителя матрицы из параметров системы линейных уравнений.

В работе [9] анализируется влияние аддитивного белого шума на спектральные оценки, полученные с помощью модели АР второго порядка. На основе метода регуляризации системы линейных алгебраических уравнений найден способ повышения точности АР спектрального оценивания процесса АР (2) при наличии белого шума. Если известно, что система уравнений имеет устойчивое решение, то его можно найти методами регуляризации [10]. С этой целью в окрестности плохо обусловленной задачи ищется устойчивое решение. Предполагается, что неустойчивость возникла из-за неточности оценки параметров системы уравнений. Для получения устойчивых решений необходимо выбрать параметр регуляризации, зависящий от точности исходной информации.

Проведенные методом статистического моделирования вычислительные эксперименты подтверждают эффект повышения точности спектральных оценок методом, названным авторами, модифицированной регуляризации. Однако этот метод сложно применять процессам АР произвольного порядка, есть также проблемы с его интерпретацией. Ниже представлено более перспективное направление повышения точности оценок спектров второго и высших порядков при воздействии аддитивных помех или белого шума.

23.4 Оценка спектральной плотности высших порядков негауссовых процессов при наличии аддитивных помех или белого шума

Рассмотрим случай, когда параметры моделей линейного предсказания негауссова процесса оцениваются по смеси $y[t]$ полезного сигнала $x[t]$ и коррелированной помехи $z[t]$

$$y[t] = x[t] + z[t]. \quad (23.1)$$

При наличии аддитивной, статистически не связанной с сигналом коррелированной помехи, корреляционная функция смеси определяется выражением

$$R_y[i] = R_x[i] + R_z[i].$$

Параметры моделей линейного предсказания определяются значениями функции корреляции. Поэтому наличие коррелированной помехи будет влиять на оценки величины параметров, что приведет к искажению оценок спектра.

Моментная функция произвольного порядка r смеси независимых процессов (23.1) определяется выражением

$$m_{ry}[j,l,...,v] = m_{rx}[j,l,...,v] + m_{rz}[j,l,...,v], \quad (23.2)$$

где $m_{rz}[j,l,...,v]$ – моментная функция помехи, которая зависит от сдвигов $j,l,...,v$, порядка моментной функции r , вида распределения, степени негауссовости. Например, для гауссова и равномерного распределения центральные моменты и моментные функции третьего порядка равны нулю.

Если моментная функция помехи равна нулю, выражение (23.2) преобразуется к виду

$$m_{ry}[j,l,...,v] = m_{rx}[j,l,...,v]$$

и влияние помехи на выборочную моментную функцию будет значительно меньше. Оно не исчезнет полностью, так при значительном уровне помехи растет вероятность того, что условие асимметричности распределения смеси может нарушиться.

Таким образом, когда имеются различия в вероятностном распределении сигнала и помехи, их спектральные плотности высших порядков могут существенно отличаться. Это связано с тем, что моментные и кумулянтные функции сигнала и помехи при таких условиях могут заметно отличаться. Следовательно, будут разными оценки и истинные значения параметров обобщенных моделей линейного предсказания и соответствующие им параметрические оценки спектров. Такое отличие статистических характеристик сигнала и помехи можно использовать для нахождения спектров высших порядков негауссовых и гауссовых процессов на фоне сильных коррелированных гауссовых и негауссовых помех.

Очень часто помехи формируются в результате суперпозиции многих сигналов или процессов с различными распределениями вероятностей. В этом случае распределение вероятности результирующего сигнала или процесса в силу центральной предельной теоремы приближается к гауссову. Центральные моменты и моментные функции нечетного порядка у гауссовых процессов равны нулю. Тогда центральный момент и моментная функция третьего порядка смеси негауссова сигнала и гауссовой помехи определяется моментной функцией сигнала. При этом следует учитывать, что присутствие гауссовой помехи нормализует анализируемый негауссов процесс, что снижает точность оценок статистик высших порядков.

23.5 Параметрическая оценка спектров третьего порядка негауссова сигнала при наличии широкополосной гауссовой коррелированной помехи

Приведем некоторые примеры использования статистик высших порядков для нахождения спектров сигналов в присутствии аддитивного белого шума и коррелированных помех. Оценивание спектральной плотности мощности анализируемого полезного сигнала на фоне коррелированной помехи, спектр которой накрывает спектр полезного сигнала или перекрывается с ним, может оказаться трудноразрешимой задачей [11, 12]. При оценивании спектральной плотности сигнала наличие такой помехи может привести к искажению формы спектральной плотности полезного сигнала, смещению на оси частот центральной частоты или пиков спектра, уширению полосы спектра сигнала. Предварительное подавление помехи в таких случаях не приводит к повышению точности оценки спектра полезного сигнала, т. к. при этом теряется также мощность сигнала.

Оценивание параметрических спектров второго и высших порядков на фоне помех и шумов зависит от помехоустойчивости параметров моделей линейного предсказания. Разработке способов помехоустойчивого оценивания параметров моделей АР посвящен ряд исследований [13–15]. Ниже будет показано, что оценки параметров моделей ОАР устойчивы к некоторым видам коррелированных помех и шумов. Для истинных процессов ОАР, полученных линейным преобразованием порождающих негауссовых процессов типа белого шума, коэффициенты АР и ОАР приблизительно совпадают, так как они представляют оценки линейного формирующего фильтра. В таких случаях помехоустойчивое оценивание коэффициентов ОАР моделей позволяет получить более точные оценки коэффициентов АР моделей, а, следовательно, и параметрические оценки СПМ.

Ниже рассмотрена задача нахождения оценки спектра негауссова сигнала с отличной от нуля моментной функцией третьего порядка при наличии аддитивной гауссовой коррелированной помехи [16]. Полагается, что помеха имеет спектр, полностью перекрывающий спектр полезного сигнала и имеет мощность, превышающую или равную мощности полезного сигнала. Продемонстрируем методом статистического моделирования, что полученные параметрические спектральные оценки с использованием обобщенных моделей линейного предсказания позволяют выделить спектры полезного сигнала или процесса с негауссовым распределением на фоне гауссовых коррелированных помех.

Пусть помеха представляет собой гауссов процесс АР шестого порядка. Форма спектра образована тремя модами с центральными частотами, не совпадающими с центральной частотой полезного сигнала. Центральные частоты спектральных мод помехи и их ширины полос составляли: $f_1 = 10$, $\Delta f_1 = 4$; $f_2 = 15$, $\Delta f_2 = 5$; $f_3 = 30$, $\Delta f_3 = 2$. Полезный сигнал имел одну спектральную моду с параметрами $f = 20$; $\Delta f = 5$. С помощью соотношений,

предложенных в [17], рассчитывались коэффициенты АР для выбранных характеристик спектров. Помеха и сигнал получены с помощью генератора АР (рис. 1.2) на основе рекуррентного выражения (1.1). Для генерации гауссовой помехи на вход формирующего фильтра подавался гауссов белый шум. Негауссов сигнал получен с использованием в качестве порождающего процесса белого шума с распределением Парето с параметром масштаба $c = 2$.

На рис. 23.19, а показаны выборочные оценки спектра имитационного негауссова сигнала для сечения $\omega_2 = 0$, полученные с помощью параметрической оценки (21.8), для сдвигов $l = 0$ (кривая 1) и $l = 1$ (кривая 2) модели ОАР(2) 3-го ранга. Спектр помехи, показанный на рис. 23.19, б, оценивался на основе модели АР (6). Параметры спектров полезного сигнала и помехи выбирались такими, чтобы было различие в положениях пиков, а спектр помехи перекрывал спектр сигнала.

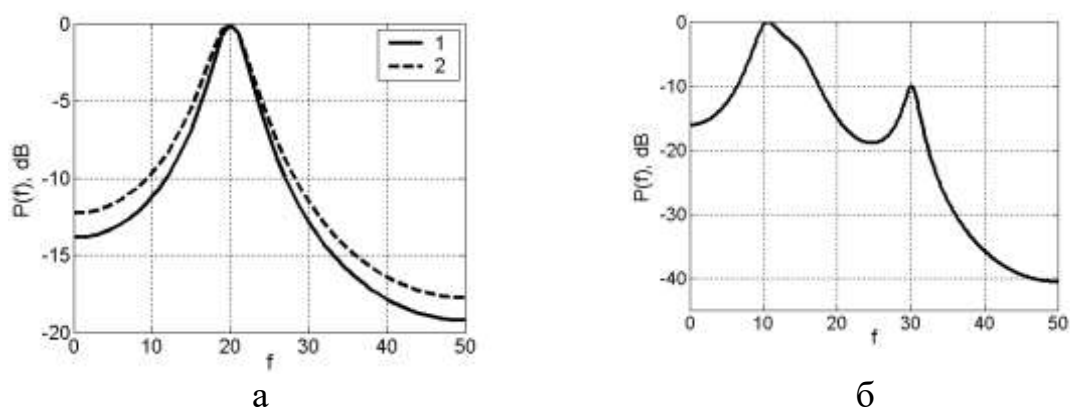


Рисунок 23.19 – Выборочные параметрические оценки спектра сигнала и помехи:

а – ОАР (2) 3-й ранг, $l = 0$ (кривая 1) и $l = 1$ (кривая 2),

б – АР (6) оценка СПМ помехи

В ходе статистических экспериментов получены аддитивные смеси сигнала и помехи с заданными спектрами и отношением сигнал–помеха (ОСП), который оценивался по выборкам сигнала и помехи. Степень негауссовости полученной смеси, которая оценивалась коэффициентом асимметрии (13.8, а), зависела от ОСП. Для получения устойчивых оценок спектров высших порядков негауссова процесса в аддитивной смеси с гауссовой помехой, необходимо чтобы распределение этой смеси оставалось негауссовым. Если уровень гауссовой помехи в смеси слишком велик, может оказаться, что смесь также будет иметь гауссово распределение или, по крайней мере, близкую к нулю моментную функцию третьего порядка. В таких случаях, очевидно, удовлетворительных спектральных оценок получить нельзя. О степени влияния ОСП на коэффициент асимметрии смеси можно судить по данным табл. 23.1.

Таблица 23.1 Зависимость коэффициента эксцесса от ОСП

ОСП, дБ	∞	6	4,8	3	0	-3	-6	-10
γ_1	6.56	6.33	6.45	5.32	2.46	0.5	0.02	-0.03

Как следует из данных табл. 23.1 при ОСП равном или меньшем -6 дБ значение асимметрии близко к нулю и негауссовы свойства процесса проявляются слабо. Поэтому, как показали эксперименты, при таких ОСП выборочная оценка спектральной плотности в большинстве случаев не позволяет выявить негауссов сигнал. С ростом ОСП негауссовы свойства смеси усиливаются, что отражает рост значения асимметрии. В этом случае моментные функции третьего порядка смеси отличны от нуля, что позволяет оценить параметры ОАР негауссова сигнала.

На рис. 23.20, а представлены выборочные АР (8) оценки СПМ смеси гауссовой помехи и негауссова сигнала при различных ОСП. По виду спектра второго порядка сложно определить наличие полезного сигнала в анализируемой смеси, и тем более, оценить его спектр. Сказанное справедливо и для оценок спектральной плотности третьего порядка смеси для $\omega_2 = 0$, полученных преобразованием Фурье моментных функций третьего порядка со сдвигом $l=1$ (рис. 23.20, б), взвешенных окном Парзена длиной $N=101$. Длина реализации смеси составляла $N=1000$ отсчетов.

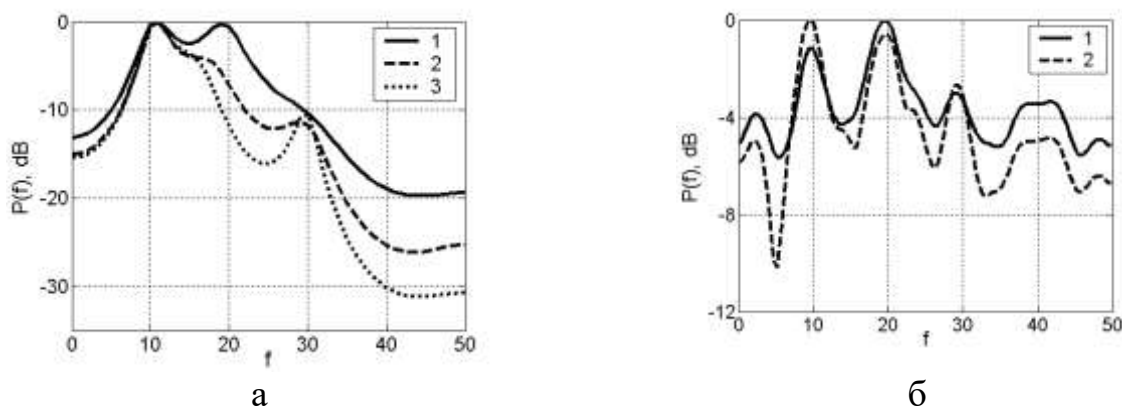


Рисунок 23.20 – Выборочные оценки спектра смеси гауссовой помехи и негауссова сигнала при различных ОСП:

а – АР (8) оценки СПМ смеси гауссовой помехи и негауссова
(1 – ОСП = 0 дБ, 2 – ОСП = -3 дБ, ОСП = -6 дБ);

б – спектр третьего порядка, полученный методом моментограмм
для $l=1$ (1 – ОСП = 0 дБ, 2 – ОСП = -3 дБ)

Используя оценки спектральной плотности на основе модели ОАР третьего ранга, можно получить достаточно достоверную оценку спектра третьего порядка сигнала в смеси с гауссовой коррелированной помехой. На рис. 23.21, а, б представлены графики, полученные наложением оценок спектра ОАР (2) третьего ранга для 100 реализаций смеси. На рис. 23.22 приведены гистограммы

значений центральных частот спектральных оценок. Так, для случая, когда мощности сигнала и помехи равны и длина реализации составляет $N=1000$ отсчетов (рис. 23.21, а) наблюдается уверенная оценка спектральной плотности сигнала, худшие результаты получены для реализации длиной $N=500$ отсчетов и $ОСП = 0.5$, (рис. 23.21, б). Как видно из графика на рис. 23.21, б, присутствие в смеси мощной помехи приводит к искажениям спектральных оценок: расширению полосы спектра сигнала, смещению центральной частоты спектра.

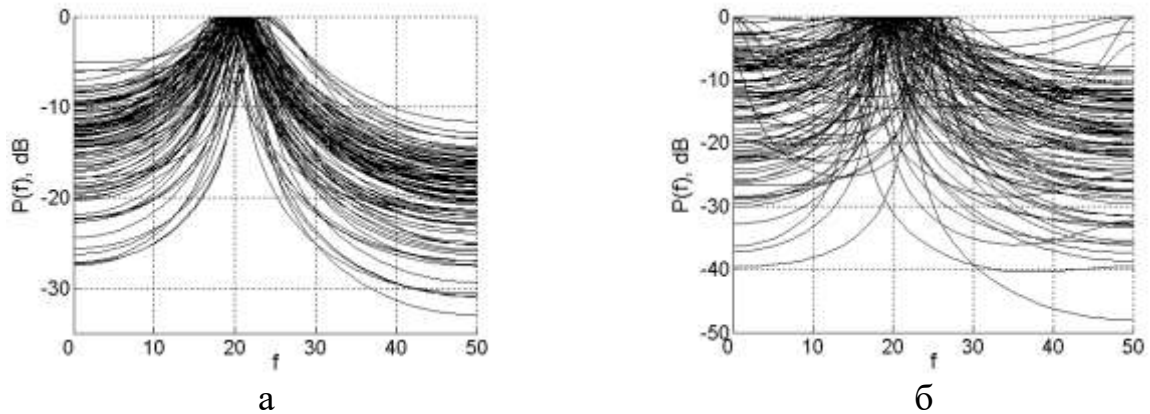


Рисунок 23.21 – Выборочные параметрические оценки спектров полезного сигнала, найденных по модели ОАР (2) третьего ранга для 100 реализаций смеси сигнала и помехи:

а – оценки получены по $N=1000$ отсчетов при $ОСП = 0$ дБ,
б – оценки получены по $N=500$ отсчетов и $ОСП = 0.5$

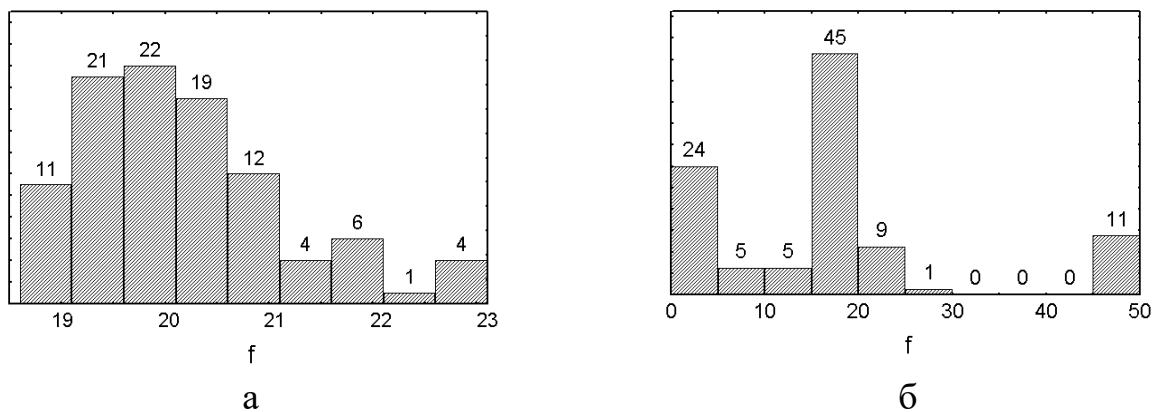


Рисунок 23.22 – Гистограммы центральной частоты спектра ОАР (2) третьего ранга для смеси сигнала и помехи:

а – оценки спектра получены по $N=1000$ отсчетов при $ОСП = 0$ дБ,
б – оценки получены по $N=500$ отсчетов и $ОСП = 0.5$

С увеличением уровня мощности помехи или при уменьшении длины реализации смеси наблюдается более значительное искажение спектральных оценок, а в некоторых случаях это приводит к получению «неправдоподобных» оценок спектра (рис. 23.21, б). В табл. 23.2 приведены значения центральных частот (курсивом) и их среднеквадратических

отклонений оценок ОАР спектра сигнала, для сдвига $l=1$ моментных функций третьего порядка, в зависимости от длины реализации смеси и ОСП. Данные получены по 100 реализациям.

Таблица 23.2 Значения центральных частот и их среднеквадратических отклонений для различных ОСП

ОСП \ N	1000	500	300	200
0 дБ	20.13	19.84	21.81	20.38
	1.05	4.93	9.61	11.36
–3 дБ	20.95	16.99	15.86	—
	12.57	14.16	15.13	
–6 дБ	13.51	12.81	—	—
	16.25	15.85		

Предложенный метод оценки спектра негауссова сигнала при наличии коррелированной гауссовой помехи с малым ОСП основан на использовании различий их моментных функций третьего порядка. Показано методом статистического моделирования, что параметрические оценки спектров высших порядков дают лучшие оценки, чем спектры, найденные с помощью преобразования Фурье. Доказано, что использование более полной информации о негауссовом процессе, содержащейся в моментных функциях, позволяет успешно решать задачи, которые невозможно решить в рамках корреляционной теории.

23.6 Оценка спектральной плотности негауссова процесса на фоне гауссова белого шума

Точность оценки спектральной плотности мощности полезного сигнала на фоне сильных помех и шумов низка. В некоторых интересных с практической точки зрения случаях можно существенно повысить точность оценки спектра негауссова сигнала при наличии сильных шумов, если использовать кумулянтные спектры высших порядков [18]. Например, для гауссова белого шума четвертый кумулянт и кумулянтная функция четвертого порядка равны нулю. Поэтому при выборочной оценке кумулянтной функции смеси негауссова сигнала и гауссова белого шума, влияние последнего на оценку кумулянтной функции будет значительно ослабленным. Такое отличие статистических характеристик сигнала и шума

предлагается использовать для нахождения спектров высших порядков на фоне сильных шумов с нулевыми кумулянтами и кумулянтными функциями.

Негауссовы процессы могут быть получены, как правило, либо линейным или нелинейным преобразованием порождающего негауссова белого шума, либо нелинейным преобразованием порождающего гауссова белого шума. Если негауссов процесс был получен линейным преобразованием негауссова белого шума, например, с помощью авторегрессионного формирующего фильтра, то его сечения многомерных спектров высших порядков могут совпадать со спектром второго порядка. Поэтому у многих реальных негауссовых процессов сечения спектров высших порядков незначительно отличаются от спектров второго порядка. Таким образом, оценивая спектры высших порядков на фоне гауссовых шумов, можно получить также значительную информацию о спектре второго порядка.

Рассмотрим пример параметрической спектральной оценки негауссова процесса на фоне некоррелированного гауссова шума, полученной на основе кумулянтной ОАР модели четвертого ранга. Реализации негауссовых процессов сигналов получены с помощью формирующего авторегрессионного фильтра второго порядка с коэффициентами $\Phi[1]=0.53$, $\Phi[2]=-0.73$. Указанные коэффициенты авторегрессии для заданных параметров спектральной плотности рассчитаны по методу, описанному в [17]. Центральная частота спектра сигнала задавалась $f=0.2$, а ширина спектральной моды $\Delta f=0.05$ в относительных единицах. Порождающим процессом был негауссов белый шум с одномерным распределением Парето с параметром формы $s=2$. Параметрическая оценка СПМ сигнала, рассчитанная по полученным коэффициентам АР, представлена на рис. 23.23.

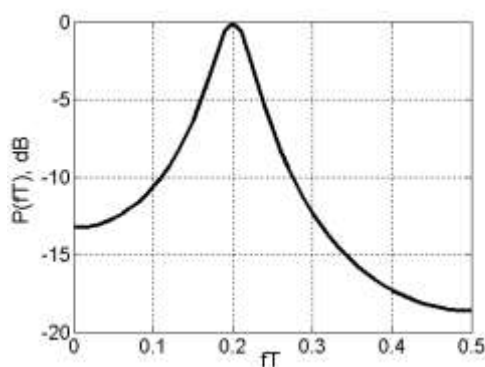


Рисунок 23.23 – Параметрическая АР(2) оценка СПМ сигнала

Так как сформированный негауссов сигнал является процессом авторегрессии, полученным с помощью линейного формирующего фильтра, то его спектры высших порядков будут иметь вид, адекватный спектру второго порядка, представленного на рис. 23.23. Это объясняется тем, что амплитудно–частотная характеристика (АЧХ) второго и высших порядков при $\omega_2 = \omega_3 = 0$

определяются параметрами линейного формирующего фильтра, которые были равны коэффициентам веса фильтра.

В результате статистического моделирования получены аддитивные смеси сигнала и шума для различных отношений сигнал/шум (ОСШ). При добавлении гауссова белого шума значительно изменялась степень негауссовости полученной смеси, которая оценивалась по значениям кумулянта четвертого порядка. Для получения устойчивых оценок спектров высших порядков негауссова процесса по аддитивной смеси с гауссовой помехой, необходимо чтобы распределение этой смеси оставалось негауссовым. Если уровень гауссовой помехи в смеси слишком велик, может оказаться, что смесь также будет иметь гауссово распределение или, по крайней мере, близкую к нулю кумулянтную функцию четвертого порядка. В таких случаях удовлетворительных спектральных оценок сигнала получить нельзя.

На рис. 23.24 и рис. 23.25 представлены графики оценок сечения спектра четвертого порядка, полученные по кумулянтной модели ОАР при $p=2$ для разных ОСШ и длин выборок N . Сдвиги кумулянтной функции смеси составляли $k=1, l=1$.

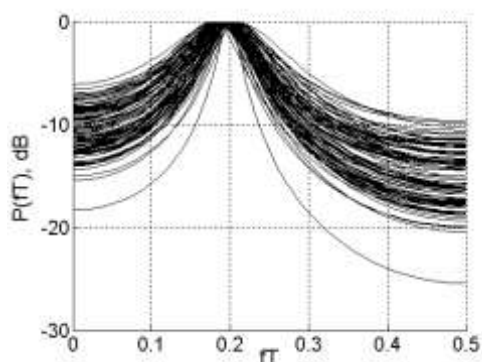


Рисунок 23.24 – Выборочные параметрические оценки спектра четвертого порядка, полученные по кумулянтной модели ОАР (2) 4-го ранга, смеси полезного сигнала и гауссова белого шума, полученные для 100 реализаций, $l=1, k=1$, ОСШ = 0дБ, $N=1000$

В табл. 23.3 приведены значения центральных частот (курсивом) и среднеквадратических отклонений оценок ОАР спектра сигнала в зависимости от длины реализации смеси и ОСШ. Данные получены усреднением значений центральной частоты по 100 реализациям.

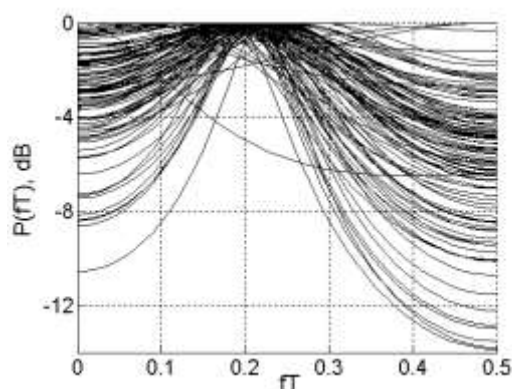


Рисунок 23.25 – Выборочные параметрические оценки спектра четвертого порядка, полученные по кумулянтной модели ОАР 4-го ранга, смеси полезного сигнала и гауссова белого шума, полученные для 100 реализаций, $l=1, k=1$, ОСШ = -3дБ, $N=500$

Таблица 23.3 Значения центральных частот и их среднеквадратических отклонений для различных ОСШ

ОСШ \ N	1000	500	300	200
0 дБ	19.96	19.81	19.68	19.74
	0.63	1.16	2.16	2.6
-3 дБ	19.93	19.9	19.16	19.47
	2.23	6.93	9.09	10.61
-6 дБ	21.31	24.0	—	—
	14.08	16.09		

Предложенный метод оценки спектра негауссова сигнала при наличии некоррелированного гауссова шума с малым ОСШ основан на использовании различий их кумулянтных функций четвертого порядка. Методом статистического моделирования показано, что параметрические оценки спектров высших порядков дают улучшение точности спектральной оценки негауссова сигнала при наличии аддитивного белого шума. Этим методом можно пользоваться, когда необходимо выделить спектр некоторого порядка сигнала при наличии некоторых классов помех и шумов. Как показывают исследования реальных случайных процессов, во многих случаях оценки их СПМ довольно точно совпадают со спектрами высших порядков. В таких случаях предложенный метод может быть применим для повышения точности оценки СПМ, путем оценивания спектров высших порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кей С.М., Марпл С.Л. Современные методы спектрального анализа // ТИИЭР. – 1981 – Т.69, №11, с. 5–51.
2. Марпл – мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
3. Дженкинс Г. Ватс Д. Спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1971. – Вып.1. – 287 с.
4. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с. англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
5. Кармалита В.А. Цифровая обработка случайных колебаний. – М: Машиностроение, 1986. – 80 с.
6. Фридландер Б. Методы спектрального оценивания на основе решетчатой структуры // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, №9. – С. 95–125.
7. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980. – 95 с.
8. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
9. Горелов Д.Ю., Тихонов В.А. Оценка параметров модели авторегрессии второго порядка сигналов с аддитивным белым шумом // АСУ и приборы автоматики. – 2002. – №121. – С. 51–56.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
11. Власенко В.А., Калашников В.А., Калашникова Е.А., Назаренко А.Ф. Синтез нерекурсивных цифровых фильтров сигналов, спектр которых перекрывается со спектром помехи // Известия ВУЗов. серия «Радиоэлектроника». – 2000. – Т.43, № 8. – С. 55–60.
12. Касаткин Л.В., Рогов П.Д., Фенев Д.В. Подавление помех от гидрометеоров для импульсно-доплеровских РЛС миллиметрового диапазона // Известия ВУЗов. Серия «Радиоэлектроника». – 2000. – Т.43, № 5. – С. 44–48.
13. Шалтаните В. Оценка параметров авторегрессионной последовательности, измеряемой в присутствии аддитивных помех // Статистические проблемы управления. – Вильнюс: ИМиК АН ЛССР, 1979. – №39. – С. 55–73.
14. Грицюк В.И. Помехоустойчивые оценки параметров в авторегрессионных моделях // Радиоэлектроника и информатика. – 2001. – № 4. – С. 77–78.
15. Грицюк В.И. Методы помехоустойчивого оценивания при анализе временных рядов // Радиоэлектроника и информатика. – 2003. – №2. – С. 57–58.
16. Тихонов В.А. Нетребенко К.В. Параметрическая оценка спектров третьего порядка смеси негауссова сигнала и гауссовой коррелированной помехи // Известия ВУЗов. Серия «Радиоэлектроника». – 2005. – Т.48, №2. – С.35–43.

17. Тихонов В.А., Русановский Д.Е., Тихонов Д.В. Генерирование узкополосных имитационных случайных процессов // Радиотехника и информатика. – 1999. – №4. – С. 83–85.

18. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Оценивание спектра негауссова сигнала на фоне гауссова белого шума с помощью кумулянтных функций // Радиотехника и информатика. – 2004. – № 4. – С. 10–14.

24 СИНТЕЗ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

24.1 Введение

Конструктивные свойства моделей линейного предсказания позволяют сравнительно просто синтезировать структуру обеляющих и формирующих фильтров по параметрам моделей помехи или полезного сигнала [1–8]. На основе моделей линейного предсказания синтезируются линейные фильтры прямой реализации и решетчатой структуры. Структура фильтров прямой реализации следует из разностных уравнений моделей линейного предсказания. Количество звеньев таких фильтров равно порядку моделей, а коэффициенты усиления равны коэффициентам моделей. К решетчатым структурам пришли путем решения задачи вычисления коэффициентов АР p -го порядка по коэффициентам АР $(p-1)$ -го порядка. Количество звеньев решетчатых фильтров равно порядку моделей, а коэффициенты усиления равны последним коэффициентам АР моделей АР порядков от одного до p .

К недостаткам фильтров линейного предсказания, рассчитываемым по моделям полезных сигналов или помех, следует отнести чувствительность оценок параметров фильтров к помехам и шумам. В ряде случаев, когда нет помехового канала или нет возможности предварительного обучения по помехе, возникают проблемы настройки фильтра на полезный сигнал, если спектры помехи сигнала пересекаются или спектр помехи накрывает спектр сигнала.

Как было показано во втором и третьем разделах, используя обобщенные модели линейного предсказания также можно синтезировать линейные фильтры прямой реализации. Структура таких фильтров аналогична структуре фильтров, синтезированных по классической модели линейного предсказания. Отличие состоит в способе расчета параметров фильтров по моментным функциям высших порядков. Значения моментных функций зависят от степени негауссовости случайного процесса.

В разделе рассмотрены некоторые вопросы расчета параметров фильтра по модели процесса при наличии аддитивной помехи. Показаны условия, при которых наличие помехи или шума меньше влияют на точность оценки параметров фильтров линейного предсказания. Этот эффект продемонстрирован также на примере винеровского компенсатора негауссовых помех на основе статистик третьего порядка. На основе ОАР модели третьего ранга, построена теория обобщенных решетчатых фильтров, которые превосходят по эффективности фильтры прямой реализации на основе ОАР модели, особенно для адаптивной обработки сигналов. При этом рассмотрен случай теплицевой моментной матрицы. Задачу синтеза обобщенного решетчатого фильтра можно решить и для нетеплицевой моментной матрицы. Однако эти вопросы в книге не рассматриваются.

24.2 Оценка параметров обобщенных фильтров линейного предсказания на фоне негауссовых коррелированных помех

Рассмотрим задачу нахождения оценки параметров режекторного и накапливающего фильтров при анализе аддитивной смеси полезного сигнала и помехи, имеющих отличия в статистиках четвертого порядков.

Ниже анализируются два примера такой смеси, когда полезный сигнал и помеха имеют разные негауссовы распределения. Рассматривается случай, когда априори нельзя по спектру второго порядка смеси определить полосы частот, соответствующие полезному сигналу и помехе.

Такие ситуации возникают, например, при обработке речевых сигналов, когда полезный сигнал нестационарен и имеет сложный спектр [9]. При этом помеха также нестационарна, создается различными источниками и имеет разные характеристики спектра [10]. В системах акустического зондирования атмосферы наличие шумов и помех от различных источников приводит к снижению точности оценки параметров атмосферы. Предварительно обучиться по помехе и составить карту помех достаточно сложно в виду нестационарности и кратковременности многих помех. В задаче идентификации и анализе сложных систем по их АЧХ, как правило, оценивание АЧХ приходится проводить при наличии входных шумов измерения или мешающих процессов [11, 12]. При этом получаются смещенные оценки АЧХ. В этих и подобных ситуациях решение проблемы возможно, если при настройке фильтров учитывать различие статистик высших порядков полезного сигнала и помехи или шума.

В [13, 14] нами рассмотрен случай, когда негауссовы полезные сигналы и помехи имеют отличные от нуля моментные функции третьего и четвертого порядков. Решение поставленной задачи основано на оценке параметров моментной модели ОАР четвертого ранга, которые применяются для спектрального анализа негауссовых процессов.

Синтез режекторного и накапливающего фильтров предлагается производить на основе параметров моментной модели ОАР четвертого ранга. Применение моделей линейного предсказания и основанной на этих моделях параметрической оценки спектров дает в некоторых случаях преимущества по сравнению с использованием коррелограммного или периодограммного методов оценок СПМ. Как показывают проведенные нами исследования, у многих негауссовых процессов сечения оценок многомерных спектров третьего, а особенно четвертого порядков, совпадают с оценками СПМ. Поэтому АЧХ фильтров можно рассчитывать не только по СПМ полезного сигнала или помехи, но и по их спектрам высших порядков.

Конструктивные особенности моделей линейного предсказания позволяют сравнительно просто синтезировать обеляющие и формирующие фильтры, которые можно использовать в качестве режекторных и накапливающих фильтров соответственно. Параметры таких фильтров рассчитываются по моментным или кумулянтным функциям высших порядков

полезного сигнала или помехи. Например, если значение эксцесса значительно больше у полезного сигнала, чем у помехи, то можно синтезировать фильтр накопления сигнала. В тех случаях, когда эксцесс больше у коррелированной помехи, используя параметры ОАР модели помехи, можно синтезировать обеляющий фильтр.

При такой постановке задачи полезный сигнал и помеха будут иметь отличающиеся моментные функции четвертого порядка. Вследствие этого будут разными параметры обобщенных моделей линейного предсказания и соответствующие им параметрические оценки спектров. Такое отличие статистических характеристик сигнала и помехи предлагается использовать для нахождения частотных характеристик режекторного и накапливающего фильтров.

Продemonстрируем методом статистического моделирования принципиальную возможность применения фильтров, описываемых частотными характеристиками четвертого порядка, для выделения полезного негауссова сигнала на фоне негауссовых помех. Хотя в рассматриваемых примерах центральные частоты одномодовых спектров сигналов и помех отличаются по частоте, можно решать и более сложные задачи. Например, когда полоса частот сигнала лежит в пределах полосы частот более широкополосной помехи [15]. В следующем подразделе на примере винеровского фильтра будет показано, что использование различий в спектре третьего порядка сигнала и помехи (шума) также позволяет рассчитать параметры фильтров.

Рассмотрим первый случай, когда помеха представляет собой негауссов процесс ОАР(2) с одномодовым спектром, центральной частотой $f_n = 15$ и шириной полосы $\Delta f_n = 5$ ($T = 0.01$). Негауссов полезный сигнал имел также одну спектральную моду с параметрами $f_c = 25$, $\Delta f_c = 1$. С помощью соотношений (1.19, б) рассчитывались коэффициенты АР формирующего фильтра для выбранных характеристик спектров. Помеха и сигнал были сгенерированы с помощью рекуррентного выражения (1.1). Для генерации полезного сигнала на вход формирующего фильтра (рис. 24.1) подавался белый шум с равномерным распределением. Помеха была получена с использованием в качестве порождающего процесса белого шума с гамма-распределением с параметрами масштаба и формы, равными $c=1$ и $b=0.1$ соответственно. Значение коэффициента эксцесса сигнала равно $\gamma_{2c} = -1$, для помехи – $\gamma_{2n} = 11.7$. В ходе статистических экспериментов была получена аддитивная смесь сигнала и помехи длиной $N = 400$ отсчетов с отношением ОСП = -3 дБ и коэффициентом эксцесса $\gamma_{2cm} = 6.53$. На рис. 24.1 показаны выборочные АР (2) оценки СПМ помехи (кривая 1) и сигнала (кривая 2).

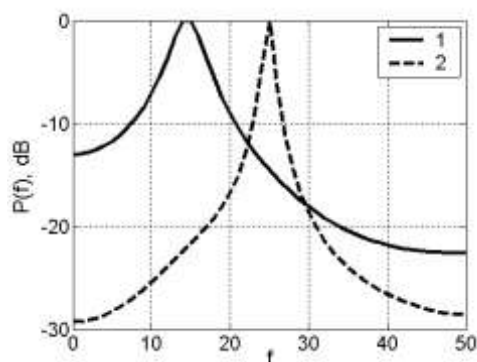
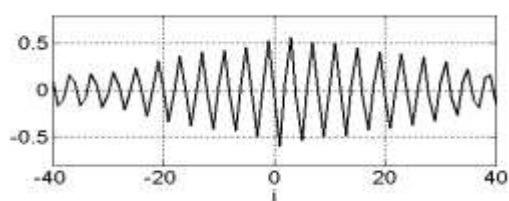
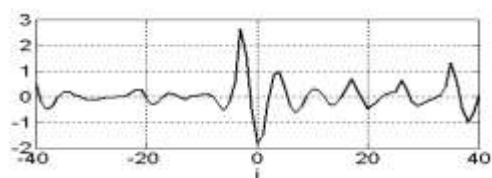


Рисунок 24.1 – Выборочные параметрические АР (2) оценки СПМ:
1 – помехи; 2 – сигнала.

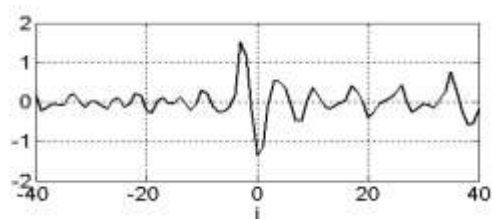
На рис. 24.2 представлены сечения моментных функций четвертого порядка сигнала, помехи и их смеси для сдвигов $k = -2$, $l = 1$. Из графиков видно, что для выбранного сечения сигнал с меньшим значением эксцесса незначительно влияет на результирующую моментную функцию смеси.



а



б



в

Рисунок 24.2 – Выборочные оценки моментных функций четвертого порядка для сдвигов $k = -2$, $l = 1$: а – негауссова сигнала с меньшим, чем у помехи, значением эксцесса, б – негауссовой помехи, в – смеси сигнала и помехи.

По виду СПМ второго порядка сложно однозначно судить о наличии полезного сигнала в анализируемой смеси, если априори не известно, в какой частотной области находится спектр полезного сигнала. На рис. 24.3 представлены выборочные АР (6) (кривая 1) и ОАР (2) (кривая 2) оценки спектральной плотности смеси сигнала и помехи. Как видно из графиков, различия в статистиках четвертого порядка сигнала и помехи приводит к существенному отличию в оценках СПМ смеси и спектре четвертого порядка смеси. Эти различия предлагается использовать для расчета параметров фильтров.

Для синтеза режекторного фильтра помехи необходимо оценить спектральную плотность помехи. Присутствие в смеси полезного сигнала приводит к искажениям спектральных оценок помехи: расширению полосы спектра помехи и смещению центральной частоты спектра помехи, которая увеличивается с ростом ОСП. Для синтеза режекторного фильтра использовались параметры оценки спектра четвертого порядка помехи. После режекции помехи в смеси выходной сигнал имел АР (6) спектр (рис. 24.4), у которого значение частоты спектрального максимума достаточно близко к аналогичному параметру спектра сигнала (рис. 24.1). За счет подавления помехи увеличилась ширина полосы сигнала на выходе.

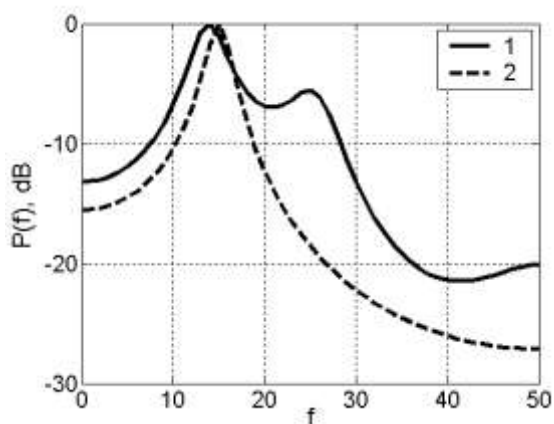


Рисунок 24.3 – Выборочные параметрические оценки спектральной плотности смеси негауссова сигнала и негауссовой помехи:

- 1 – по модели АР (6);
- 2 – по модели ОАР (2) четвертого порядка для $k = -2$, $l = 1$

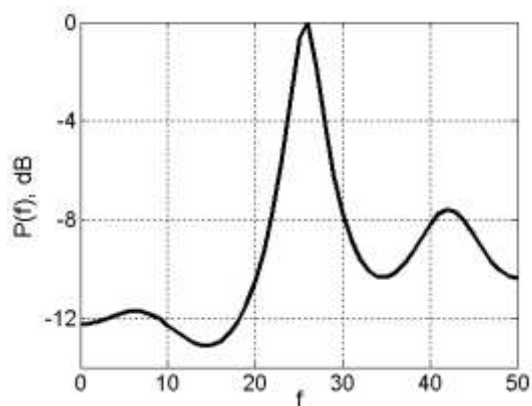


Рисунок 24.4 – Выборочная параметрическая оценка спектральной плотности мощности выделенного негауссова сигнала, полученная по модели АР (6)

Для оценки ОСП на выходе обесцвечивающего фильтра, через него поочередно пропусклся полезный сигнал и помеха с последующей оценкой их мощности на выходе. Найденное ОСП составляло 3,24 дБ. Применяя накапливающий фильтр после обесцвечивания коррелированной помехи, можно дополнительно повысить ОСП после обработки смеси.

Во второй серии экспериментов негауссова помеха являлась процессом ОАР второго порядка с одномодовым спектром, с центральной частотой $f_n = 10$ и шириной полосы $\Delta f_n = 10$. Негауссов полезный сигнал имел также одну спектральную моду с параметрами $f_c = 20$, $\Delta f_c = 5$. Помеха была сформирована с использованием в качестве порождающего процесса белого шума с релеевским распределением с параметром $\sigma = 0.3$, а сигнал получен с использованием белого шума с распределением Парето с параметром формы $s = 2$. На рис. 24.5 приведены выборочные оценки АР (2) СПМ сигнала и помехи. Коэффициент эксцесса помехи составлял $\gamma_{2n} = 0.55$, сигнала – $\gamma_{2c} = 3.87$. Полученная смесь длиной $N = 300$ отсчетов при ОСП = 0 дБ имела коэффициент эксцесса $\gamma_{2см} = 0.52$. Значительное снижение коэффициента эксцесса объясняется не только его малым значением у помехи, но и частичной нормализацией аддитивной смеси в силу центральной предельной теоремы.

На рис. 24.6 приведены моментные функции четвертого порядка сигнала, помехи и аддитивной смеси для сечения, соответствующего сдвигам $k = -2, l = 0$. Заметно определенное сходство в поведении моментных функций сигнала и смеси в интервале сдвигов $j = -10 \div 4$. Оценки спектра смеси, полученные по моделям АР (6) (кривая 1) и ОАР (2) четвертого ранга (кривая 2), представлены на рис. 24.7. Присутствие в смеси достаточно мощной помехи привело к искажению ОАР (2) оценки спектра, выраженному в сужении ширины спектра сигнала в смеси и смещению частоты пика. Нелинейность параметрических оценок особенно заметна на широкополосных процессах. Вследствие этого, оценки АР спектров помехи и смеси имеют смещенные частоты пиков помехи.

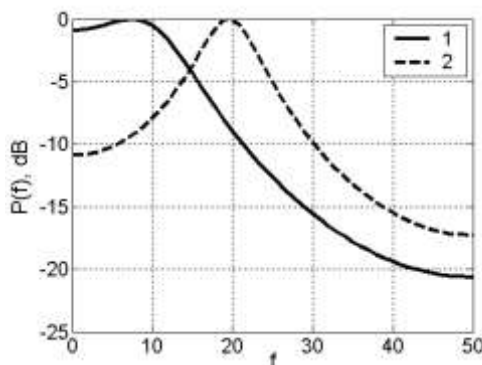
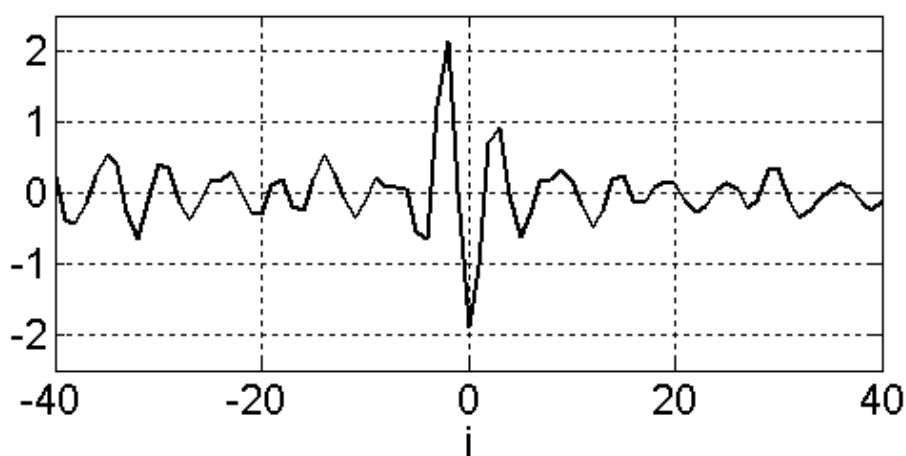


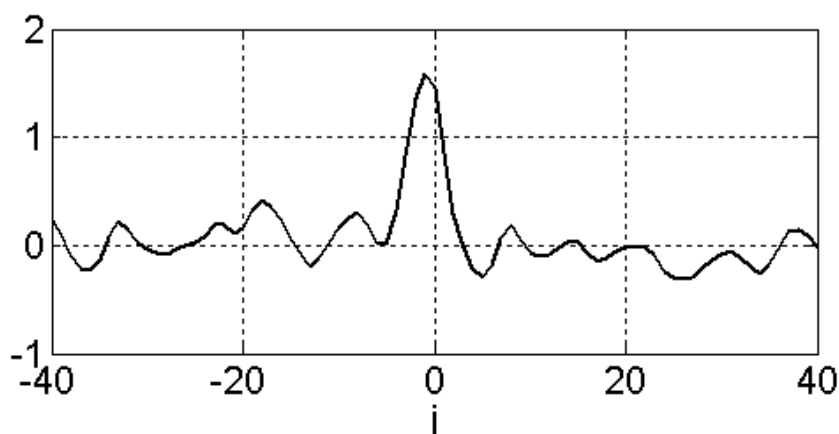
Рисунок 24.5 – Выборочные параметрические АР (2) оценки СПМ:

1 – помехи, 2 – сигнала

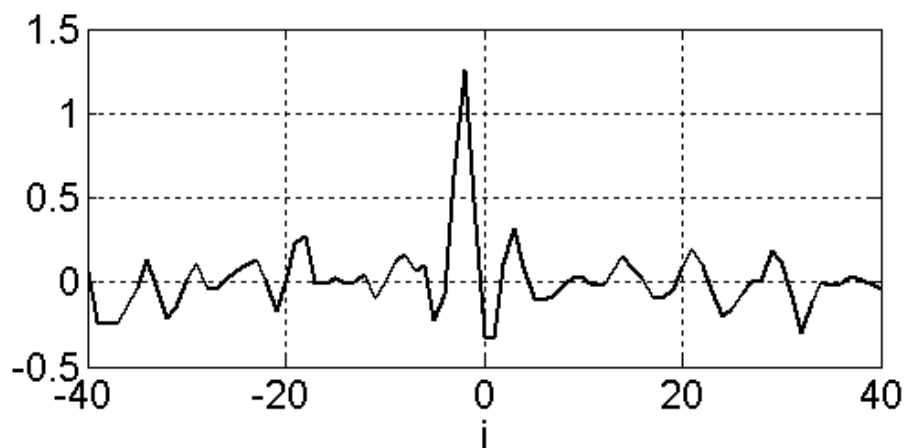
Для синтеза накапливающего фильтра использовались параметры модели ОАР четвертого ранга смеси сигнала и помехи. Коэффициенты модели ОАР оценивались по выборке смеси сигнала и помехи. Так как значение эксцесса у сигнала значительно выше, чем у помехи, коэффициенты модели ОАР четвертого ранга, рассчитываемые по моментной функции четвертого порядка, соответствуют свойствам сигнала. После фильтрации смеси накапливающим фильтром, выходной сигнал имел АР (б) спектр, показанный на рис. 24.8. Видно, что процедура накопления сигнала вызвала незначительное сужение спектра сигнала на выходе и способствовала значительному снижению уровня помехи. ОСП на выходе накапливающего фильтра составляло 3,2 дБ.



а



б



в

Рисунок 24.6 – Выборочные оценки моментных функций четвертого порядка для сдвигов $k = -2$, $l = 0$:

а – негауссова сигнала с большим, чем у помехи, значением эксцесса, б – негауссовой помехи, в – смеси

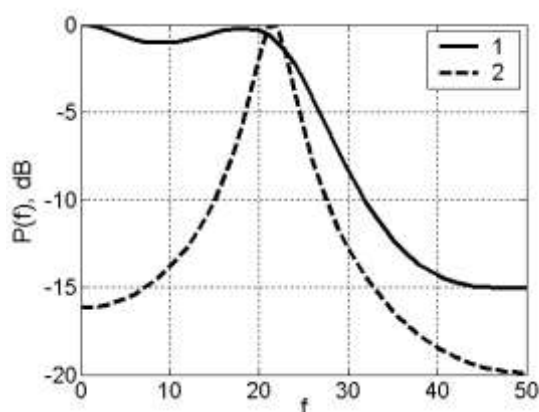


Рисунок 24.7 – Выборочные оценки параметрической спектральной плотности смеси сигнала и помехи:

1 – по модели АР (6); 2 – по модели ОАР (2) 4-го ранга для $k = -2, l = 0$

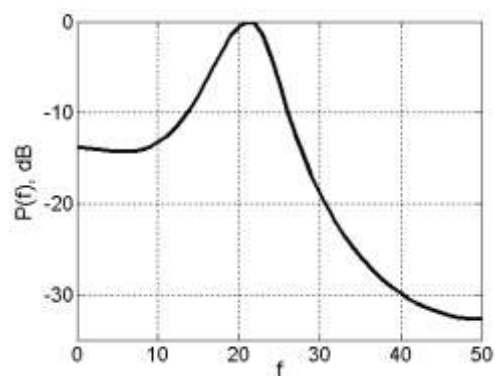


Рисунок 24.8 – Выборочная параметрическая оценка по модели АР (6) спектральной плотности мощности выделенного негауссова сигнала

Таким образом, методом статистического моделирования доказано, что использование более полной информации о негауссовом процессе, содержащейся в моментных функциях, позволяет успешно решать задачи, которые невозможно решать в рамках корреляционной теории. Применяя описанный в статье метод, можно также выделять полезный сигнала на фоне более широкого класса помех с различными вероятностными распределениями, используя ОАР модели других рангов.

24.3 Винеровский компенсатор негауссовых помех на основе статистик третьего порядка

Винеровская теория фильтрации применяется для решения ряда прикладных задач [16 – 18]. Коэффициенты цифрового винеровского фильтра вычисляются с использованием автокорреляционной функции входного сигнала и взаимной корреляционной функции входного и оцениваемого сигналов. Наличие аддитивного шума в основном и опорном каналах влияет на точность оценивания коэффициентов компенсатора помех, что снижает эффективность подавления помех. Покажем, что в тех случаях, когда компенсируемая помеха и шум имеют отличия в статистиках третьего порядка, возможно повышение эффективности подавления помех винеровским фильтром.

Для негауссовых сигналов параметры фильтра можно рассчитать по моментным функциям высших порядков. Ниже будут получены выражения для расчета параметров линейного фильтра с конечной импульсной характеристикой по моментным функциям третьего порядка. Если аддитивный шум имеет гауссово распределение, то параметры фильтра, рассчитанные по моментным функциям третьего порядка, менее чувствительны к этому шуму. Это происходит в силу того, что моментные функции третьего порядка сигналов с гауссовым распределением равны нулю.

Нами получены выражения для расчета коэффициентов винеровского компенсатора с опорным каналом негауссовых коррелированных помех [19]. Для компенсации помех применяется фильтр, представленный на рис. 24.9, имеющий помеховый опорный канал [20].

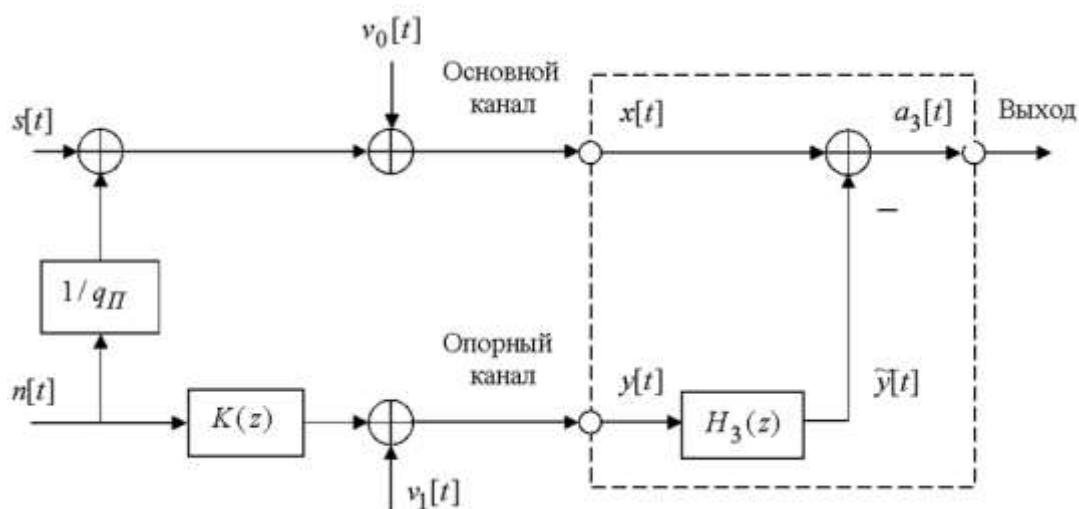


Рис. 24.9 – Винеровский фильтр с опорным помеховым каналом

На основной канал поступают гауссов полезный сигнал $s[t]$, а также негауссова помеха $n[t]$ и гауссова помеха $v_0[t]$. На вход опорного канала действуют помеха $n_1[t]$ и аддитивная гауссова помеха $v_1[t]$. Коррелированная негауссова помеха $n[t]$ в опорном канале преобразуется каналом с линейной передаточной функцией $K(z)$ в помеху $n_1[t]$. Полагаем, что помехи $v_0[t]$ и $v_1[t]$ могут быть как коррелированными, так и типа белого шума. При винеровском подходе полагают, что помеха $n[t]$ некоррелирована с сигналом $s[t]$, а помехи $v_0[t]$ и $v_1[t]$ некоррелированы между собой, а также с $s[t]$ и $n[t]$.

Для расчета вектора коэффициентов фильтра $\vec{H}_3$ по моментным функциям третьего порядка необходимо, чтобы помеха в опорном канале $y[t]$ была негауссовой и имела ненулевые моментные функции третьего порядка.

Из рис. 24.9 следует, что

$$x[t] = s[t] + (1/q_{II})n[t] + v_0[t],$$

$$y[t] = K(z)n[t] + v_1[t] = n_1[t] + v_1[t],$$

$$x[t] = \tilde{y}[t] + a_3[t],$$

где $\tilde{y}[t]$ – прогноз $x[t]$, равный $\tilde{y}[t] = \sum_{k=0}^{p-1} y[t-k]h_3[k]$.

Как следует из рис. 24.9, уравнение, используемое для оценки коэффициентов фильтра третьего ранга, имеет вид

$$x[t] = \sum_{k=0}^{p-1} y[t-k]h_3[k] + a_3[t], \quad (24.1)$$

где $h_3[k]$ – коэффициенты фильтра с передаточной функцией $H_3[z]$, p – порядок фильтра, $a_3[t]$ – ошибки предсказания, имеющие нулевую взаимную моментную функцию третьего порядка $E\{a_3[t]y[t-j]y[t-l]\} = 0$. Под оптимальной передаточной функцией $H_3[z]$ будем понимать такую ее оценку, которая дает статистически независимые от $y[t-i]$ ошибки $a_3[t]$, т.е. нулевую взаимную моментную функцию третьего порядка.

Чтобы найти выражения для расчета коэффициентов фильтра, умножим левую и правую части (24.1) на $y[t-j]y[t-l]$ и усредним

$$m_{xyy}[0, -j, -l] = \sum_{k=0}^{p-1} h_3[k] m_{yyy}[0, j-k, j-l], \quad j=0, 1, \dots, p-1, \quad l \geq 0, \quad (24.2)$$

где моментные функции третьего порядка равны

$$\begin{aligned} m_{xyy}[0, -j, -l] &= E\{x[t]y[t-j]y[t-l]\}, \\ m_{yyy}[0, j-k, j-l] &= E\{y[t-k]y[t-j]y[t-l]\}. \end{aligned}$$

Чтобы не работать с многомерными матрицами, будем использовать их сечения, которые получаются, если фиксировать сдвиги l . Можно показать, что моментные функции, входящие в выражение (24.2), не зависят от гауссовых помех $v_0[t]$ и $v_1[t]$. Это позволяет повысить точность оценки коэффициентов компенсатора помех.

В матричной форме уравнение (24.2) можно представить следующим образом:

$$\vec{m}_{xyy} = m_{yyy} \vec{H}_3,$$

где компонентами вектора $\vec{m}_{xyy}$ являются значения $m_{xyy}[0, -j, -l]$ при фиксированном l , элементами матрицы m_{yyy} являются значения моментной функции $m_{yyy}[j-i, j-l]$.

Параметры оптимального фильтра находятся из выражения

$$\vec{H}_3 = m_{yyy}^{-1} \vec{m}_{xyy}.$$

Чтобы работать с двумерной матрицей m_{yyy} и вектором-столбцом $\vec{m}_{xyy}$, необходимо зафиксировать сдвиг l .

Методом статистического моделирования исследовался выигрыш в подавлении помехи при использовании для расчета коэффициентов фильтра соотношения (24.2) и при обычном способе расчета коэффициентов фильтра по корреляционным функциям. Полезный гауссов сигнал получен с помощью формирующего АР фильтра и имел центральную частоту $f_c = 0.27$ с шириной полосы частот $\Delta f_c = 0.05$. Негауссова помеха также сгенерирована АР формирующим фильтром и имела коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 1$.

Параметры спектра помехи составляли: центральная частота $f_{\Pi} = 0,2$; ширина полосы $\Delta f_{\Pi} = 0.05$. Выборочные АР оценки СПМ сигнала и помехи представлены на рис. 24.10.

На опорный вход действовала смесь, состоящая из гауссова белого шума $v_1[t]$ и негауссовой помехи $n_1[t]$. АЧХ этого фильтра приведена на рис. 24.11. В основном канале ОСШ для шума $v_0[t]$ составляло q_1 , в опорном канале отношение мощности помехи $n_1[t]$ к мощности шума $v_1[t]$ составляло q_2 , ОСП сигнала $s[t]$ и помехи $n[t]$ обозначалось через q_{Π} .

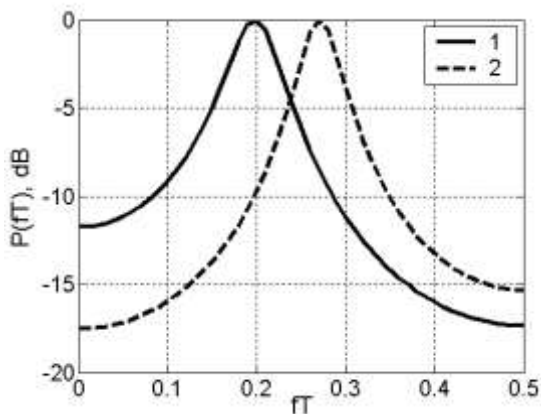


Рисунок 24.10 – Выборочные АР (2) оценки СПМ:
1 – гауссова сигнала,
2 – негауссовой помехи

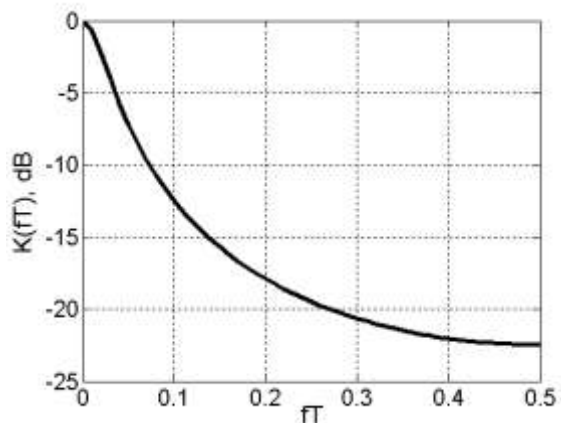


Рисунок 24.11 – АЧХ фильтра опорного канала помехи с линейной передаточной функцией $K(z)$

Коэффициенты винеровского фильтра второго порядка с передаточной функцией $H(z)$ рассчитывались по статистикам второго (фильтр второго ранга) и третьего порядка (фильтр третьего ранга) смесей в основном и опорном каналах при длинах реализаций, равных $N = 500$ отсчетов. Оценивалась дисперсия центрированной разности $e[t]$ между истинным полезным сигналом $s[t]$ и его оценкой на выходе компенсатора $a_3[t]$ согласно выражению $D_e = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (e[t])^2$.

Эффективность компенсаторов второго и третьего рангов оценивалась как выигрыш V , равный отношению дисперсий ошибок компенсации для винеровских фильтров второго и третьего рангов

$$V = \frac{D_{e2}}{D_{e3}}.$$

На рис. 24.12 приведены графики зависимости выигрыша, получаемого при использовании для оценок коэффициентов фильтра третьего ранга моментных функций третьего порядка для сечения $l=1$, от ОСШ на опорном входе q_2 для различных ОСШ в основном канале (рис. 24.12, а – $q_1=10$ дБ, рис. 24.12, б – $q_1 = \infty$) и отношений сигнал/помеха q_{II} .

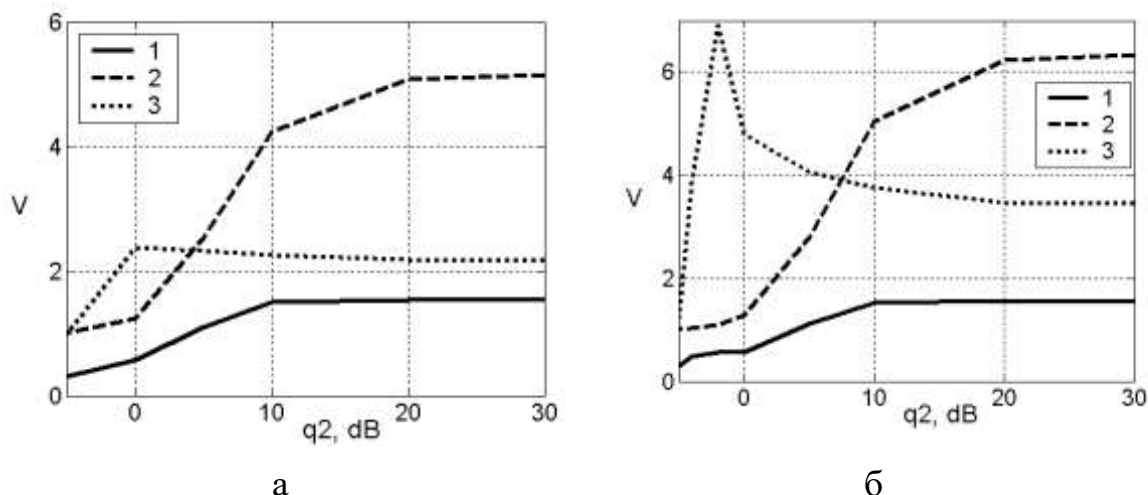


Рисунок 24.12 – Зависимости выигрыша от q_2 , полученного при использовании фильтра третьего ранга:
а – при $q_1 = 10$ дБ, б – при $q_1 = \infty$
(1 – $q_{II} = -3$ дБ; 2 – $q_{II} = 3$ дБ; 3 – $q_{II} = 15$ дБ)

Как видно из графиков, с ростом q_2 выигрыш сначала растет, а затем становится постоянным. Как показали исследования, наибольший выигрыш достигается при q_{II} , лежащем в интервале от -3 до 20 дБ.

На рис. 24.13 представлены графики зависимости выигрыша от q_{II} при $q_1 = 10$ дБ. При уровне шума в опорном канале $q_2 = 10$ дБ и большой мощности помехи $q_{II} = 0$ дБ можно получить существенное улучшение компенсации помехи.

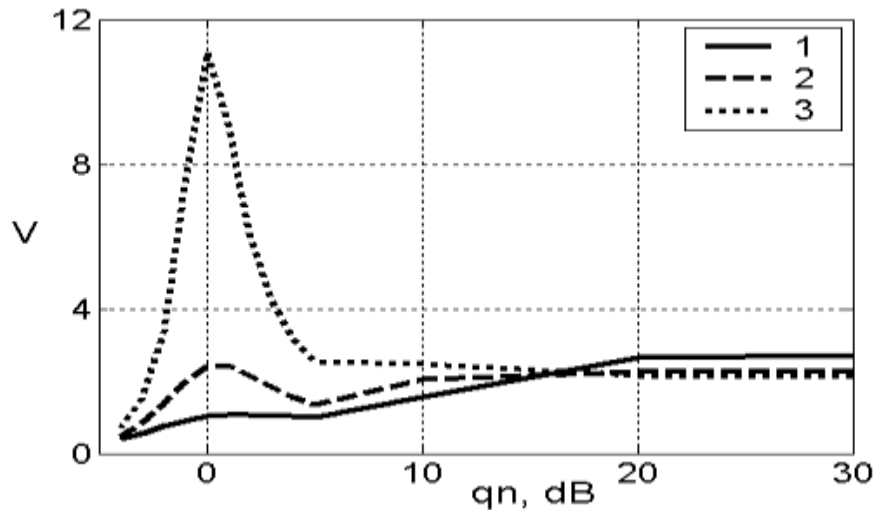


Рисунок 24.13 – Зависимости выигрыша от q_{II} , полученного при использовании фильтра третьего ранга при $q_1 = 10$ дБ:

1 – $q_2 = -3$ дБ; 2 – $q_2 = 3$ дБ; 3 – $q_2 = 10$ дБ

Как показывают экспериментальные исследования, учет негауссовых свойств анализируемых сигналов при определенных условиях позволяет повысить эффективность подавления помех винеровским фильтром. Подобные результаты можно получить, если аддитивные помехи $v_0[t]$ и $v_1[t]$ имеют негауссово распределение с малым значением асимметрии в сравнении с помехой $n_1[t]$. Улучшить характеристики предлагаемого компенсатора помех по сравнению с классическим можно также в том случае, когда в опорный канал попадает часть гауссова полезного сигнала.

Представленные методы повышения эффективности работы устройств подавления помех не исчерпываются указанными случаями. В зависимости от условий решаемой задачи, статистических характеристик сигнала и помех, необходимо проводить исследование статистик высших порядков с целью определения различий сигнала и помехи.

24.4 Обобщенный решетчатый фильтр

Используя модель, ОАР можно синтезировать обобщенные решетчатые фильтры (ОРФ) [21, 22]. Алгоритм Левинсона–Дарбина при выводе выражений для РФ использует теплицеву корреляционную матрицу. Позднее было доказано, что РФ могут быть получены и в случае нетеплицевых корреляционных матриц [23, 24]. Ниже рассматривается ОРФ синтезированный для двухмоментной моментной функции, порождающий теплицеву моментную

матрицу третьего порядка. Предпринимались также успешные попытки синтезировать ОРФ и для произвольной нетеплицевой моментной матрицы. Однако этот материал не включен в книгу.

Получим выражения для расчета коэффициентов отражения ОРФ по моментным функциям 3-го порядка и уравнения, описывающие структуру фильтра. Будем называть «ОРФ s -го ранга» такой РФ, параметры которого рассчитываются по моментной функции s -го порядка. Задачу синтеза ОРФ произвольного ранга без потери общности рассмотрим вначале на примере ОРФ 3-го ранга. Для этого будем использовать выражения прямого и обратного предсказания стационарного негауссова случайного сигнала $x[t]$ с нулевым средним и отличной от нуля моментной функцией 3-го порядка. Ошибку прямого предсказания на выходе p -го звена фильтра находим из уравнения для модели ОАР третьего ранга

$$a_{3,p}[t] = x[t] + \sum_{i=1}^p \Phi_{3,p}[i]x[t-i], \quad (24.3)$$

где $\Phi_{3,p}[i]$ – коэффициенты ОАР прямого предсказания третьего ранга, p – порядок модели ОАР третьего ранга, $a_{3,p}[t]$ – ошибка прямого предсказания, удовлетворяющая условию

$$E\{a_{3,p}[t]a_{3,p}[t-j]a_{3,p}[t-j]\} = 0, \quad 0 < j \leq p.$$

Как видно из этого условия оптимальности, ОРФ синтезируется для двухмоментной моментной функции негауссова процесса, для фиксированного сдвига 0 и переменного сдвига j .

Выражение для ошибки обратного предсказания имеет вид

$$d_{3,p}[t-1] = x[t-p-1] + \sum_{i=1}^p D_{3,p}[p+1-i]x[t-i], \quad (24.4)$$

где $D_{3,p}[k]$ – коэффициенты ОАР обратного предсказания третьего ранга, $d_{3,p}[t]$ – ошибка обратного предсказания, удовлетворяющая условию $E\{d_{3,p}[t]d_{3,p}[t-j]d_{3,p}[t-j]\} = 0, \quad 0 < j \leq p$. Из условий, накладываемых на ошибки прямого и обратного предсказания, следует, что у ошибок

предсказания отсутствуют статистические связи второго порядка, характеризующиеся моментной функцией 3-го порядка.

Выражения (24.3) и (24.4) позволяют записать системы уравнений для нахождения коэффициентов модели ОАР третьего ранга и третьих центральных моментов ошибок прямого и обратного предсказания, $m_{3a,p}$ и $m_{3d,p}$ соответственно. Для этого необходимо левые и правые части этих уравнений умножить на $x[t-j]x[t-j]$ и усреднить.

В результате этих операций получим

$$m_3[j] + \sum_{i=1}^p \Phi_{3,p}[i]m_3[j-i] = 0, \quad 1 \leq j \leq p, \quad (24.5, a)$$

$$m_3 + \sum_{i=1}^p \Phi_{3,p}[i]m_3[-i] = m_{3a,p}, \quad j = 0,$$

$$m_3[j-p] + \sum_{i=1}^p D_{3,p}[p+1-i]m_3[j+1-i] = 0, \quad 0 \leq j \leq p-1,$$

$$m_3 + \sum_{i=1}^p D_{3,p}[p+1-i]m_3[p+1-i] = m_{3d,p}, \quad j = p, \quad (24.5, б)$$

$$m_{3d,p} = E\{d_{3,p}[t]x[t-p]x[t-p]\},$$

где для краткости записи используется обозначение $m_3[n] \equiv m_3[0,0,n]$. Из (24.5, а) и (24.5, б) видно, что моментная матрица имеет теплицеву структуру

$$m_3[j-i] =$$

$$= \begin{bmatrix} m_3[0] & m_3[1] & m_3[2] & \dots & m_3[p+1] \\ m_3[-1] & m_3[0] & m_3[1] & \dots & m_3[p] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_3[-p-1] & m_3[-p] & m_3[-p+1] & \dots & m_3[0] \end{bmatrix}$$

Учитывая теплицеву структуру моментной матрицы, по аналогии с известной процедурой синтеза РФ второго ранга и используя матричное уравнение обновления по порядку [5, 7] вида

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -K_{3d}[p+1] \\ -K_{3a}[p+1] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Phi_{3,p}[1] & \cdots & \Phi_{3,p}[p] & 0 \\ 0 & D_{3,p}[p] & \cdots & D_{3,p}[1] & 1 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 1 & \Phi_{3,p+1}[1] & \cdots & \Phi_{3,p+1}[p+1] \\ D_{3,p+1}[p+1] & \cdots & D_{3,p+1}[1] & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (24.7)$$

можно показать, что коэффициенты отражения ОРФ третьего ранга прямого K_{3a} и обратного K_{3d} предсказания удовлетворяют выражению

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -K_{3d}[p+1] \\ -K_{3a}[p+1] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{3a,p} & \cdots & 0 & \Delta_{3a,p+1} \\ \Delta_{3d,p+1} & \cdots & 0 & m_{3d,p} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} m_{3a,p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_{3d,p+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Величины $\Delta_{3a,p+1}$ и $\Delta_{3d,p+1}$, входящие в (24.8), равны

$$\Delta_{3a,p+1} = m_3[p+1] + \sum_{i=1}^p \Phi_{3,p}[i] m_3[p-i+1],$$

$$\Delta_{3d,p+1} = m_3[-p-1] + \sum_{i=1}^p D_{3,p}[p+1-i] m_3[-i].$$

Используя (24.7), приходим к рекуррентным выражениям обновления коэффициентов ОАР

$$\begin{aligned}
\Phi_{3,p+1}[i] &= \Phi_{3,p}[i] - K_{3d} [p+1] D_{3,p} [p-i+1] = \\
&= \Phi_{3,p}[p] + \Phi_{3,p+1}[p+1] D_{3,p} [p+1-i], \\
D_{3,p+1}[i] &= D_{3,p}[i] - K_{3a} [p+1] \Phi_{3,p} [p+1-i] = \\
&= D_{3,p}[i] + \Phi_{3,p} [p+1-i] D_{3,p+1} [p+1].
\end{aligned}$$

С помощью матричного уравнения (24.8) можно найти следующие формулы обновления центральных моментов ошибок прямого и обратного предсказания:

$$\begin{aligned}
m_{3a,p} - K_{3d} [p+1] \Delta_{3d,p+1} &= m_{3a,p+1}, \\
m_{3a,p} + \Phi_{3,p+1}[p+1] \Delta_{3a,p+1} &= m_{3a,p+1}, \\
-K_{3a} [p+1] \Delta_{3a,p+1} + m_{3d,p} &= m_{3d,p+1}, \\
D_{3,p+1}[p+1] \Delta_{3a,p+1} + m_{3d,p} &= m_{3d,p+1}.
\end{aligned}$$

Из (24.7) и (24.8) получаем выражения для коэффициентов отражения

$$\begin{aligned}
K_{3d} [p+1] &= -\Phi_{3,p+1}[p+1] = \frac{\Delta_{3a,p+1}}{m_{3d,p}}, \\
K_{3a} [p+1] &= -D_{3,p+1}[p+1] = \frac{\Delta_{3d,p+1}}{m_{3a,p}}.
\end{aligned}$$

Структуру ОРФ 3-го ранга можно найти, умножив правую и левую части (24.7) на вектор $[x[t], \dots, x[t-p-1]]^T$.

После преобразований получим

$$\begin{bmatrix} 1 & -K_{3d}[p+1] \\ -K_{3a}[p+1] & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{3,p}[t] \\ d_{3,p}[t-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3,p+1}[t] \\ d_{3,p+1}[t] \end{bmatrix}. \quad (24.9)$$

Из (24.7) получаем уравнения, описывающие прохождение сигнала в звеньях ОРФ

$$a_{3,p}[t] - K_{3d}[p+1]d_{3,p}[t-1] = a_{3,p+1}[t], \quad (24.10)$$

$$d_{3,p}[t-1] - K_{3a}[p+1]a_{3,p}[t] = d_{3,p+1}[t].$$

Как следует из (24.10), ОРФ имеет структуру (рис. 24.14), идентичную структуре обычного РФ. Их отличие состоит в способе вычисления коэффициентов отражения.

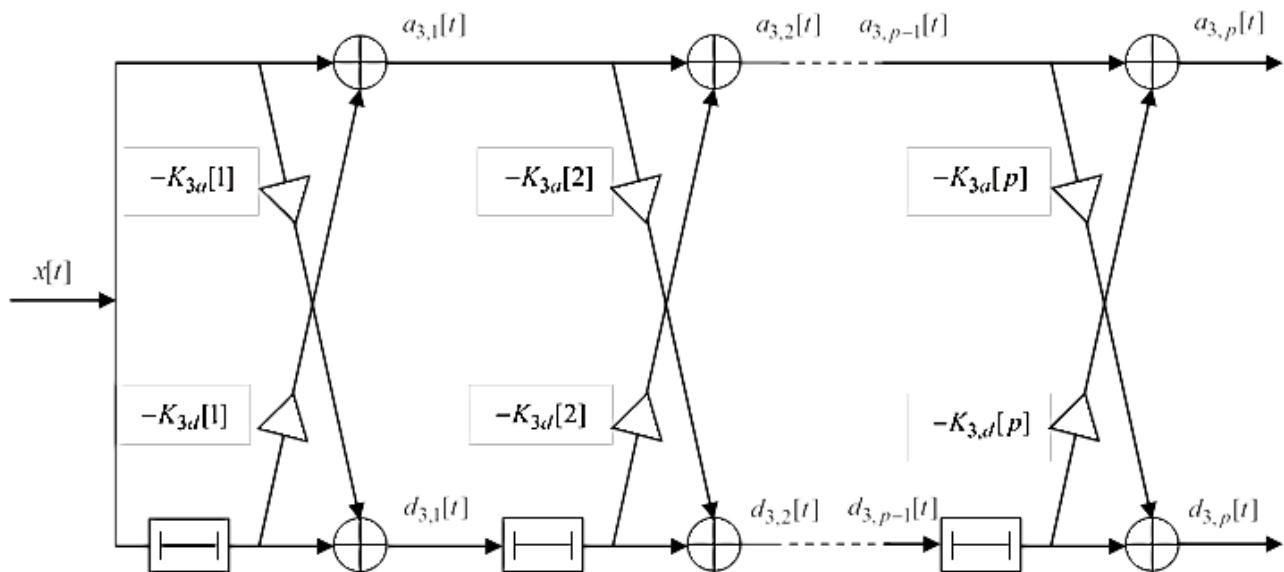


Рисунок 24.14 – Обедающий ОРФ

Можно показать, что выражения (24.10) дают удобный способ оценки коэффициентов $K_{3a}[p+1]$ и $K_{3d}[p+1]$

$$K_{3a}[p+1] = \frac{\sum_{t=2}^N (a_{3,p}[t])^2 d_{3,p}[t-1]}{\sum_{t=1}^N (a_{3,p}[t])^3}, \quad (24.11)$$

$$K_{3d}[p+1] = \frac{\sum_{t=2}^N a_{3,p}[t](d_{3,p}[t-1])^2}{\sum_{t=1}^N (d_{3,p}[t-1])^3}. \quad (24.12)$$

Вид найденных выражений для синтеза ОРФ указывает на аналогию с процедурой Левинсона–Дербина [21]. Примеры расчета параметров ОРФ и его практическое применение будут описаны ниже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.
2. Кармалита В.А. Цифровая обработка случайных колебаний. – М.: Машиностроение, 1986. – 80 с.
3. Радиоэлектронные системы: Основы построения и теория. Справочник / Я.Д. Ширман, Ю.И. Лосев, Н.Н. Минервин, С.В. Москвитин, С.А. Горшков, Д.И. Леховицкий, Л.С. Левченко / Под ред. Я.Д. Ширмана. – М.: ЗАО “МАКВИС”, 1998. – 828 с.
4. Макхол Дж. Линейное предсказание. Обзор // ТИИЭР. – 1975. – Т.63, №4. – С. 20–44.
5. Фридландер В. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, №8. – С. 54–98.
6. Фридландер Б. Методы спектрального оценивания на основе решетчатой структуры // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, №9. – С. 95–125.
7. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна, П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
8. Леховицкий Д.И., Зарицкий В.Н. и др. Методы адаптивной решетчатой фильтрации в задачах пространственно–временной обработки: Препр. / РТИ им. акад. А.Л. Минца; №8610. – М.: 1987. – 29 с.
9. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Параметрические оценки спектров высших порядков речевых сигналов // Тезисы докладов международной научной конференции «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». – Харьков: ХНУРЭ. – 2003. – С. 443–444.
10. Мачнев А.Н. Селектирование помехи при обработке речевого сигнала // Известия ВУЗов. серия «Радиоэлектроника». – 2000. – Т.4, №3. – С. 75–78.
11. Бендат Д. Основы теории случайных шумов и ее приложения. – М.: Наука, 1965. – 464 с.
12. Бендат Д., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
13. Тихонов В.А., Савченко И.В., Нетребенко К.В. Выделение сигналов на фоне коррелированных помех с использованием параметрических оценок спектра третьего порядка // Тезисы докладов международной научной конференции «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». – Харьков: ХНУРЭ. – 2004. – С. 95–96.
14. Тихонов В.А. Нетребенко К.В. Выделение сигналов на фоне негауссовых коррелированных помех с использованием параметрических оценок спектров четвертого порядка // Прикладная радиоэлектроника. – 2005. – Т.4, №2. – С. 142–147.
15. Тихонов В.А. Нетребенко К.В. Параметрическая оценка спектров третьего порядка смеси негауссова сигнала и гауссовой коррелированной помехи // Известия ВУЗов. серия «Радиоэлектроника». – 2005. – Т.48, №2. – С.35–43.

16. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна, П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
17. Уидроу Б., Маккул Дж. и др. Стационарные и нестационарные характеристики обучения адаптивных фильтров, использующих критерий минимума СКО // ТИИЭР. – 1976. – Т.64, №8. – С. 37–51.
18. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки. – М.: Радио и связь, 1986. – 448 с.
19. Тихонов В.А. Нетребенко К.В., Савченко И.В. Винеровский компенсатор негауссовых помех на основе статистик третьего порядка // Радиотехника. – 2005. – №143. – С. 40–43.
20. Уидроу Б., Гловер Дж., Маккул Дж. и др. Адаптивные компенсаторы помех. Принципы построения и применения // ТИИЭР. – 1975. – Т.63, №12. – С. 69–98.
21. Тихонов В.А. Обобщенный решетчатый фильтр // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 2. – С. 19–23.
22. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Обобщенные решетчатые фильтры на основе статистик высших порядков // 2-й Международный радиоэлектронный форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития». – Харьков: АНПРЭ, ХНУРЕ. – 2005. – Т.4. – С. 65–68.
23. Леховицкий Д.И. Обобщенный алгоритм Левинсона и универсальные решетчатые фильтры // Известия ВУЗов. Серия «Радиофизика». – 1992. – № 9, 10.
24. Леховицкий Д.И. и др. Универсальные адаптивные решетчатые фильтры // Известия ВУЗов. Серия «Радиофизика». – 1992. – №3,4, № 11, 12.

25 РАСПОЗНАВАНИЕ СИГНАЛОВ ПО МОДЕЛЯМ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

25.1 Введение

В ряде прикладных методов распознавания, в частности при распознавании речевых сигналов [1–3], в качестве информативных признаков применяют параметры моделей линейного предсказания, рассчитанные по корреляционным функциям. В работе [4] предложено использовать параметры обобщенных моделей линейного предсказания в качестве признаков при распознавании негауссовых процессов. Хотя статистики 2–го порядка содержат основную информацию о негауссовом случайном процессе, использование признаков на основе статистик высших порядков может оказаться полезным в ряде важных приложений. Например, в случаях, когда процессы невозможно распознать по статистикам 2–го порядка, если распознаваемые сигналы наблюдаются в присутствии помех или шумов, а также когда статистики высших порядков дают дополнительные признаки, улучшающие результаты распознавания, получаемые по статистикам 2–го порядка.

Проблема распознавания радиолокационных сигналов, отраженных от различных классов целей, является одной из наиболее сложных в статистической радиотехнике. Она включает в себя две основные задачи: выбор вектора признаков и выбор решающего правила. Ниже рассматривается задача выбора признаков негауссовых сигналов и эффективные для этих признаков решающие правила. В качестве признаков использовались параметры обобщенных моделей авторегрессии, учитывающие негауссовы характеристики сигналов. При определении признаков и выборе решающих правил применялись критерии оптимальности, которым удовлетворяли модели ОАР.

Задача использования статистик высших порядков для формирования вектора признаков еще недостаточно исследована в научной литературе. Вместе с тем, в некоторых случаях статистики высших порядков могут успешно применяться для оценки параметров сигналов, наблюдаемых в присутствии значительных по мощности коррелированных и некоррелированных помех. Для получения признаков, учитывающих негауссовы свойства сигналов можно использовать параметры обобщенных моделей линейного предсказания, статистики ошибок предсказания этих моделей, моментные или кумулянтные функции распознаваемых сигналов.

25.2 Использование статистик высших порядков в задаче распознавания негауссовых процессов

Для оценки параметров негауссовых сигналов могут использоваться статистики высших порядков, которые при определенных условиях дают более точную оценку статистических характеристик по сравнению со статистиками 2-го порядка при наличии помех [5–9]. Исходя из условий и требований задачи распознавания, а также в зависимости от статистических характеристик распознаваемого негауссова процесса, выбираются наиболее подходящие для этих целей статистики или параметры модели. Если у классифицируемых сигналов имеются различия статистик высших порядков, например, моментных или кумулянтных функций, то такие различия могут использоваться в качестве самостоятельных или дополнительных признаков распознавания. Различие в статистиках высших порядков может быть применено для определения признаков распознавания негауссовых процессов. В качестве признаков следует выбирать такие параметры сигналов или их моделей, которые устойчивы к воздействию характерных для таких задач помех. В данном подразделе рассматриваются примеры использования статистик 3-го порядка для решения задачи распознавания сигналов при воздействии аддитивных помех с симметричной плотностью распределения.

Во многих практических случаях в качестве признаков распознавания применяются параметры статистических моделей. Подходящей для этих целей моделью стационарных случайных процессов является модель АР. Эта модель широко применяется при решении задач обработки и распознавания речевых сигналов. К достоинству АР моделей следует отнести возможность синтеза обеляющих фильтров, которые успешно применяются в некоторых алгоритмах распознавания. Если обеляющий фильтр на основе модели АР 2-го ранга настроен на соответствующий класс представленных к распознаванию сигналов, то ошибка предсказания на выходе фильтра будет иметь минимальную дисперсию. На выходе обеляющего фильтра, синтезированного по модели ОАР s -го ранга, оценка моментной функции s -го порядка ошибки предсказания близка к нулю, если фильтр настроен на представленный к распознаванию класс сигнала. Применение набора обеляющих фильтров, соответствующих каждому из распознаваемых классов, не приводит к нормализации случайного процесса, что важно для сохранения негауссовых свойств выхода фильтра, которые используются в решающих правилах.

В [10] рассмотрена возможность использования моментных функций 3-го порядка для решения задачи распознавания на примере четырех классов сигналов ($G = 4$), не различающихся, а, следовательно, и не распознающихся, при использовании признаков, рассчитанных по статистикам 2-го порядка. Сигналы каждого из классов образованы смесью из двух одномодовых процессов авторегрессии АР(2) с относительными центральными частотами $f_1 T = 0.18$, $f_2 T = 0.32$ и одинаковыми полосами частот, равными $\Delta f T = 0.04$.

Сигналы каждой смеси получены с помощью формирующих фильтров АР, на вход которых подавались выборки порождающего белого шума с гауссовым или негауссовым распределениями. Мощности составляющих смесь сигналов были равными. В табл. 25.1 приведены данные о характере порождающего процесса типа белого шума для разных классов сигналов. В качестве негауссова порождающего процесса использовались выборки белого шума с гамма–плотностью распределения вероятностей и коэффициентом формы $c = 0.05$.

Таблица 25.1 Характеристики распознаваемых сигналов

№ класса	Порождающий белый шум сигнала первой моды; $f_1 T = 0.18$	Порождающий белый шум сигнала второй моды; $f_2 T = 0.32$
1	гауссов	негауссов
2	негауссов	гауссов
3	негауссов	негауссов
4	гауссов	гауссов

Сигналы всех классов имеют не различающиеся корреляционные функции и спектры 2–го порядка, что делает невозможным их распознавание в рамках статистик 2–го порядка. АР (8) параметрическая оценка спектра мощности сигналов одного из классов представлена на рис. 25.1. Так как распределения сигналов разные, все четыре класса сигналов имеют различные моментные функции 3–го порядка (рис. 25.2). Это свойство использовалось для синтеза алгоритма и структуры устройства распознавания. Обучение устройства распознавания выполнялось с использованием помеченных выборок длиной $N_e = 50000$ отсчетов. Моментные функции обучающих реализаций $m_{eg}[l, 0]$, $l = \overline{-10, 10}$, $g = \overline{1, G}$ для четырех классов представлены на рис. 25.2, где номера кривых соответствуют номерам классов.

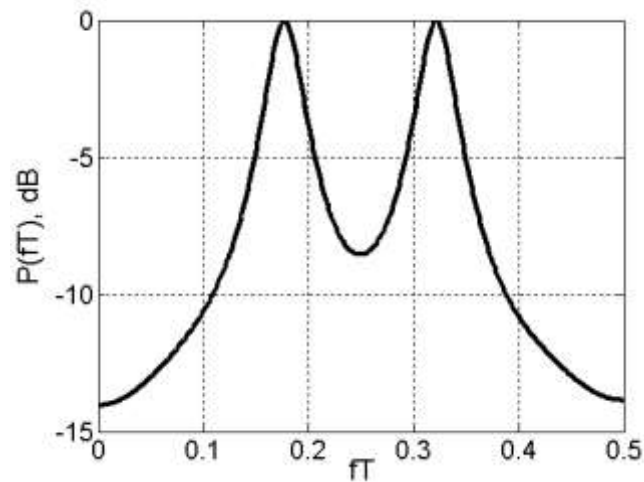


Рисунок 25.1 – $AR(8)$ оценка спектра сигнала одного из распознаваемых классов

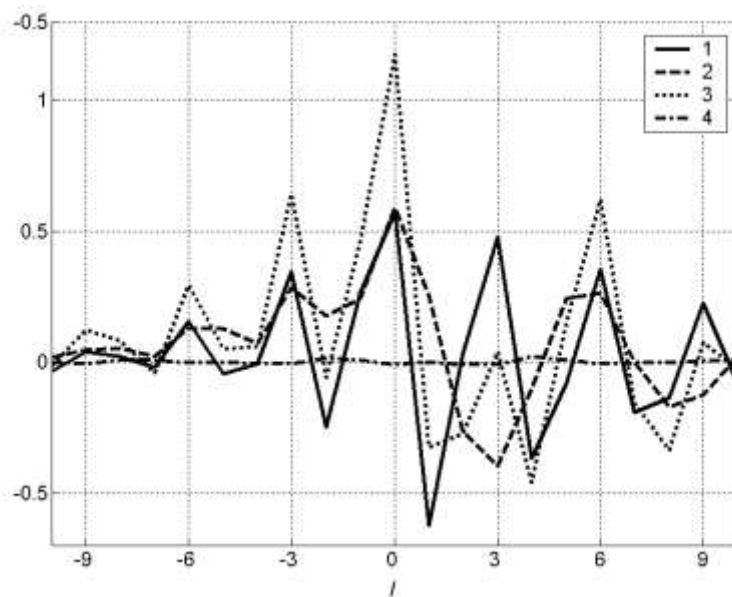


Рисунок 25.2 – Моментные функции 3–го порядка обучающих реализаций

Предъявляемые к распознаванию реализации имели равные априорные вероятности. В численном эксперименте применялся следующий алгоритм распознавания. На первом этапе производилась селекция неизвестных выборок по оценке их коэффициента асимметрии. Таким способом выявлялся гауссов сигнал 4–го класса, имеющий близкую к нулю асимметрию. На втором этапе проводилось распознавание первых трех классов негауссовых сигналов. При этом были исследованы три различных способа использования для

распознавания статистик 3–го порядка. Структура устройства распознавания представлена на рис. 25.3.

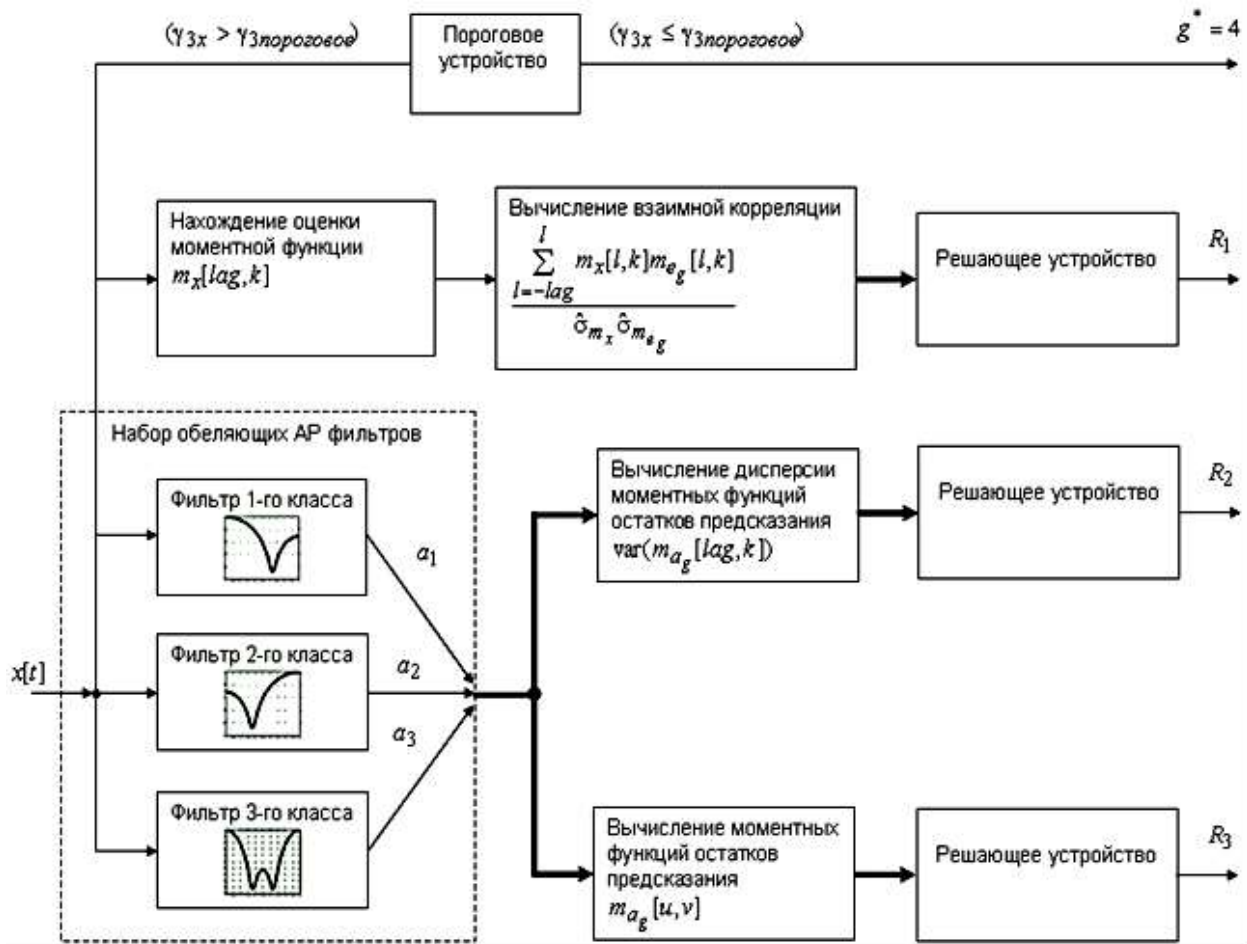


Рисунок 25.3 – Структура устройства распознавания

Первый способ основан на вычислении значения взаимной корреляции между оценками моментной функции 3–го порядка, полученных по обучающим и распознаваемым реализациям. Решение R_1 принималось по максимуму взаимной корреляции оценок моментных функций

$$g^* = \arg \max_g (B_g), \quad g = \overline{1, 3}, \quad (25.1)$$

где g^* – индекс того класса, в пользу которого принимается решение. Нормированная взаимная корреляция оценивалась по формуле

$$B_g = \frac{\sum_{l=-lag}^{lag} m_x[l,k] m_{eg}[l,k]}{\hat{\sigma}_{m_x} \hat{\sigma}_{m_{eg}}},$$

где $\hat{\sigma}_{m_x}$ и $\hat{\sigma}_{m_g}$ – выборочные среднеквадратические отклонения соответствующих моментных функций; lag – параметр, определяющий длину оценки моментной функции; k – сечение моментной функции. Зависимость средней по четырем классам вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых реализаций приведена на рис. 25.4 (кривая 1). Данные получены на основании 1000 опытов по каждому классу сигналов для значений $k = 0$, $lag = 10$.

Второй и третий способы распознавания по статистикам 3–го порядка основаны на предварительном обелении распознаваемых выборок группой из трех АР фильтров, каждый из которых настроен на свой класс сигналов. При этом каждый фильтр обеляет лишь ту область частот, которая соответствует негауссовой моде в спектре класса, т.е. фильтр первого класса является обеляющим с центральной частотой $fT = 0.32$, фильтр второго класса с центральной частотой $fT = 0.18$, а фильтр третьего класса настроен на обеление двухмодового сигнала с центральными частотами $f_1T = 0.18$ и $f_2T = 0.32$. Полосы обеления указанных фильтров одинаковы и равны $\Delta fT = 0.04$. Порядок обеляющих АР фильтров для классов 1, 2 равен $p = 2$, а для класса 3 – $p = 4$.

В результате прохождения распознаваемого сигнала первого и второго классов через обеляющие фильтры «своего» класса на выходе получается негауссов белого шума в смеси с гауссовым коррелированным процессом. В силу статистической независимости негауссова белого шума и равенства нулю моментной функции 3–го порядка гауссова процесса, оценка моментной функции в этом случае будет стремиться к нулю. На выходе фильтра, настроенного на третий класс распознаваемого сигнала, получают негауссов белый шум, если на вход поступает сигнал третьего класса. Тогда моментная функция остатка предсказания определяется негауссовой компонентой, которая для белого негауссова шума отлична от нуля лишь в нулевом сечении при $l = 0$, $k = 0$. Это свойство моментной функции ошибки предсказания «своего» фильтра может быть использовано для получения двух признаков, первый из которых – дисперсия моментной функции ошибки предсказания, второй – ее абсолютное значение в некотором ненулевом сечении. С помощью этих признаков получены второй и третий способы распознавания, в которых решения принимаются по R_2 – минимуму дисперсии моментной функции 3–го порядка ошибки предсказания и R_3 – минимуму моментной функции 3–го порядка ошибки предсказания в некотором ненулевом сечении соответственно. Для второго способа решающее правило имеет вид

$$g^* = \arg \min_g \left\{ \text{var} \left(m_{ag}[l, k] \right) \right\}, \quad g = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{-lag, lag}, \quad (25.2)$$

где $m_{ag}[l, k]$ – моментная функция ошибки предсказания на выходе фильтра g – го класса; $\text{var}(\cdot)$ – математический символ дисперсии. Распознавание третьим способом определятся решающим правилом

$$g^* = \arg \min_g \{m_{ag}[u, v]\}, \quad g = \overline{1, 3}. \quad (25.3)$$

Экспериментальные зависимости средней по четырем классам вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых выборок для R_2 и R_3 приведены на рис. 25.4 (кривые 2 и 3 соответственно). Результаты получены на основании 1000 опытов по каждому классу для значений $k=0$, $\text{lag}=10$, $u=1$, $v=2$. Из рис. 25.4 видно, что все три решения $R_1 \div R_3$ (25.1÷25.3) дают приблизительно одинаковое качество распознавания при незначительном преимуществе R_3 .

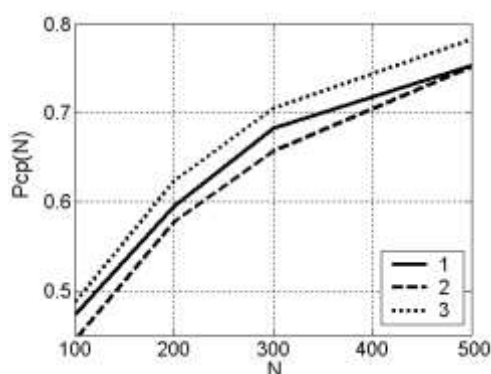


Рисунок 25.4 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых сигналов.

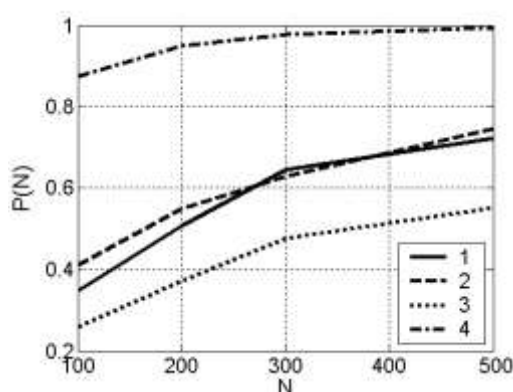


Рисунок 25.5 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых сигналов для решающего правила R_1

В ходе экспериментов были получены зависимости вероятности правильного распознавания отдельно для сигналов каждого из классов от длины выборки. Для первых трех классов вероятности существенно зависят от использованного решения. Наилучшим образом для всех трех решающих правил $R_1 \div R_3$ распознавались сигналы класса 4, что говорит о правильно выбранной

величине порога асимметрии. Негауссова компонента у классов 1 и 2 фактически распознается в условиях воздействия гауссовой коррелированной помехи и предъявляется к распознаванию с отношением сигнал/помеха (ОСП), равным единице. Это приводит к частичной нормализации сигнала, что явилось ограничением для достижения высокого качества распознавания. Сигналы класса 3 распознаются хуже для R_1 , что очевидно связано с неустойчивостью моментной функции для выбранных частот мод. Однако применение обеляющих фильтров при распознавании сигналов третьего класса повышало вероятность правильного распознавания. На рис. 25.5 представлены результаты распознавания четырех классов с использованием решения R_1 .

Приведенные результаты статистических экспериментов демонстрируют принципиальную возможность использования статистик высших порядков в качестве самостоятельных признаков для распознавания негауссовых процессов. С помощью предложенных признаков обеспечено различение сигналов с одинаковыми корреляционными функциями и отличающимися моментными функциями. Описан алгоритм работы распознающего устройства, структура которого основана на наборе обеляющих фильтров.

25.3 Распознавание при наличии аддитивных помех

При наличии аддитивных шумов и коррелированных помех использование статистик высших порядков для получения признаков распознавания позволяет в некоторых случаях повысить вероятность правильного распознавания. Улучшение распознавания по сравнению с методами распознавания на основе статистик 2-го порядка возможно, когда полезный сигнал и помехи имеют существенные отличия в статистиках высших порядков. Рассмотрим задачу использования статистик третьего порядка для снижения влияния помех на результаты распознавания. Пусть $x[t]$ – распознаваемый негауссов сигнал, $n[t]$ – помеха с гауссовым или негауссовым распределением, а $y[t]$ – их смесь. Для моментной функции 3-го порядка смеси независимых процессов с нулевым средним $y[t] = x[t] + n[t]$ справедливо следующее свойство

$$m_{3y}[j, l] = m_{3x}[j, l] + m_{3n}[j, l].$$

Если помеха $n[t]$ имеет симметричное распределение, что эквивалентно $m_{3n}[j, l] = 0$, а сигнал $x[t]$ имеет несимметричный закон распределения, то моментная функция смеси будет близка к $m_{3x}[j, l]$. Таким образом, признаки,

полученные по моментным функциям третьего порядка, будут устойчивы к помехам с нулевыми или малыми значениями асимметрии.

В ходе статистического эксперимента, обучение и распознавание производилось при наличии гармонической помехи. К распознаванию предъявлялись сигналы, являющиеся процессами АР(2), трех классов ($G=3$) с относительными значениями центральных частот $f_1T=0.13$, $f_2T=0.15$, $f_3T=0.17$ и одинаковыми полосами частот $\Delta fT=0.02$. Параметрические АР (2) спектры мощности сигналов распознаваемых классов представлены на рис. 25.6. Сигналы получены с помощью разностного уравнения (1.1) с использованием порождающего белого шума с гамма-плотностью распределения. Коэффициенты АР (2) рассчитывались по (1.19, б). Помеченные обучающие выборки длиной $N_e=50000$ отсчетов подавались в смеси с синусоидальной помехой с частотой $f_{II}T=0.17$. Распознающее устройство построено на основе двух наборов обелющих фильтров (рис. 25.7). Первый набор представляли АР(2) фильтры, на выходе которых решение R_1 принималось по минимуму дисперсии ошибки предсказания

$$g^* = \arg \min_g \left\{ \text{var}(a_g[t]) \right\}, \quad g = \overline{1, G}, \quad (25.4)$$

где $a_g[t]$ – ошибки предсказания на выходе фильтра g -го класса. Коэффициенты этих фильтров оценивались на основе АР модели по обучающим выборкам. Вторую группу фильтров составляли фильтры ОАР (2) при $k=1$. Решение R_3 в этом случае принималось по минимуму значения моментной функции ошибки предсказания (25.3) для $u=1$, $v=2$. Каждая группа фильтров состояла из трех фильтров, настроенных на обеление сигналов соответствующего класса.

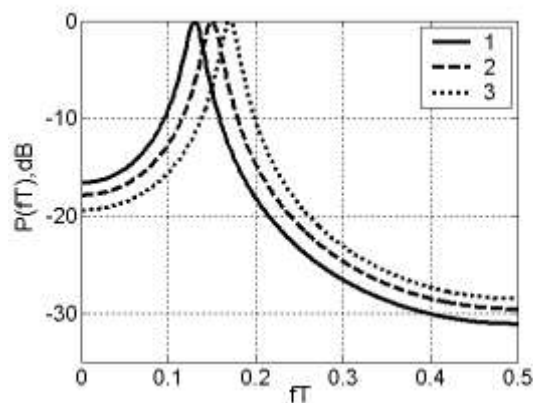


Рисунок 25.6 – АР (2) спектры сигналов

Использование статистик 3-го порядка обеспечивает преимущества, как на этапе обучения, так и на этапе распознавания. Влияние гармонической помехи, имеющей симметричную плотность распределения вероятностей, на коэффициенты ОАР смеси менее выражено по сравнению с влиянием на коэффициенты АР. Распознаваемые реализации состояли из смеси сигналов и гармонической помехи с частотой $f_c T = 0.12$. ОСП при распознавании и обучении выбирались одинаковыми и составляли 3 дБ и 0 дБ. На рис. 25.8 приведены зависимости средней по трем классам вероятности правильного распознавания при ОСШ = 3 дБ (кривые 1 и 2) и 0 дБ (кривые 3 и 4). Кривые 1 и 3 соответствуют решению R_1 (25.4), а кривые 2 и 4 решению R_2 (25.2). Данные получены на основании 1000 опытов по каждому классу. Как показывает анализ графиков, использование статистик 3-го порядка позволяет значительно повысить вероятность правильного распознавания при наличии гармонической помехи, особенно при малых ОСП.

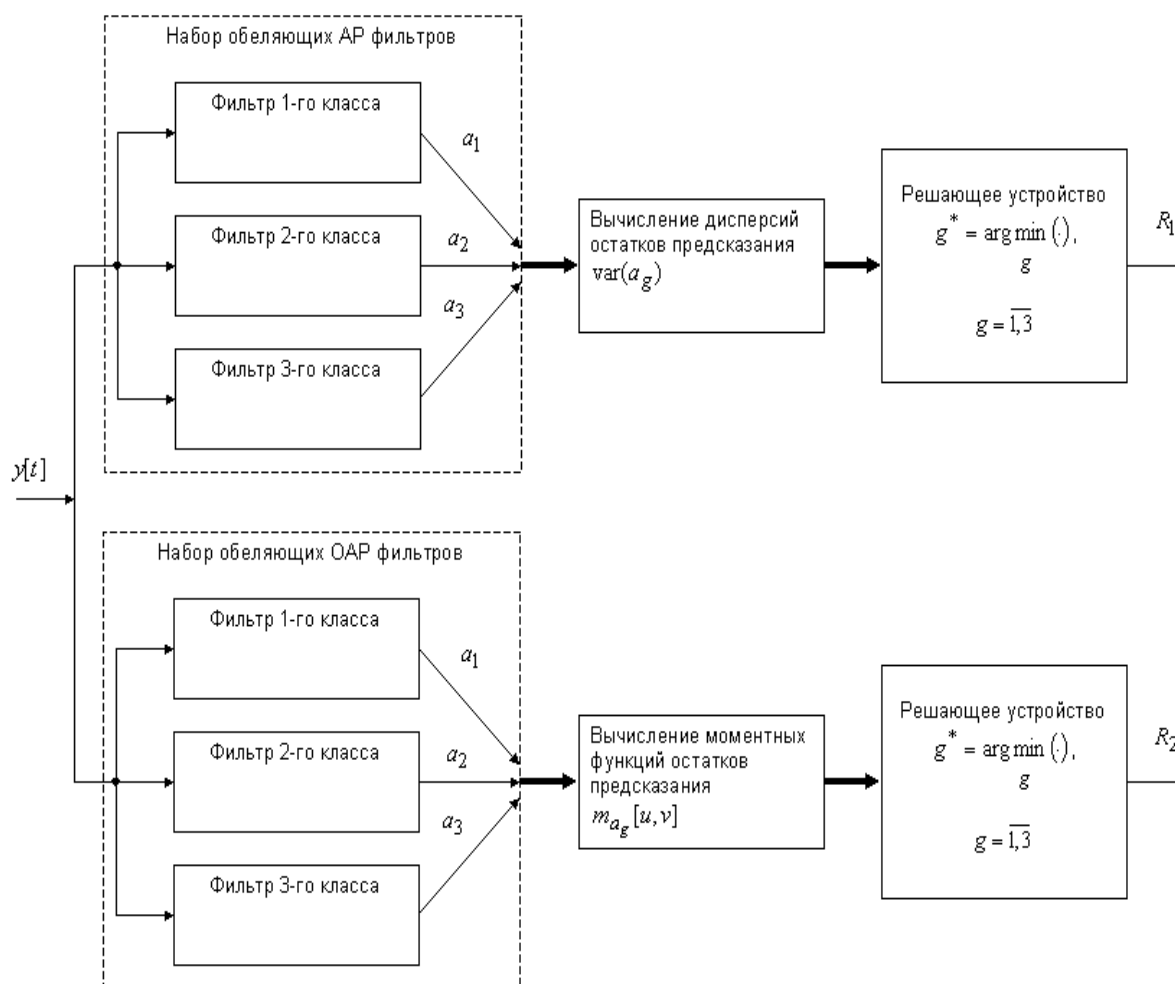


Рисунок 25.7 – Структура распознающего устройства

Выигрыш также может быть получен, когда сигналы распознаются в присутствии гауссовых или негауссовых шумов с нулевой асимметрией [11]. Найдены зависимости (рис. 25.9) средней вероятности правильного распознавания от длины реализации для отношения сигнал/шум (ОСШ) = 3 дБ (кривые 1, 2) и ОСШ = 0 дБ (кривые 3, 4) для сигналов со спектрами, представленными на рис. 25.6. Сигналы распознавались в присутствии белого шума с равномерным распределением. Использовались решающие правила (25.4) (кривые 1, 3) и (25.1) (кривые 2, 4). Данные усреднены по 1000 опытам для каждого класса. Сравнение графиков доказывает возможность повышения эффективности распознавания при использовании статистик 3-го порядка.

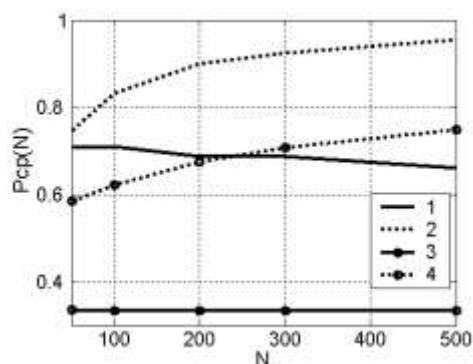


Рисунок 25.8 – Зависимости средней вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых сигналов для различных ОСП.

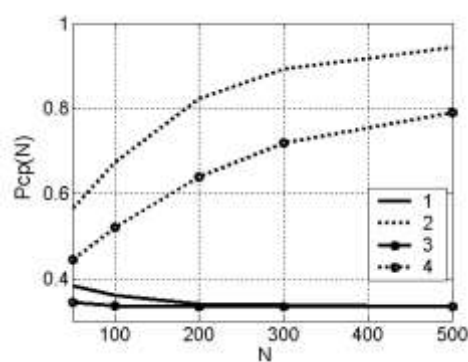


Рисунок 25.9 – Зависимости средней вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых сигналов для различных ОСШ.

В рассмотренных примерах использовались признаки, полученные по статистикам 3-го порядка. В зависимости от типа распределений негауссова процесса и помех, а также условий распознавания, для повышения эффективности могут использоваться статистики более высоких порядков.

25.4 Распознавание с использованием обобщенных решетчатых фильтров

Решетчатые фильтры можно применять при распознавании некоторых типов сигналов, в частности радиолокационных и речевых сигналов. РФ обладают рядом достоинств по сравнению с фильтрами прямой реализации модели АР. Ошибки предсказания на выходе РФ и ОРФ статистически независимы для разных моментов времени. Если на вход ОРФ, настроенного на сигналы

некоторого класса, подается сигнал данного класса, оценки моментных функций соответствующего порядка ошибок предсказания будут близки к нулю. Как показывают исследования, такое использование ОРФ для распознавания обладает преимуществом по сравнению со способом, в котором в качестве признаков используются рассчитанные на этапе распознавания коэффициенты отражения РФ или ОРФ. Решающее правило может заключаться в определении минимального абсолютного значения оценок моментных функций ошибок предсказания ОРФ для всех классов распознаваемых сигналов. Применение набора ОРФ 3–го и 4–го рангов может эффективно применяться для распознавания негауссовых сигналов.

Ниже представлены результаты, полученные методом статистического моделирования, распознавания негауссовых имитационных сигналов по ошибкам предсказания РФ и ОРФ 3–го и 4–го рангов.

Структура устройства распознавания по минимуму дисперсии ошибки предсказания РФ или по минимуму моментной функции ошибки предсказания ОРФ имеет вид, представленный на рис. 25.10. Используется набор обеляющих РФ или ОРФ фильтров, каждый из которых соответствует распознаваемому классу и имеет АЧХ, обратную спектру сигнала «своего» класса. Коэффициенты фильтров рассчитываются по помеченным обучающим выборкам. На этапе распознавания неизвестный сигнал пропускается одновременно через все фильтры. На выходе каждого из фильтров рассчитывается дисперсия или моментные функции ошибок прямого предсказания. Решение принимается в пользу того класса, на выходе фильтра которого дисперсия или моментная функция ошибки предсказания минимальна.

Для проверки работоспособности предложенного способа распознавания и оценки его эффективности был проведен численный эксперимент. К распознаванию редъявлялись имитационные негауссовы сигналы трех классов, полученные с помощью формирующих АР (2) фильтров, на вход которых подавался негауссов белый шум с гамма–плотностью распределения. Относительные частоты спектральных максимумов сигналов трех классов составили 0.08; 0.1; 0.12; полосы занимаемых частот были одинаковы во всех случаях и составляли $\Delta fT = 0.03$. Коэффициенты отражения РФ (2) и ОРФ (2) оценивались по обучающим реализациям длиной $N_e = 500$ отсчетов. Оценки АР (2) спектров мощности обучающих реализаций представлены на рис. 25.11 (кривые 1–3). Средний по всем реализациям коэффициент асимметрии составил $\gamma_3 = 1.22$, а коэффициент эксцесса – $\gamma_4 = 4.58$.

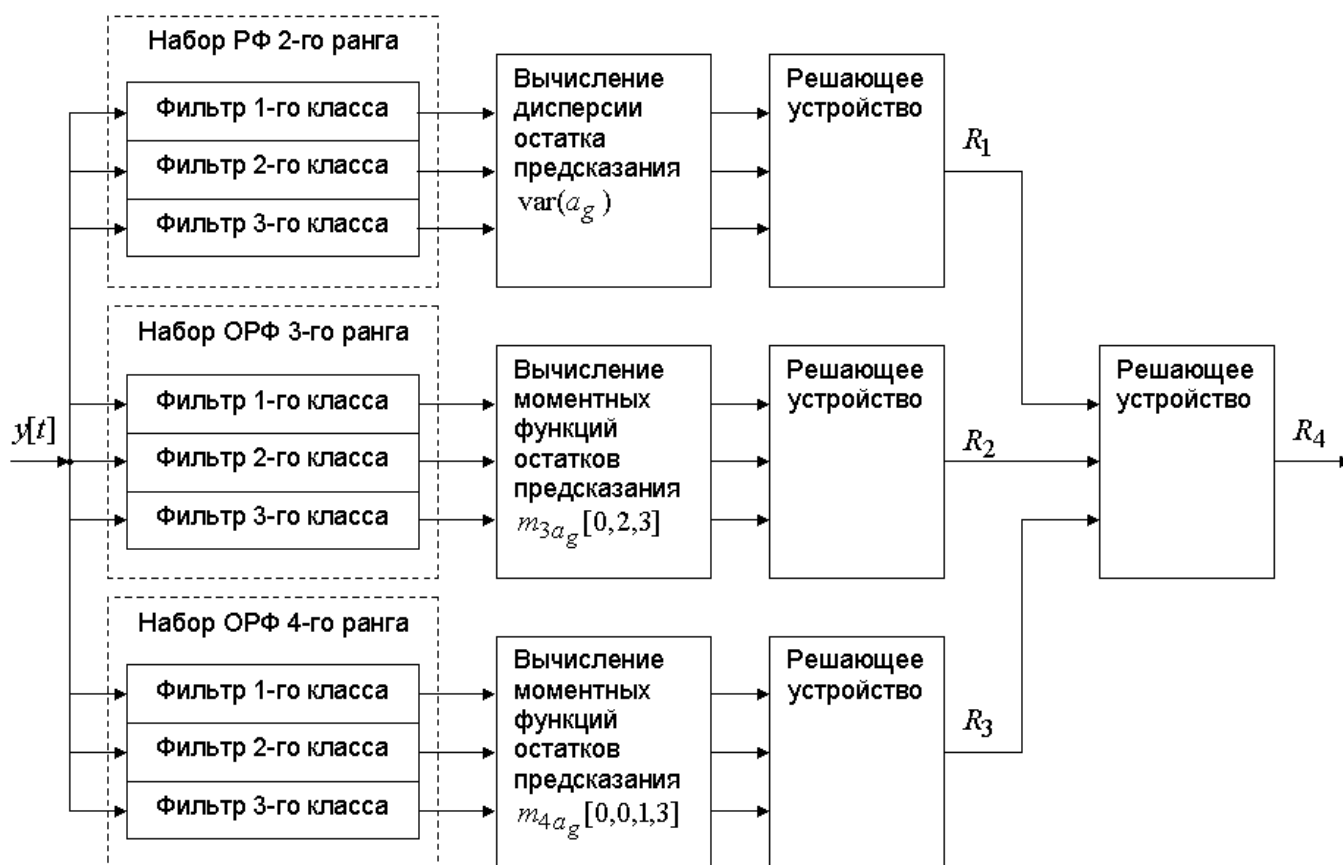


Рисунок 25.10 – Структура устройства распознавания

Распознаваемые сигналы подавались на входы трех групп фильтров, состоящих из РФ, ОРФ 3–го и ОРФ 4–го рангов. Первую группу составляли обычные РФ 2–го ранга, для которых принятие решений осуществлялось по минимуму дисперсии ошибки предсказания (25.4). Соответствующее решающее правило обозначено как R_1 . Вторая и третья группа фильтров представлена ОРФ 3–го и 4–го рангов соответственно. Принятие решений осуществлялось по минимуму моментных функций ошибок предсказания (25.3) в сечениях $m_{3a}[0,2,3]$ и $m_{4a}[0,0,1,3]$ соответственно (решающие правила обозначены R_2 и R_3 соответственно).

Сечения моментных функций выбираются, исходя из анализа качества распознавания исследуемых случайных сигналов. Исследования показали, что эффективные решения могут приниматься и по другим сечениям моментных функций.

На рис. 25.12 представлены кривые зависимостей средних по трем классам вероятностей правильного распознавания P_{cp} от длины реализаций N , где кривая 1 соответствует решению R_1 , кривые 2 и 3 – решениям R_2 и R_3 соответственно. Данные по каждому из классов получены на основании 100 опытов. Анализ представленных кривых показывает, что наибольшую вероятность правильного распознавания обеспечивает решение R_1 , что объясняется доминирующей ролью статистик 2–го порядка в описании случайных сигналов [12]. Решения R_2 и R_3 хотя

и обеспечивают высокую вероятность правильного распознавания, однако уступают решению R_1 . Их применение в качестве самостоятельных признаков распознавания для данных имитационных сигналов неэффективно. Однако они могут быть использованы в качестве дополнительных к основным признакам, полученным по статистикам 2-го порядка.

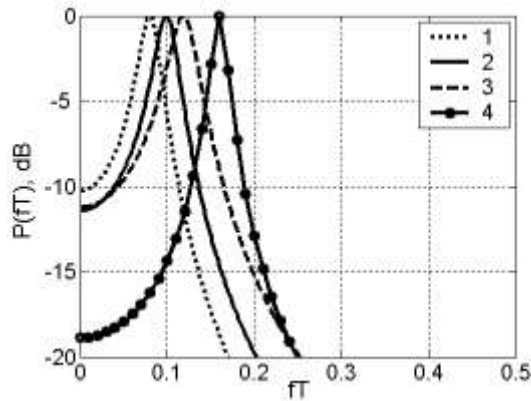


Рисунок 25.11 – AP(2) спектры мощности обучающих реализаций (кривые 1–3) и помехи (кривая 4).

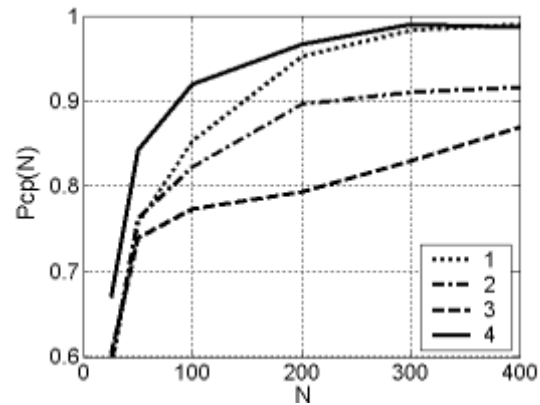


Рисунок 25.12– Зависимости средней вероятности правильного P_{cp} распознавания от длины реализаций распознаваемых сигналов N : 1 – R_1 ; 2 – R_2 ; 3 – R_3 ; 4 – R_4 .

Для совместного использования основного признака (минимума дисперсии ошибки предсказания) и двух дополнительных (минимумы оценок моментных функций ошибок предсказания 3-го и 4-го рангов) применялось решающее правило, основанное на мажоритарном принципе. Если два или три решения из $R_1 \div R_3$ совпадают – принимается окончательное решение R_4 в пользу совпадающих. Если среди $R_1 \div R_3$ нет совпадающих решений, тогда $R_4 = R_1$. Зависимость P_{cp} для решения R_4 от длины выборки представлена на рис. 25.12. (кривая 4). Повышение P_{cp} для малых значений N достигает 8%.

Важным фактором, влияющим на точность решения задачи распознавания, является величина дисперсии используемых признаков. При малой дисперсии выборочные оценки признаков компактно сосредоточены около их мод распределений плотности вероятности. В случае, когда пространства признаков различных классов незначительно пересекаются, достигается высокое значение P_{cp} . В противном случае, когда дисперсии признаков значительны, пространства признаков могут иметь пересечения, что является причиной ухудшения качества распознавания. Понятно, что близость мод признаков различных классов друг к другу также увеличивает область пересечения признаков, что также негативно сказывается на качестве распознавания.

Во втором эксперименте исследовалась эффективность учета статистик высших порядков, если распознаваемые классы слабо отличаются в используемом пространстве признаков. В этом эксперименте центральные частоты сигналов каждого из классов составили 0.09; 0.1 и 0.11.

На рис. 25.13 представлены кривые зависимостей (средних по трем классам) $P_{cp} = \varphi(N)$ для решений R_1 (кривая 1) и R_4 (кривая 2). Снижение вероятности правильного распознавания в сравнении с рис. 25.12 обусловлено более близким расположением спектров классов. Выигрыш от использования мажоритарного решающего правила теряется из-за влияния дисперсии оценок дополнительных признаков.

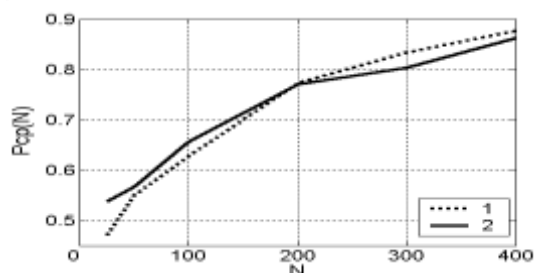


Рисунок 25.13 – Зависимости средней вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых сигналов для решений R_1 и R_4

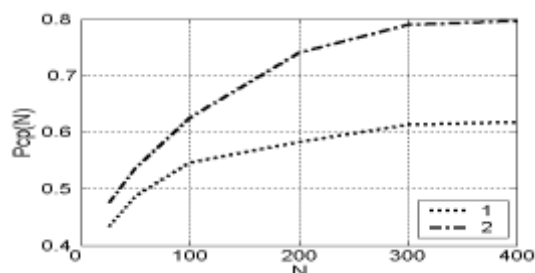


Рисунок 25.14 – Зависимости средней вероятности правильного распознавания от длины распознаваемых сигналов: 1 – R_1 ; 2 – R_2

В следующем эксперименте проводилось распознавание сигналов при наличии узкополосной помехи. Показано, что использование моментных функций 3-го порядка остатков предсказания ОРФ дает выигрыш при наличии помехи с симметричным распределением. Распознаваемые сигналы, АР (2) спектры которых показаны на рис. 25.11 (кривые 1–3) наблюдались в присутствии гауссовой коррелированной помехи со спектром мощности, представленном на рис. 25.11 (кривая 4). Центральная частота спектра помехи равнялась $f_{II}T = 0.16$, полоса частот составляла $\Delta fT = 0.02$. На рис. 25.14 приведены зависимости P_{cp} от N , полученные в присутствии гауссовой коррелированной помехи для решения R_1 (кривая 1) и решения R_2 (кривая 2). Данные получены на основании 1000 опытов по каждому классу при ОСШ, равном 5 дБ. Как видно из графика, решение R_2 по минимуму моментных функций 3-го порядка ошибки предсказания имеет очевидное преимущество.

Таким образом, теоретически обосновано и экспериментально доказано преимущество статистик 3-го и 4-го порядков над статистиками 2-го порядка в случае, когда распознаваемые сигналы наблюдаются в присутствии некоторых типов помех. Рассмотрено решающее правило, учитывающее основной и

дополнительные признаки. Показана возможность использования статистик высших порядков в качестве дополнительных признаков. В зависимости от особенностей решаемой задачи распознавания и характеристик распознаваемых негауссовых процессов структура распознающего устройства может варьироваться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabiner L.R, Levinson S.E. Isolated and Connected Word Recognition – Theory and Selected Applications // IEEE Transactions on Communications. – 1981. – Vol. Com-29, № 5. – P. 621–659.
2. Ли У. Методы автоматического распознавания речи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 328 с.
3. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1981. – 324 с.
4. Безрук В.М., Голиков В.С., Тихонов В.А. Распознавание случайных сигналов, описываемых авторегрессионной моделью // Известия ВУЗов. Серия «Радиоэлектроника». – 2004. – № 4. – С. 59–65.
5. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Параметрическая оценка спектров третьего порядка смеси негауссова сигнала и гауссовой коррелированной помехи // Известия ВУЗов Серия «Радиоэлектроника». – 2005. – №2. – С. 35–43.
6. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Оценивание спектра негауссова сигнала на фоне гауссова белого шума с помощью кумулянтных функций // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – №4. – С. 10–14.
7. Тихонов В.А. Нетребенко К.В., Савченко И.В. Винеровский компенсатор негауссовых помех на основе статистик третьего порядка // Радиотехника. – 2005. – № 143. – С. 40–43.
8. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Выделение сигналов на фоне негауссовых коррелированных помех с использованием параметрических оценок спектров четвертого порядка // Прикладная радиоэлектроника. – 2005. – Том 4, №2. – С. 142–147.
9. Тихонов В.А., Савченко И.В., Нетребенко К.В. Метод идентификации канала связи на основе статистик третьего порядка // Прикладная радиоэлектроника. – 2005. – Том 4, №3. – С. 286–290.
10. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Использование статистик высших порядков в задаче распознавания негауссовых процессов // Радиоэлектроника и информатика. – 2006. – №1. – С. 4–8.
11. Тихонов В.А., Нетребенко К.В. Распознавание негауссовых процессов при наличии аддитивных помех // Радиотехника. – 2006. – № 145. – С.163–166.
12. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.

26 РАСПОЗНАВАНИЕ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

26.1 Введение

Задача распознавания радиолокационных объектов прежде всего связана с выбором признаков радиолокационных целей. Сложность ее решения не позволяет на данном этапе исследований определить предпочтительные типы признаков и решающих правил [1–4]. Поэтому важное значение имеет поиск эффективных признаков распознавания и соответствующих им способов принятия решений. Проблема распознавания радиолокационных объектов осложняется наличием белого шума и коррелированных помех в принимаемом отраженном от объекта сигнале. Применение статистик высших порядков позволяет для некоторых практических важных типов шумов и помех повысить вероятность правильного распознавания.

Исследования показывают, что огибающая радиолокационных сигналов может описываться моделью АР [5]. Параметры АР содержат информацию об отраженном от радиолокационных целей сигнале и могут служить признаками распознаваемых целей. Ниже приведены результаты исследования радиолокационных сигналов, отраженных от надводных имитационных целей, которые имеют негауссовы характеристики. Поэтому для них можно построить обобщенные модели линейного предсказания. Проведен анализ эффективности использования параметров моделей АР и ОАР и свойств ошибок предсказания для распознавания радиолокационных сигналов. Рассмотрены оптимальные решающие правила, которые используют особенности признаков распознавания и не требуют вычислений, вносящих дополнительные погрешности в процессе распознавания.

26.2 Анализ свойств сигналов и построение их авторегрессионных моделей

Рассмотрим задачу распознавания трех различных радиолокационных целей, имитирующих надводные объекты. Длина выборок составляла $N = 150$ отсчетов. Сигналы достаточно узкополосные и обладают негауссовыми свойствами, что дает возможность использовать модель ОАР. В табл. 26.1 приведены значения коэффициентов асимметрии и эксцесса трех классов сигналов.

Таблица 26.1 – Значения оценок коэффициентов асимметрии и эксцесса реализаций радиолокационных сигналов

	Сигнал 1	Сигнал 2	Сигнал 3
γ_3	–0.17	–0.41	0.61
γ_4	5.02	6.16	2.23

Для исключения влияния случайных факторов, которым подвержены натурные эксперименты, распознавание проводилось для имитационных негауссовых сигналов, полученных по моделям АР реальных сигналов. Имитационные негауссовы сигналы использовались для оценки потенциальных вероятностей правильного распознавания радиолокационных объектов. Для выбора порядка модели АР огибающих радиолокационных сигналов использовался критерий минимума дисперсии ошибки предсказания. Кривые 1–3 (рис. 26.1) показывают зависимости дисперсий ошибок предсказания от порядка моделей каждого из сигналов. Оптимальными порядками моделей являются следующие: для сигнала $x_1[t]$ – $p = 3$, для $x_2[t]$ – $p = 2$, для $x_3[t]$ – $p = 4$ соответственно. С целью упрощения задачи распознавания, для всех сигналов была выбрана одинаковая величина порядка $p = 4$. Значения коэффициентов модели АР (4) второго ранга сведены в табл. 26.2. Коэффициентам табл. 26.2 соответствуют параметрические спектры, представленные на рис. 26.2.

Таблица 26.2 – Значения коэффициентов АР (4) сигналов

	$\Phi_2[1]$	$\Phi_2[2]$	$\Phi_2[3]$	$\Phi_2[4]$
$x_1[t]$	1.36	–0.12	–0.53	0.09
$x_2[t]$	1.15	–0.19	0.05	–0.3
$x_3[t]$	1.54	–0.88	0.41	–0.2

По полученным наборам коэффициентов $\Phi_2[i]$ с помощью формирующего фильтра по моделям АР(4) были получены реализации имитационных сигналов. В качестве порождающего процесса использовался белый шум с гамма-плотностью распределения и параметрами $b = 1$ и $c = 0.5$. Средние по 100 реализациям ($N = 500$) значения коэффициентов γ_3 и γ_4 для каждого из классов даны в табл. 26.3.

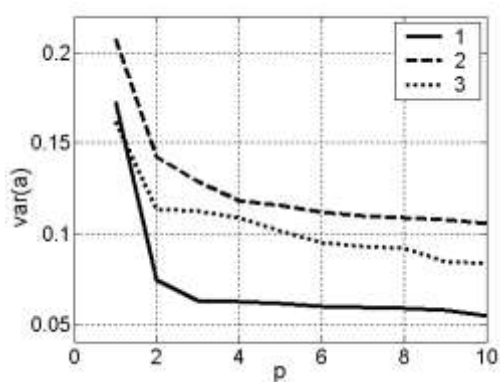


Рисунок 26.1 – Зависимости дисперсии ошибок предсказания от порядка модели

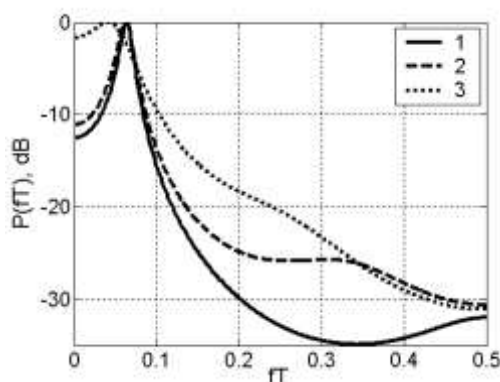


Рисунок 26.2 – Параметрические спектры сигналов

Таблица 26.3 – Средние по 100 реализациям значения коэффициентов γ_3 и γ_4 имитационных сигналов

	Класс 1	Класс 2	Класс 3
γ_3	0.3	0.44	1.02
γ_4	0.56	0.7	1.5

26.3 Использование для распознавания в качестве вектора признаков коэффициентов моделей АР и ОАР

Рассмотрим использование коэффициентов модели ОАР 3–го ранга в качестве вектора признаков и сравним эффективность их применения с результатами, получаемыми по коэффициентам модели АР. Имитационные негауссовы сигналы представлены к распознаванию в смеси с гауссовыми помехами. Для случая негауссовых имитационных процессов АР, коэффициенты моделей 2–го и более высоких рангов не будут существенно отличаться, так как они получены линейным формирующим фильтром. Это дает возможность использовать коэффициенты АР (табл. 26.2) в качестве библиотеки эталонов векторов признаков классов сигналов.

На этапе распознавания для подлежащих классификации выборок смеси $y[t]$ имитационного сигнала и гауссова белого шума оценивались коэффициенты моделей АР(4) и ОАР(4) 3–го ранга для сечений $l = 0$ и $l = 1$. Затем полученные значения коэффициентов, сравнивались с эталонными коэффициентами. Принятие решений в пользу того или иного класса осуществлялось по минимуму евклидова расстояния между эталонными и найденными оценками векторов коэффициентов моделей.

Решающие правила имели вид:

$$g^* = \arg \min_g \left\{ \left(\vec{\Phi}_g - \hat{\vec{\Phi}}_2 \right)^2 \right\}, \quad g = \overline{1, 3} \quad (26.1)$$

– для модели АР 2–го ранга;

$$g^* = \arg \min_g \left\{ \left(\vec{\Phi}_g - \hat{\vec{\Phi}}_3 \right)^2 \right\}, \quad g = \overline{1, 3} \quad (26.2)$$

– для модели ОАР 3–го ранга; где $\vec{\Phi}_g$ – вектор коэффициентов АР, полученный по g –ой эталонной реализации (табл. 26.2); $\hat{\vec{\Phi}}_2$ – набор коэффициентов АР, оцениваемых по реализации смеси имитационного сигнала и помехи; $\hat{\vec{\Phi}}_3$ – набор коэффициентов ОАР 3–го ранга, оцениваемых по смеси имитационного сигнала и помехи. Обозначим через R_1 решение, принятое по минимуму евклидова

расстояния между эталонными коэффициентами АР и выборочными коэффициентами смеси АР 2-го ранга (26.1); R_2 и R_3 – решения (26.2), принятые по минимуму евклидова расстояния между эталонными коэффициентами и выборочными коэффициентами ОАР 3-го ранга смеси для сечений $l=0$ и $l=1$ соответственно. Структура распознающего устройства приведена на рис. 26.3.

На рис. 26.4 представлены зависимости средней вероятности правильного распознавания P_{cp} от ОСШ при различных длинах выборок в присутствии аддитивного гауссова белого шума. Данные получены усреднением результатов 100 опытов для каждого из классов. Из графиков на рис. 26.4 видно, что распознавание по коэффициентам АР имеет некоторое преимущество для больших ОСШ, но заметно уступает коэффициентам ОАР для малых ОСШ. Преимущество решений R_2 и R_3 сказывается в диапазоне ОСШ от 3 дБ до 10–13 дБ и в некоторых случаях достигает по вероятности правильного распознавания 0.46. Как правило, решение R_3 более эффективно по сравнению с R_2 при больших ОСШ.

Зависимости P_{cp} от длины реализаций сигналов, представленные на рис. 26.5, указывают на устойчивость параметров модели АР 2-го ранга при изменении N . Для модели ОАР 3-го ранга имеет место зависимость P_{cp} от N , что, вероятно, связано с большей дисперсией моментных функций по сравнению с корреляционной функцией.

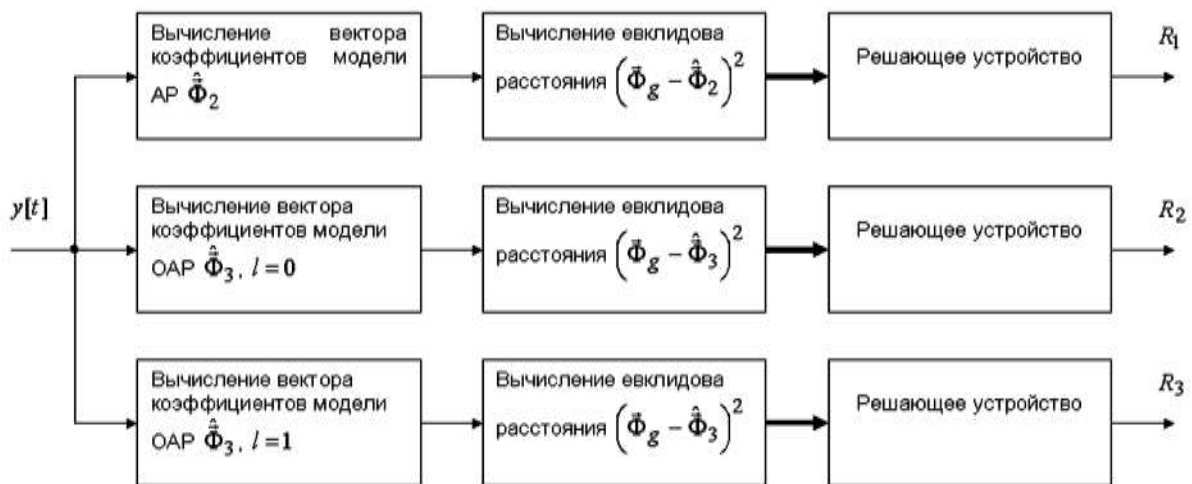


Рисунок 26.3 – Структура распознающего устройства

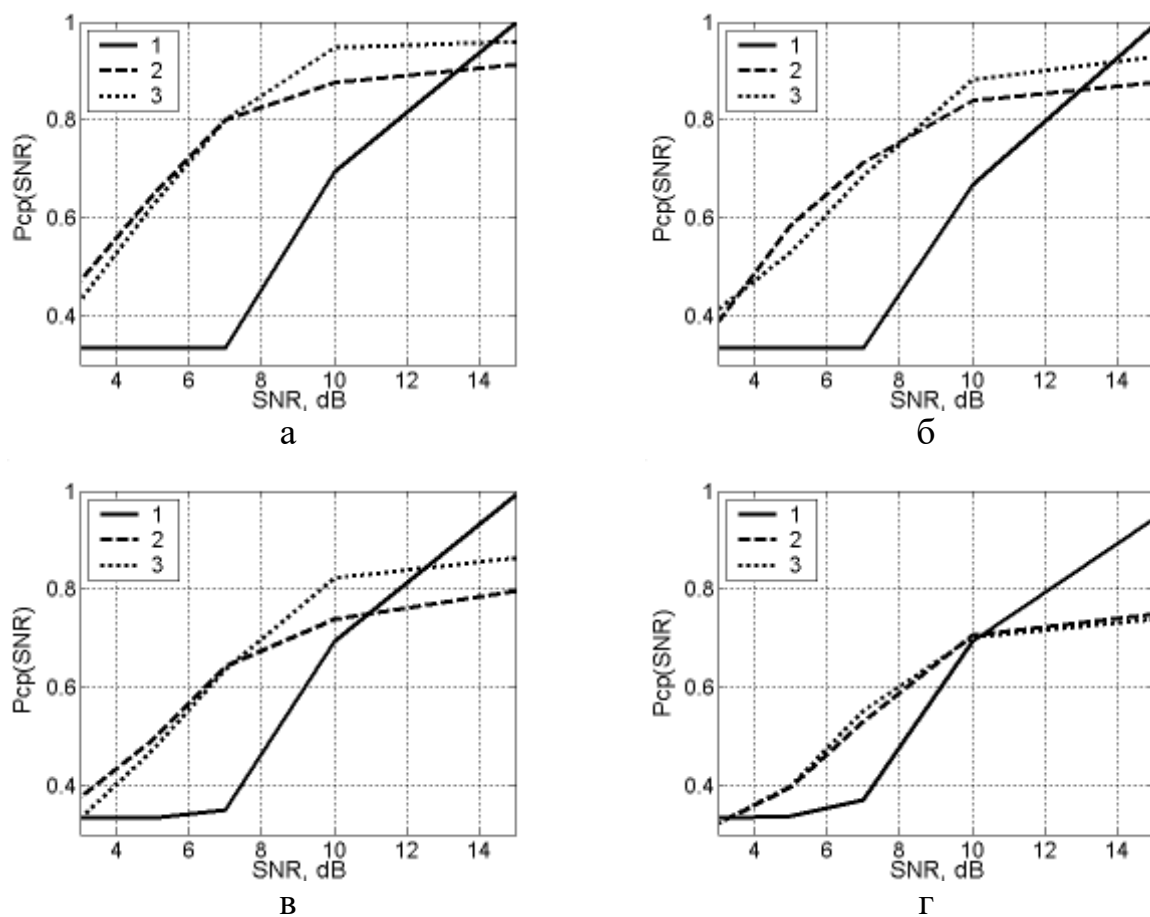


Рисунок 26.4 – Зависимости средней вероятности правильного распознавания от ОСШ: а – $N=1000$, б – $N=500$, в – $N=250$, г – $N=150$; решающие правила: 1 – R_1 , 2 – R_2 , 3 – R_3

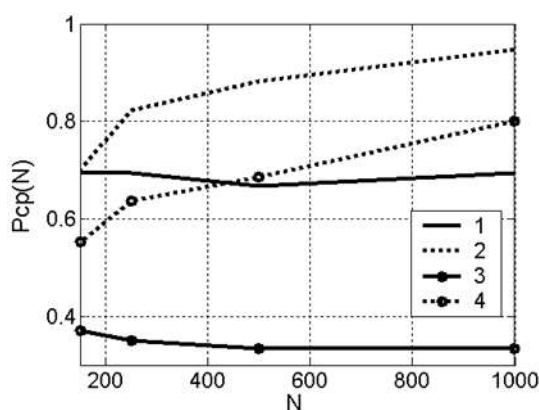


Рисунок 26.5 – Зависимости средней вероятности правильного распознавания от длины реализаций: 1, 2 – ОСШ=10 дБ; 3, 4 – ОСШ=7 дБ; решающие правила: 1, 3 – R_1 ; 2, 4 – R_3

На рис. 26.6 приведены зависимости средней вероятности правильного распознавания P_{cp} от порядка модели p для значения $N = 500$. Так, с ростом p повышается P_{cp} , при использовании правила R_1 . Это происходит в силу того, что с увеличением порядка модели АР получается асимптотически более точное описание моделируемого сигнала. Для решения R_3 значение $p = 4$ оказывается оптимальным, а при росте p начинает сказываться увеличение дисперсии оценки коэффициентов ОАР с большими значениями индексов.

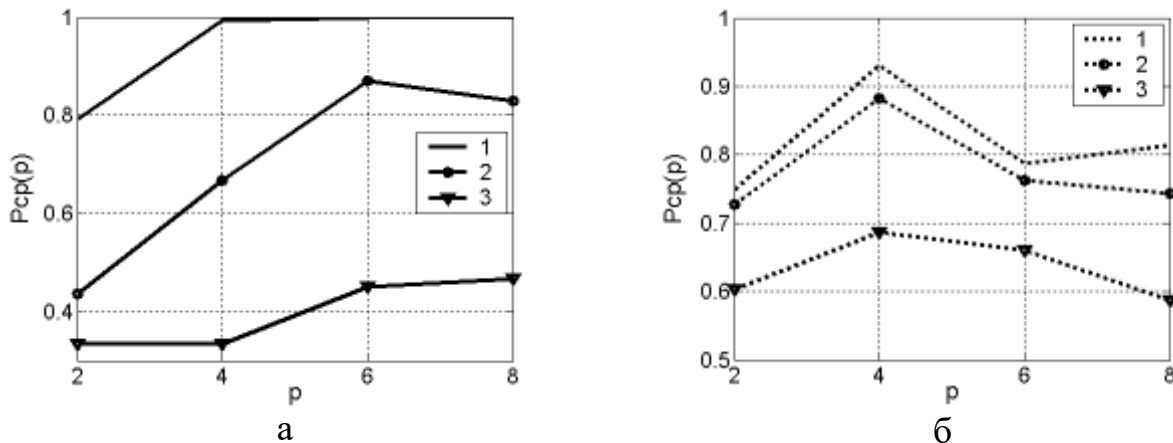


Рисунок 26.6 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от порядка модели ($N = 500$): а – R_1 , б – R_3 ;
1 – ОСШ=15 дБ; 2 – ОСШ=10 дБ; 3 – ОСШ=7 дБ

В радиолокации при решении задачи обнаружения повышенное внимание уделяется подавлению коррелированных помех. Устройства подавления помех с помощью обесцараживающих фильтров могут существенно изменить статистические характеристики отраженного полезного сигнала, что не имеет большого значения для решения задачи обнаружения сигнала. Однако при распознавании сигналов предварительное подавление помехи может существенно снизить вероятность правильного распознавания. Поэтому при наличии коррелированной помехи желательно использовать признаки, слабо чувствительные такого рода помехам. Ниже показано, что к таким признакам относятся параметры моделей ОАР.

Проведены исследования влияния гауссовых коррелированных помех на качество распознавания. На рис. 26.7 представлены зависимости вероятности правильного распознавания для случая воздействия на имитационные сигналы гауссовой коррелированной помехи с центральной частотой $f_{IT} = 0.2$ и полосой занимаемых частот $\Delta f_{IT} = 0.02$. Параметрический спектр помехи показан на рис. 26.8 (кривая 4). Анализ графиков указывает на существенное преимущество методов распознавания с использованием решающих правил R_2 и R_3 , учитывающих параметры обобщенных моделей линейного предсказания.

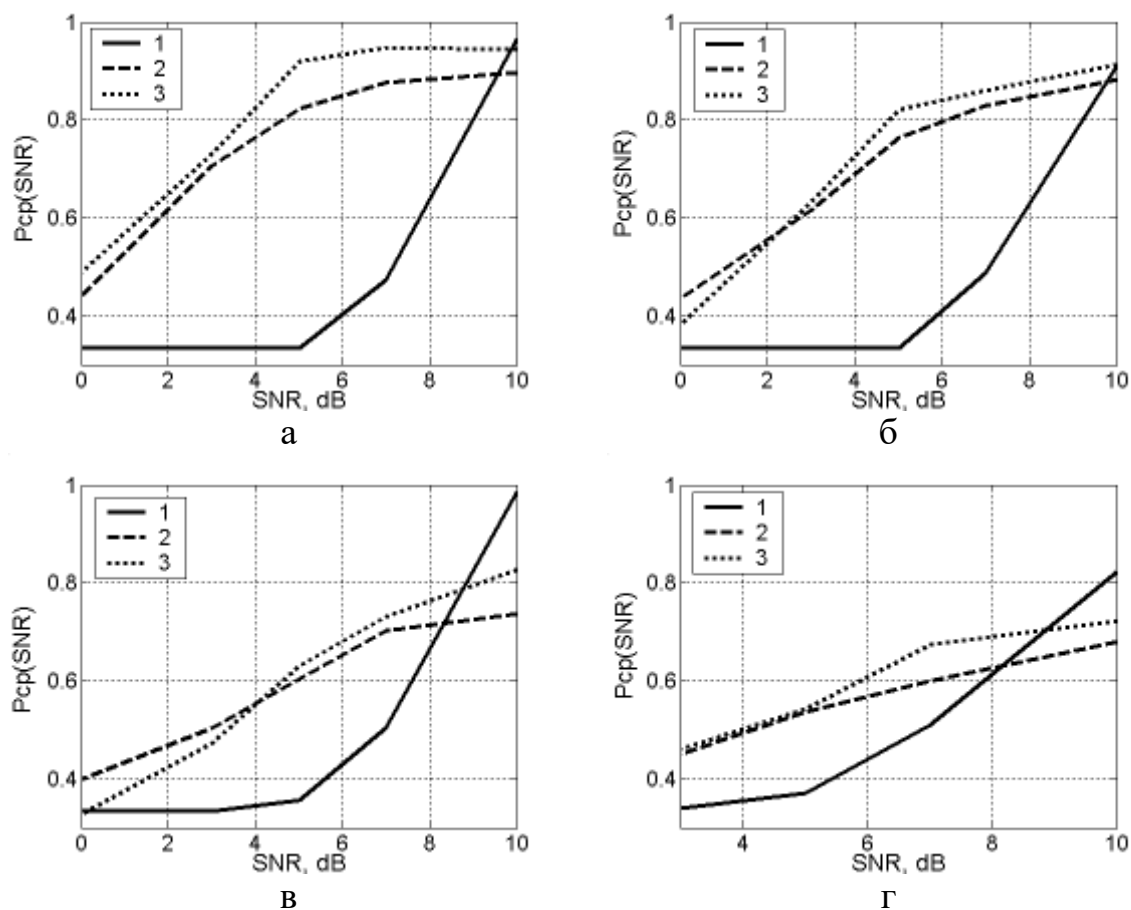


Рисунок 26.7 – Зависимости средней вероятности правильного распознавания от ОСШ:

а – $N=1000$; б – $N=500$; в – $N=250$; г – $N=150$;
 решающие правила: 1 – R_1 ; 2 – R_2 ; 3 – R_3

Интерес представляет также изучение влияния спектральной локализации коррелированной помехи по отношению к спектрам распознаваемых сигналов и полосы частот занимаемой помехой. Зависимости P_{cp} от центральной частоты спектра помехи и полосы частот помехи для $N=500$ показаны на рис. 26. 9 и 26. 10 соответственно. Как видно из графиков, распознавание по коэффициентам ОАР имеет преимущество не при всех возможных центральных частотах спектра помехи, хотя и обеспечивает достаточно высокие P_{cp} почти во всем диапазоне. Также можно сказать, что в сравнении с R_1 , решения R_2 и R_3 менее зависимы от ширины спектра помехи и обеспечивают лучшие результаты распознавания в случае помех с более узким спектром.

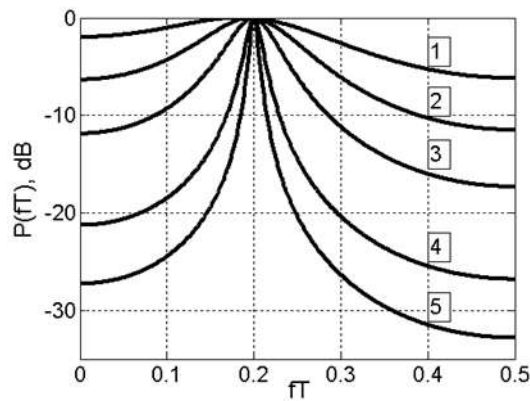


Рисунок 26.8 – Параметрические АР (42) спектры помех для ширины
полос:
1 – $\Delta f_{\Pi}T = 0.24$; 2 – $\Delta f_{\Pi}T = 0.12$; 3 – $\Delta f_{\Pi}T = 0.06$; 4 – $\Delta f_{\Pi}T = 0.02$;
5 – $\Delta f_{\Pi}T = 0.01$

26.4 Устройства распознавания на основе обеляющих фильтров линейного предсказания

Ниже проанализирована эффективность использования обеляющих АР и ОАР фильтров для решения задачи распознавания имитационных радиолокационных сигналов. Решающее правило определялось с использованием некоторых статистических характеристик ошибок предсказания, являющихся выходом обеляющих фильтров. Структура устройства распознавания строилась на основе набора из трех обеляющих АР фильтров с коэффициентами, представленными в табл. 26.2. На вход каждого из фильтров одновременно подавались имитационные распознаваемые сигналы в смеси с помехой. На выходах фильтров оценивались статистические характеристики ошибок предсказания. По полученным оценкам статистических характеристик принимались решения в пользу того или иного класса.

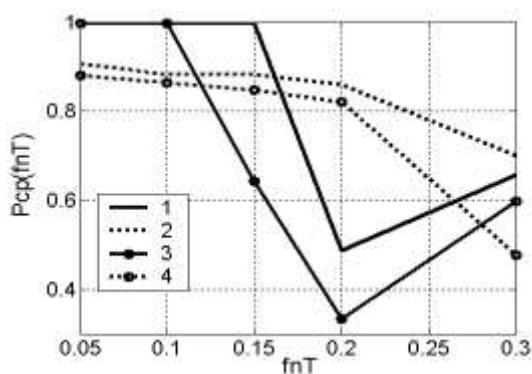


Рисунок 26.9 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от центральной частоты спектра помехи

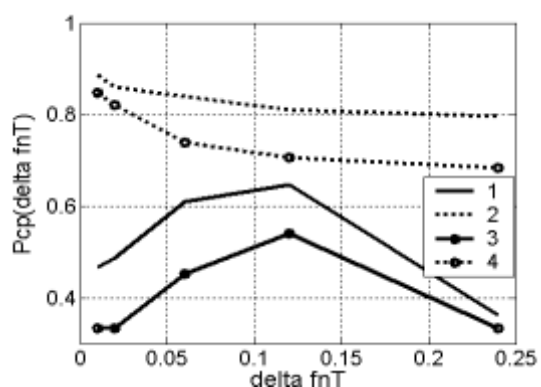


Рисунок 26.10 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от полосы частот,

($\Delta f_{II}T = 0.02$): 1, 2 – ОСШ=7 дБ; занимаемой помехой ($f_{II}T = 0.2$):
 3, 4 – ОСШ=5 дБ; 1, 2 – ОСШ=7 дБ; 3, 4 – ОСШ=5 дБ;
 1, 3 – R_1 ; 2, 4 – R_3 1, 3 – R_1 ; 2, 4 – R_3

Модель АР 2–го ранга минимизирует дисперсию ошибки предсказания. Из критерия оптимальности модели ОАР следует, что моментная функция ошибки предсказания модели ОАР равна нулю или имеет вид δ –функции. Поэтому в решающих правилах применялись критерии минимума дисперсии ошибки предсказания на выходе АР фильтра (25.4) (решение R_4) и минимума моментной функции и дисперсии моментной функции ошибки предсказания на выходе ОАР фильтра (решения R_5 , R_6). Минимум моментной функции ошибки предсказания (25.3) определялся для сечения $l = 0, k = 2$ (решение R_5). Решение R_6 учитывало несколько значений моментной функции ошибок предсказания. Для этого использовалась дисперсия моментной функции ошибки предсказания (25.2) при $lag = 7, k = 0$. Структура такого распознающего устройства приведена на рис. 26.11.

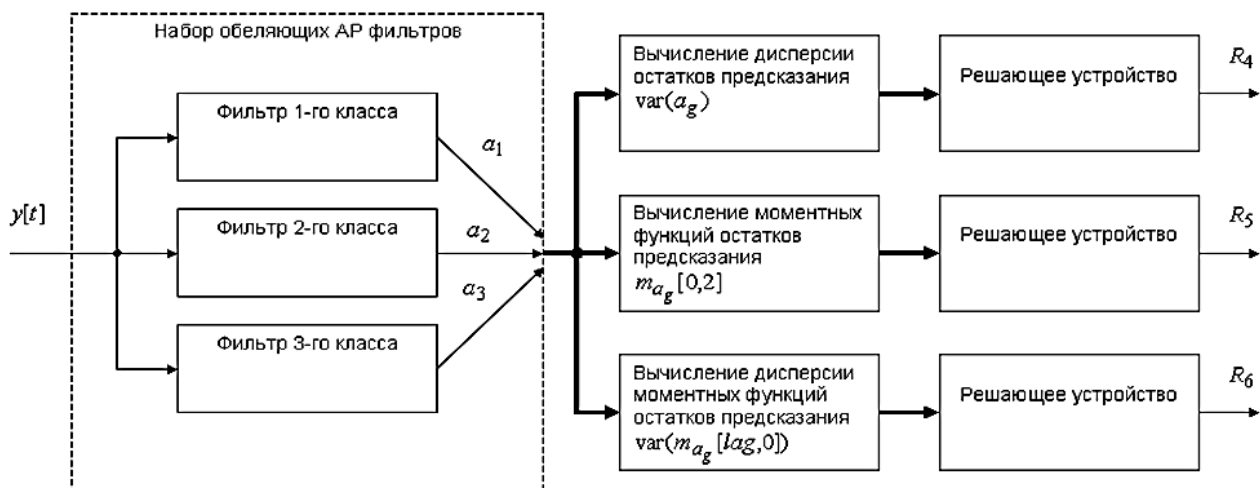


Рисунок 26.11 – Структура распознающего устройства

Зависимости P_{cp} для различных длин реализаций и типов решений приведены на рис. 26.12. Анализ графиков показывает, что для решающего правила R_4 , как и в случае R_1 , зависимость P_{cp} от длины реализации N выражена слабо. Для решающих правил R_5 и R_6 вероятность правильного распознавания значительно возрастает с увеличением N . Правило R_6 дает лучший результат, чем R_5 и, кроме того, требует меньших вычислительных затрат. Из рис. 26.12 следует, что при больших длинах выборок решение R_6 обеспечивает значительный выигрыш по сравнению с другими решающими

правилами, в диапазоне ОСШ = 4÷9 дБ. Зависимость P_{cp} от длины реализации представлена на рис. 26.13. Из анализа зависимостей P_{cp} от порядка модели для $N=500$ (рис. 26.14) следует, что для исследуемых признаков значение $p=4$ является оптимальным.

Графики зависимостей вероятности правильного распознавания от длин реализаций, наблюдаемых в присутствии коррелированной гауссовой помехи с центральной частотой спектра $f_{\Pi}T=0.2$ и его шириной $\Delta f_{\Pi}T=0.02$, приведены на рис. 26.15. Данные получены по 100 опытам для каждого из трех классов. Приведенные зависимости соответствуют результатам, показанным на рис. 26.12, но с несколько худшим качеством распознаванием. Однако интервал ОСШ, при котором имеет преимущество решающее правило R_6 над решающим правилом R_4 , увеличился.

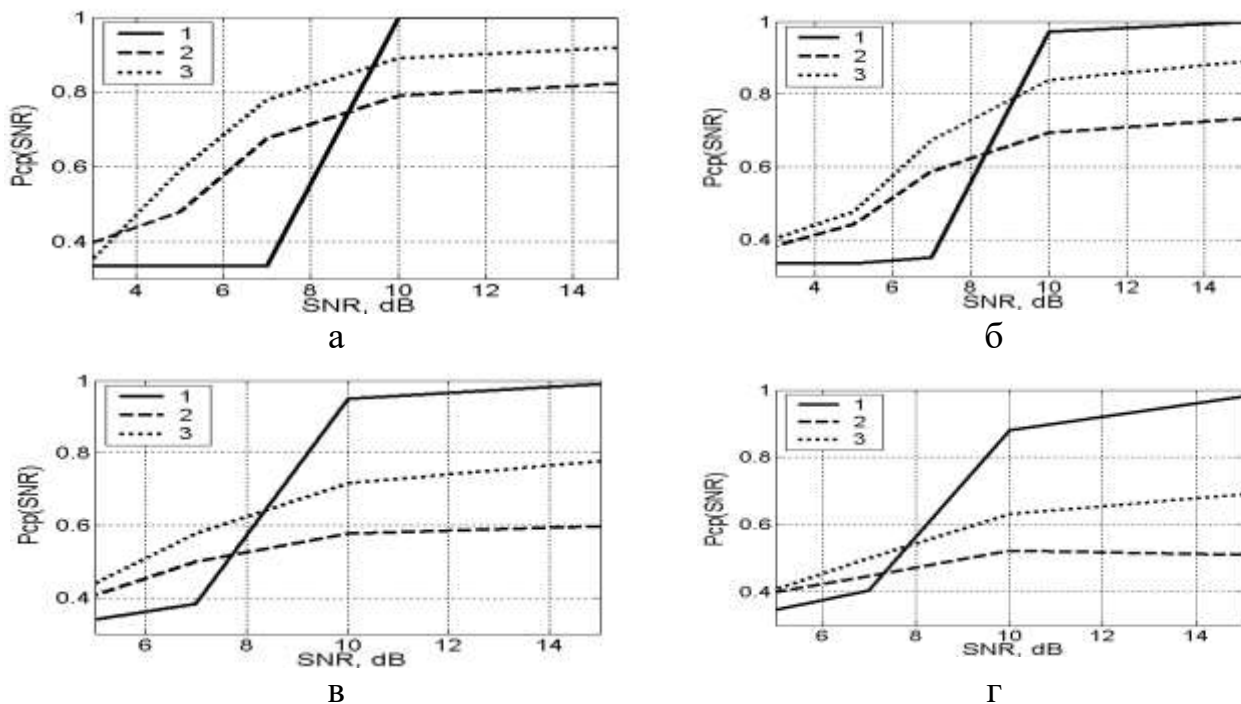


Рисунок 26.12 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от ОСШ: а – $N=1000$; б – $N=500$; в – $N=250$; г – $N=150$; решающие правила: 1 – R_4 ; 2 – R_5 ; 3 – R_6

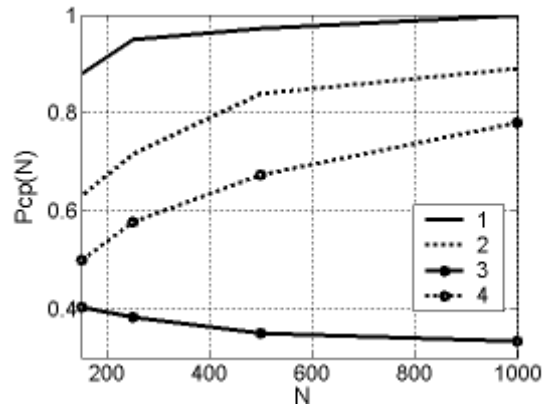


Рисунок 26.13 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от длины реализаций:
1, 2 – ОСШ=10 дБ; 3, 4 – ОСШ=7 дБ; 1, 3 – R_4 ; 2, 4 – R_6

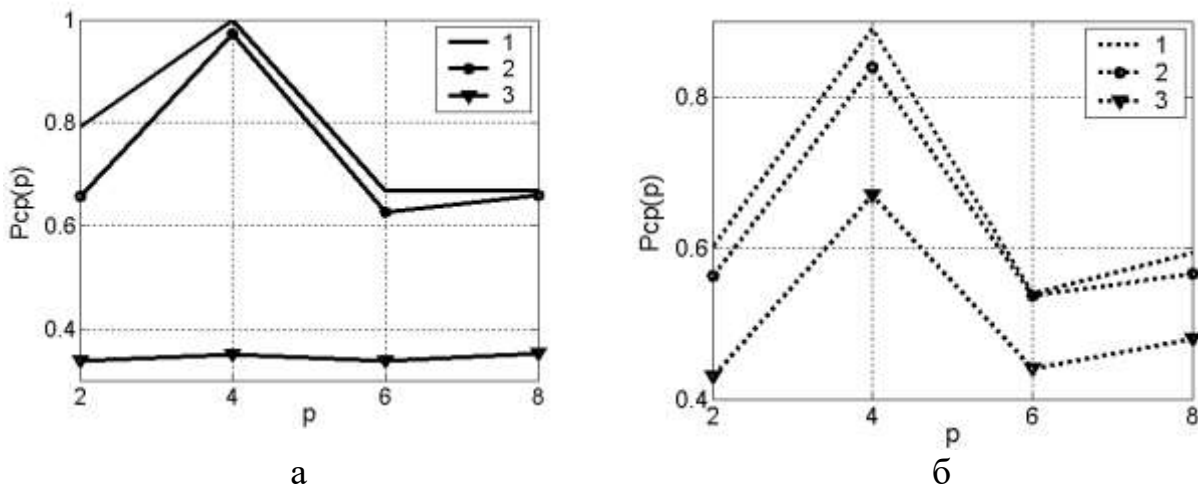


Рисунок 26.14 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от порядка модели ($N = 500$): а – R_4 , б – R_6 ;
1 – ОСШ=15 дБ; 2 – ОСШ=10 дБ; 3 – ОСШ=7 дБ

Исследовалось также влияние положения максимума спектра помехи и ее полосы частот на качество распознавания. Зависимости P_{cp} от центральной частоты спектра помехи и ширины ее спектра для $N = 500$ показаны на рис. 26.16 и рис. 26.17 соответственно. Высокие значения P_{cp} в области частот $fT = 0.05 \div 0.15$ объясняются тем, что влияние помехи ослабевает за счет частичного ее подавления обесцвечивающими фильтрами.

Приведенные результаты показывают преимущество описанных способов, использующих модели ОАР, над известными способами авторегрессионного распознавания применительно к негауссовым огибающим радиолокационных сигналов, наблюдаемым в присутствии гауссова белого шума и гауссовых коррелированных помех. Использование этих способов также будет эффективно

в случае мешающих помех имеющих нулевую асимметрию или нулевую моментную функцию 3-го порядка.

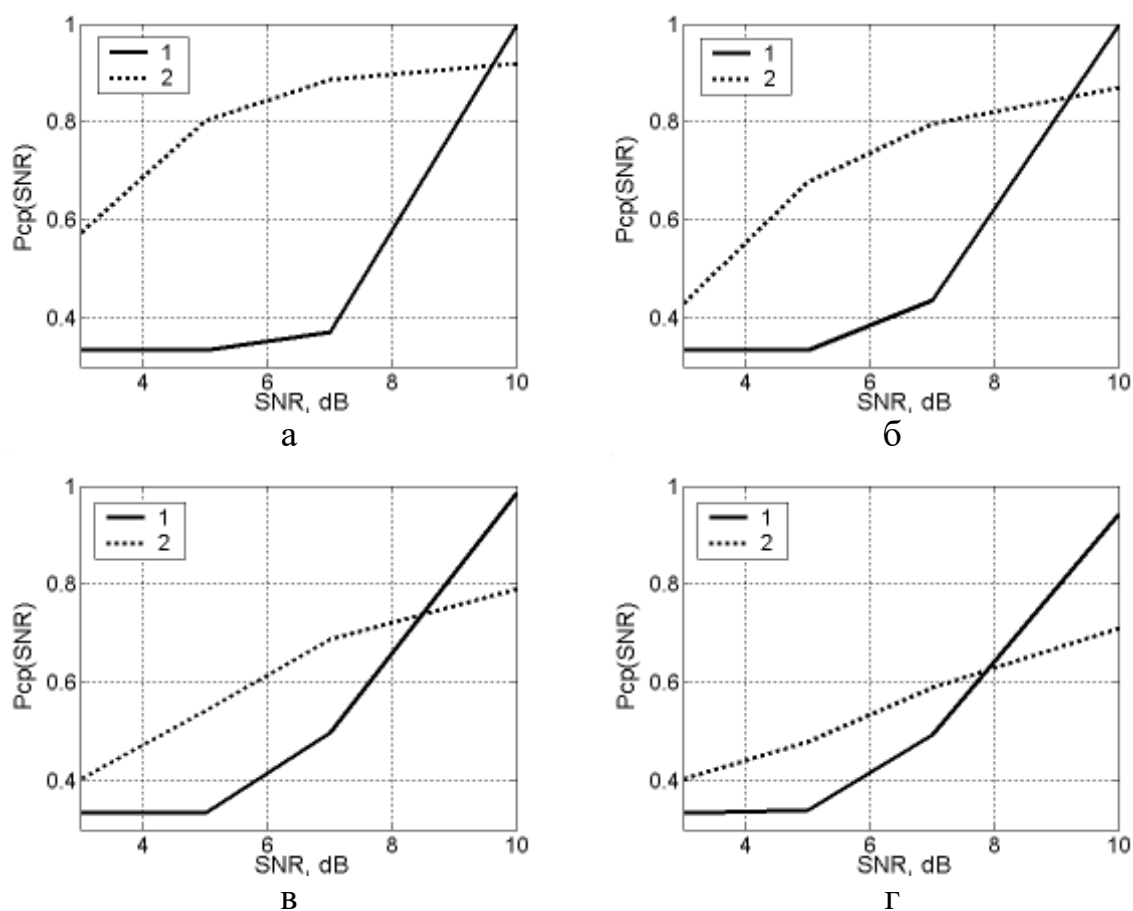


Рисунок 26.15 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от ОСШ: а – $N=1000$; б – $N=500$; в – $N=250$; г – $N=150$; решающие правила: 1 – R_4 ; 2 – R_6

В зависимости от статистических характеристик помехи и ОСШ, выбирается наиболее подходящий способ принятия решений. На рис. 26.18 представлена возможная структура устройства авторегрессионного распознавания радиолокационных сигналов. В устройстве производится анализ величины моментной функции помехи в сравнении с моментными функциями отраженных сигналов, а также оценка ОСШ и параметров спектра помехи. Когда плотность распределения вероятности помехи несимметрична, решение принимается в соответствии с решающим правилом (25.3). Решению (25.4)

отдается предпочтение, когда помеха имеет близкую к нулю моментную функцию и значение ОСШ попадает в интервал, где обеспечивается преимущество этого решающего правила. Решения (25.4) и (25.3) выбраны как лучшие среди рассмотренных в разделе решений для моделей АР 2-го и моделей ОАР 3-го рангов.

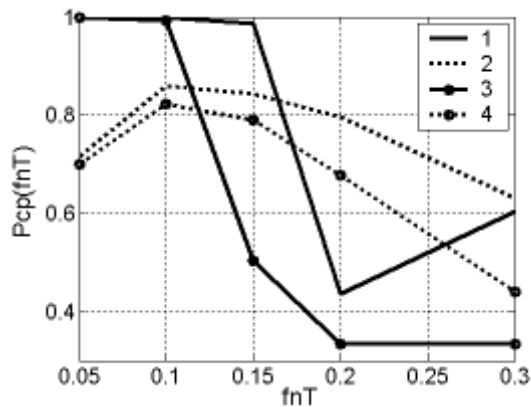


Рисунок 26.16 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от центральной частоты спектра помехи ($\Delta f_{\Pi}T = 0.02$): 1, 2 – ОСШ=7 дБ; 3, 4 – ОСШ=5 дБ; решающие правила: 1, 3 – R_4 ; 2, 4 – R_6

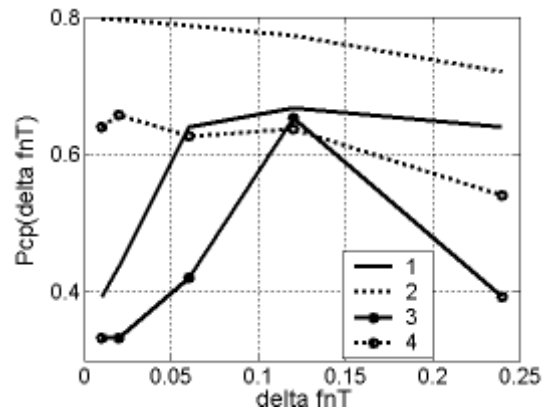


Рисунок 26.17 – Зависимость средней вероятности правильного распознавания от полосы частот, занимаемой помехой ($f_{\Pi}T = 0.2$): 1, 2 – ОСШ=7 дБ; 3, 4 – ОСШ=5 дБ; решающие правила: 1, 3 – R_4 ; 2, 4 – R_6

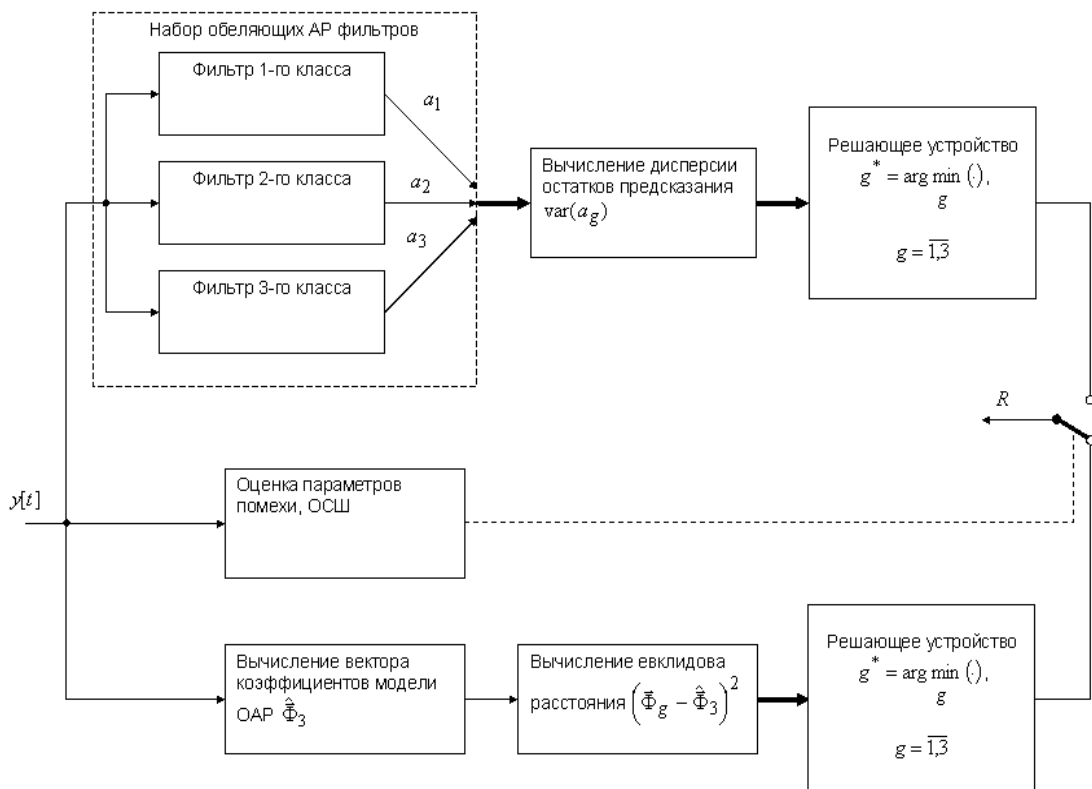


Рисунок 26.18 – Структура устройства авторегрессионного распознавания радиолокационных сигналов

ЛИТЕРАТУРА

1. Небабин В.Г., Сергеев В.В. Методы и техника радиолокационного распознавания. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.
2. Селекция и распознавание на основе локационной информации / А.Л. Горелик, Ю.Л. Барабаш, О.В. Кривошеев, С.С. Эпштейн / Под ред. А.Л. Горелика. – М.: Радио и связь, 1990. – 240 с.
3. Казаков Е.Л., Васильев Д.Г., Казаков А.Е. Распознавание воздушных целей по некогерентному многочастотному сигналу с учетом поляризации в разных диапазонах длин волн. – Харьков, 2009. – 165 с.
4. Казаков Е.Л. и др. Распознавание радиолокационных целей по сигнальной информации. – Харьков, КП «Городская типография» 2010. – 232 с.
5. Тихонов В.А., Тихонов Д.В. Авторегрессионное моделирование радиолокационных объектов // Збірник наукових праць. – Харків: ХВУ. – Вип.4 (26). – 1999. – С. 27–29.

27 ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ И СТАТИСТИК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В ЗАДАЧАХ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ В КАНАЛАХ СВЯЗИ

27.1 Введение

Применение xDSL-технологий для уплотнения абонентских и соединительных линий цифровой речевой связи и передачи данных является важной задачей развития телекоммуникаций. Внедрение новых технологий на существующих линиях связи может вызывать определенные трудности, связанные с ограниченной шириной полосы пропускания каналов, величиной затухания, влиянием помех и искажений, групповым временем задержки. В связи с разработками скоростных модемов, нами проводились исследования пропускной способности существующих телефонных каналов связи и определении требований к проектируемым системам передачи данных [1], выбора типа корректоров межсимвольных искажений [2,3], оценки их времени адаптации [4]. Как показали исследования, существенным недостатком, снижающим эффективность работы корректоров, являются ошибки их коэффициентов усиления, возникающие вследствие влияния шумов и помех во время настройки.

В разделе рассмотрены вопросы использования моделей линейного предсказания для моделирования АЧХ каналов связи с узкой и широкой полосой пропускания. Такое моделирование необходимо при создании и анализе устройств передачи данных в радио- и телекоммуникационных каналах связи, а также для тестирования зарубежной промышленной аппаратуры на отечественных кабельных линиях связи.

При больших скоростях передачи данных актуальной становится проблема защиты от искажений. Поэтому ниже рассмотрены также способы применения статистик высших порядков в задаче коррекции межсимвольных искажений.

27.2 Моделирование каналов связи с нелинейной частотной характеристикой

Разработка высокоскоростных модемов для кабельных и радиоканалов, оценка их потенциальных и эксплуатационных характеристик связана с решением комплекса технических задач, а также требует создания соответствующего программного обеспечения, моделирования систем и каналов связи. Внедрение и тестирование зарубежной аппаратуры должно сопровождаться совершенствованием методов защиты от помех и искажений, которые бы учитывали специфику характеристик и качество эксплуатируемых линий передачи. Частотные характеристики каналов по коммутируемым телефонным линиям изменяются каждый раз при наборе нового номера абонента, зависят от типа кабеля, от условий и срока его эксплуатации. Поэтому можно полагать,

что характеристики каналов передачи под воздействием различных факторов могут изменяться в широких пределах. Ниже проанализированы некоторые структуры цифровых фильтров с точки зрения их применимости для моделирования каналов и линий связи.

Для моделирования каналов, частотные характеристики которых не содержат узкополосных составляющих, целесообразно использовать нерекурсивные трансверсальные цифровые фильтры (рис. 27.1). При этом зачастую удастся получить приемлемую аппроксимацию заданной частотной характеристики при небольшом числе звеньев фильтра [5].

Выходной сигнал нерекурсивного фильтра (НРФ) описывается выражением вида

$$x[t] = \sum_{i=0}^p h[i]y[t-i],$$

где $h[i]$ – коэффициенты усиления отводов нерекурсивного фильтра, p – число звеньев НРФ.

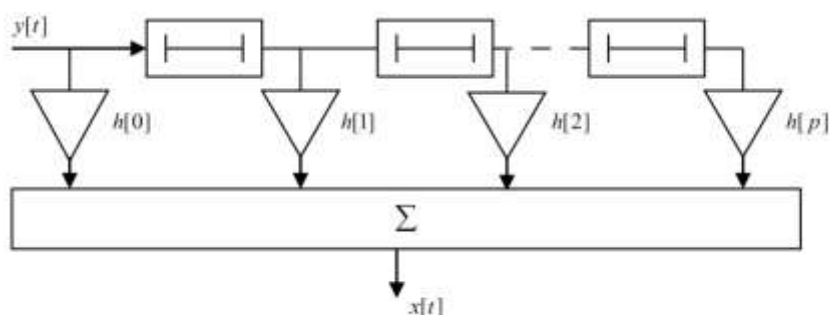


Рисунок 27.1 – Модель канала связи в виде нерекурсивного фильтра

Существует множество методов синтеза нерекурсивных фильтров, наиболее известными из которых являются: метод взвешивающих окон, метод частотной выборки, метод наилучшей равномерной аппроксимации [6, 7]. В случае, когда известно аналитическое выражение для передаточной функции, оправданным во многих случаях оказывается использование метода взвешивающих окон.

Рассмотрим модель, позволяющую имитировать класс линий передачи, амплитудно–частотные характеристики которых содержат узкополосные пики в рабочей полосе частот. Для моделирования таких линий предлагается использовать неканоническую прямую форму рекурсивного фильтра [7], в которой только один из коэффициентов прямой цепи не равен нулю.

Выходной сигнал такого рекурсивного фильтра описывается соотношением

$$x[t] = z[t] - \sum_{i=1}^p \Phi[i]x[t-i],$$

где $z[t]$ – входные отсчеты дискретизированного сигнала, $\Phi[i]$ – коэффициенты усиления фильтра, $x[t]$ – отсчеты выходного сигнала рекурсивного фильтра.

Структура рекурсивного фильтра совпадает со структурой формирующего фильтра процесса авторегрессии. Приведенный в разделе 1 метод расчета коэффициентов и числа звеньев авторегрессионного формирующего фильтра (1.19) вполне соответствует решаемой задаче синтеза рекурсивного фильтра по заданной АЧХ. В качестве порождающего процесса в авторегрессионной модели линейного предсказания используется белый шум. Поэтому нормированная на дисперсию ошибки предсказания СПМ процесса авторегрессии, совпадает с квадратом модуля частотной характеристики рекурсивного фильтра, которая рассчитывается по формуле

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{\left| 1 - \sum_{i=1}^p \Phi[i] \exp(-ji\omega T) \right|^2}. \quad (27.1)$$

Приведем два примера расчета рекурсивного фильтра с неравномерной АЧХ. Для моделирования каналов связи с помощью рекурсивного фильтра выбирались параметры АЧХ для первого канала равные: $f_1 = 15$, $\Delta f_1 = 7$, $f_2 = 30$, $\Delta f_2 = 10$, $f_3 = 40$, $\Delta f_3 = 15$, $f_4 = 65$, $\Delta f_4 = 15$; и для второго канала: $f_1 = 10$, $\Delta f_1 = 20$, $f_2 = 25$, $\Delta f_2 = 15$, $f_3 = 40$, $\Delta f_3 = 10$, $f_4 = 60$, $\Delta f_4 = 3$.

Соответствующие частотные характеристики моделей каналов, полученные с использованием $H(j\omega)$ по формуле (27.1), представлены на рис. 27.2, где $\omega = f\pi/T$, $T = 100$. Как видно из графика, частоты пиков соответствуют задаваемым при моделировании параметрам. Полосы частот сложно определить визуально, что объясняется наложением соседних частотных составляющих пиков. Выбором значений частот пиков и ширин полос можно изменять в широких пределах частотную характеристику моделируемого канала связи. При малом числе звеньев фильтра легко получить модели АЧХ узкополосных каналов связи. Широкополосные каналы со сложной АЧХ требуют использования большего числа звеньев фильтра.

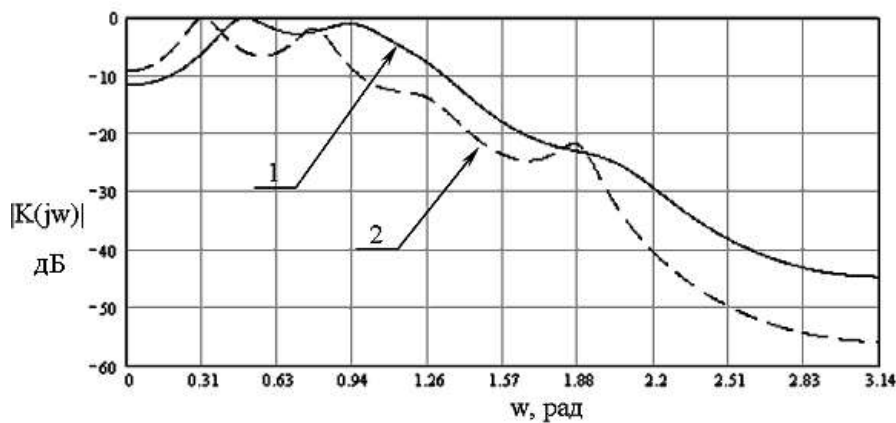


Рисунок 27.2 – Частотные характеристики моделей каналов:

1 – для первого канала, 2 – для второго канала

Аналогичный подход можно использовать и для синтеза нерекурсивного фильтра. В разделе 2 описан предложенный нами метод применения коэффициентов авторегрессии для расчета фильтра скользящего среднего. При этом учитывалось, что АЧХ авторегрессионного фильтра обратная АЧХ фильтра скользящего среднего, т. е.

$$|H_{AP}(j\omega)| = |H_{CC}(j\omega)|^{-1}. \quad (27.2)$$

Таким образом, если известны частоты провалов АЧХ линии связи и их ширина по уровню половинной мощности, можно сравнительно просто рассчитать коэффициенты усиления нерекурсивного фильтра. Для этого используются коэффициенты авторегрессии, позволяющие получить пики АЧХ рекурсивного фильтра на соответствующих частотах провалов АЧХ нерекурсивного фильтра.

Приведем два примера расчета моделей каналов связи, АЧХ которых характеризуется наличием широкополосных составляющих. Пусть значения частот пиков и ширины полос этих пиков для АЧХ моделируемых каналов равны: $f_1 = 0$, $\Delta f_1 = 4$, $f_2 = 100$, $\Delta f_2 = 10$ и $f_1 = 0$, $\Delta f_1 = 1$, $f_2 = 65$, $\Delta f_2 = 22$, $f_3 = 100$, $\Delta f_3 = 10$.

Полученные по формуле (27.2) модули частотных характеристик НРФ представлены на рис. 27.3. Изменением параметров спадов АЧХ и их количества можно изменять форму АЧХ.

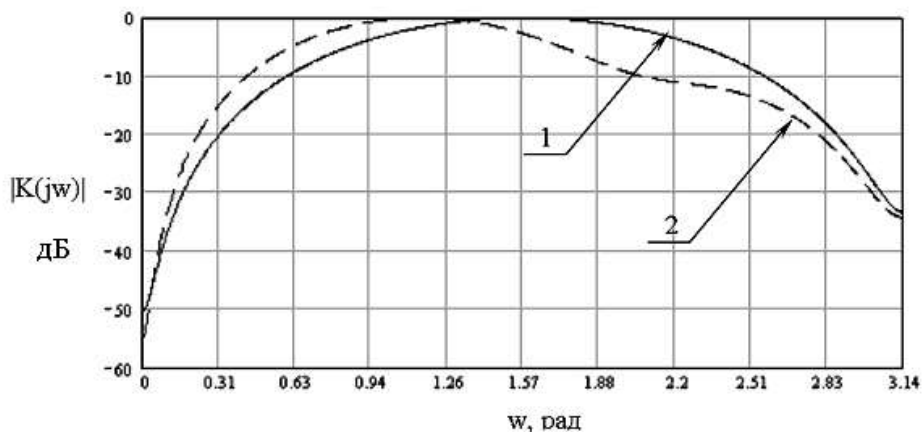


Рисунок 27.3 – Частотные характеристики моделей широкополосных каналов: 1 – для первого канала, 2 – для второго канала

Сложно найти простую универсальную структуру цифрового фильтра, АЧХ которого может принимать необходимую для моделирования различных линий передачи форму. Приведенные методики синтеза цифровых фильтров позволяют сравнительно просто моделировать реальные каналы и линии связи. Анализ полученных результатов показывает достаточно хорошее совпадение частотных характеристик цифровых фильтров и моделируемых каналов связи. При использовании предложенных методов значительно снижается вычислительная сложность синтеза цифровых фильтров.

27.3 Корректоры каналов связи на основе статистик высших порядков

Основным фактором, ограничивающим дальность связи при использовании симметричной технологии SDSL (Symmetric single pair high bitrate Digital Subscriber Line) является межсимвольная интерференция (МСИ), возникающая из-за неидеальности частотных характеристик линий связи. В большинстве работ, посвященных исследованию xDSL технологий, разработаны модели кабельных линий связи, применяемых в западных странах. Они существенно отличаются от характеристик отечественных телекоммуникационных сетей [8]. В связи с этим возникает задача исследования пропускной способности существующих в нашей стране каналов связи и оценка предельных длин регенерационных участков для современных технологий цифровой передачи данных.

При проведении исследований была разработана модель системы передачи данных SDSL для условий эксплуатации отечественных телефонных каналов связи [9]. Показано, что предельная дальность связи при низком уровне шумов на входе приемника существенным образом зависит от структуры корректора, применяемого для снижения влияния МСИ, а также от качества телефонного кабеля. Предельные дальности рассчитаны для двух основных типов кабелей, эксплуатируемых в Украине: многожильного кабеля для абонентских линий ТПП

и кабеля для соединительных линий КСПП. Найденные с помощью предложенной модели зависимости достаточно точно совпадают с реальными данными, полученными при внедрении технологии SDSL. Результаты исследований могут быть использованы разработчиками аппаратуры проводных систем передачи данных для повышения эффективности проектирования и эксплуатации имеющихся телефонных сетей.

МСИ называют явление взаимодействия импульсов цифрового сигнала при передаче по каналам с ограниченной полосой пропускания и нелинейной фазочастотной характеристикой. Именно нелинейность фазочастотной характеристики приводит к затягиванию фронтов импульсов и их интерференции с последующими импульсами сигнала. В результате имеем изменение уровня исходного сигнала, что может привести к ошибкам при демодуляции. При высоких скоростях передачи данных МСИ становится главным источником искажений. Это объясняется тем, что высокую скорость передачи реализуют при помощи увеличения скорости модуляции или использованием многоуровневых сигналов. А это приводит к сближению импульсов на временном интервале фиксированной длины, вследствие чего один импульс получает возможность интерферировать уже с несколькими последующими импульсами.

Как показал анализ [2, 10], линейные структуры корректоров позволяют снизить влияние межсимвольных искажений и повысить достоверность при передаче данных. Однако степень подавления МСИ зависит от параметров канала связи. При коррекции МСИ в каналах, которые имеют довольно равномерные амплитудно–частотные характеристики, удастся добиться значительного повышения достоверности передаваемых данных. Малое время настройки корректора на канал с высокой равномерностью АЧХ в случае использования градиентного алгоритма адаптации дает возможность применять данный алгоритм в реальных системах передачи информации.

При настройке корректоров МСИ вычисление коэффициентов фильтра осуществляется по сигналу, искаженному аддитивными шумами и помехами. Вследствие этого не удастся получить точную АЧХ канала связи, необходимую для настройки корректора. Поэтому интерес представляет разработка метода помехоустойчивого синтеза нерекурсивного выравнивающего фильтра, эффективно работающего при наличии аддитивного белого гауссова шума и значительных флуктуационных коррелированных гауссовых помех [11]. Предложенный нами метод синтеза выравнивающего фильтра основывается на использовании статистик третьего порядка негауссова сигнала и имеет ряд преимуществ по сравнению с фильтром, синтезируемым в рамках корреляционной теории. Нами также был предложен метод синтеза выравнивающего фильтра, подобный [11], путем вычисления импульсной характеристики корректора непосредственно через моментные функции процесса [12].

Для негауссовых сигналов коэффициенты корректора можно рассчитать по моментным функциям высших порядков. Если аддитивный шум либо помеха

имеют гауссово распределение, то параметры фильтра, рассчитанные по моментным функциям третьего порядка, практически не чувствительны к этому шуму (помехе). Это происходит в силу того, что моментные функции третьего порядка процессов с гауссовым распределением равны нулю. Таким образом, использование предлагаемого метода [11] так же как и критерия пикового искажения, позволяет синтезировать корректор с АЧХ, обратной АЧХ канала, даже в присутствии значительного гауссова шума (помехи).

В качестве корректора МСИ использовался нерекурсивный фильтр, синтезированный с помощью решения Винера. Для расчета коэффициентов фильтра по моментным функциям третьего порядка необходимо, чтобы входной сигнал был негауссовым и имел моментные функции третьего порядка. В дальнейшем цифровой фильтр (рис. 27.4), рассчитанный по моментным функциям третьего порядка сигнала, будем называть корректором 3–го ранга.

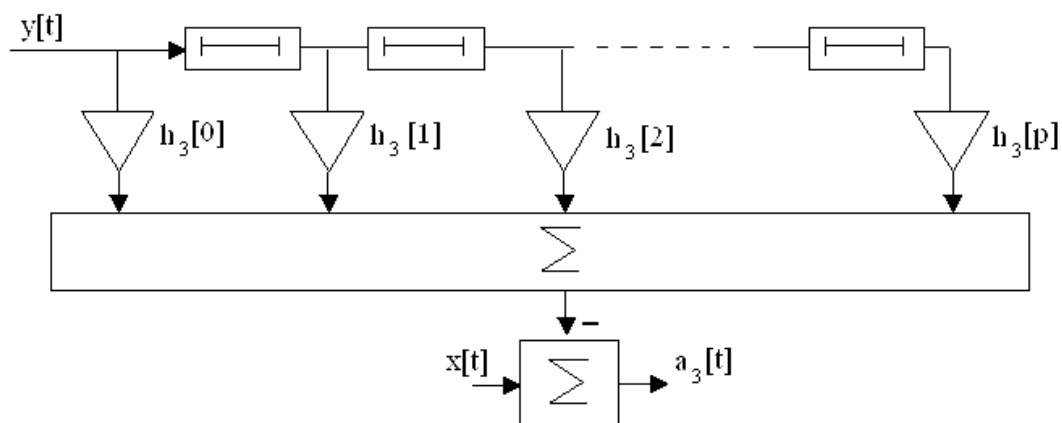


Рисунок 27.4 – Корректор МСИ 3–го ранга

Для корректора МСИ 3–го ранга (рис. 27.4) справедливо выражение

$$x[t] = \sum_{i=0}^p h_3[i]y[t-i] + a_3[t], \quad (27.3)$$

где $x[t]$ – отсчеты тестового сигнала; $y[t]$ – отсчеты искаженного каналом связи сигнала на входе корректора; $h_3[i]$ – коэффициенты корректора 3–го ранга; p – порядок фильтра; $a_3[t]$ – ошибки на выходе корректора 3–го ранга.

Под оптимальными оценками коэффициентов $h_3[i]$ будем понимать такие оценки, которые дают статистически независимые от $y[t]$ ошибки $a_3[t]$. Здесь имеется в виду отсутствие у ошибок $a_3[t]$ статистических связей второго порядка, описываемых моментными функциями третьего порядка, т. е. $E\{a_3[t]y[t-j]y[t-v]\} = 0$.

Найдем выражение для расчета коэффициентов фильтра, умножив для этого левую и правую части (27.3) на $y[t-j]y[t-v]$ и усреднив

$$m_{xyy}[0, j, j - v] = \sum_{i=0}^p h_3[i] m_{yyy}[0, j - i, j - v], \quad j = 0, 1, \dots, p, \quad v \geq 0, \quad (27.4)$$

где моментные функции третьего порядка определяются выражениями

$$m_{xyy}[0, j, j - v] = E\{x[t]y[t - j]y[t - v]\}, \quad (27.5)$$

$$m_{yyy}[0, j - i, j - v] = E\{y[t - i]y[t - j]y[t - v]\}. \quad (27.6)$$

С целью упрощения решения (27.4), будем использовать сечения моментных функций, которые получаются, если фиксировать сдвиг v . В матричной форме уравнение (27.4) можно представить следующим образом

$$\vec{m}_{xyy} = m_{yyy} \vec{H}_3, \quad (27.7)$$

где $\vec{m}_{xyy}$ – вектор размерностью $j \times 1$ с элементами из (27.5) при фиксированном v , m_{yyy} – матрица размерностью $j \times j$, элементами которой являются значения моментной функции (27.6), $\vec{H}_3$ – вектор–столбец коэффициентов корректора 3–го ранга размерностью $j \times 1$. Из уравнения (27.7) следует, что коэффициенты оптимального корректора МСИ 3–го ранга находятся из выражения

$$\vec{H}_3 = m_{yyy}^{-1} \vec{m}_{xyy}. \quad (27.8)$$

Полученное решение (27.8) аналогично известному решению Винера [13].

В системах передачи данных xDSL обучение корректора МСИ производится один раз в начале сеанса связи. При этом не исключена возможность присутствия в принимаемом тестовом сигнале $y[t]$ мешающего воздействия кратковременных гауссовых помех и во время передачи тестового сигнала. В этом случае предлагаемый метод синтеза корректора на основе статистик третьего порядка дает заметный выигрыш по сравнению с методами, минимизирующими СКО ошибки.

Методом статистического моделирования были получены АЧХ винеровского корректора МСИ (кривая d) и корректора МСИ 3–го ранга (кривая c) для случая присутствия на этапе обучения на входе приемника белого гауссова шума и коррелированной гауссовой помехи (рис. 27.5). В качестве модели канала связи был использован фильтр нижних частот, АЧХ которого представлена кривой a. На рис. 27.5 представлены АЧХ каналов и корректирующих фильтров, а также СПМ помехи. Моделирование

проводилось при ОСП составлявшим $q_{\Pi}=0$ дБ и при ОСШ $q=10$ дБ. Центральная частота коррелированной гауссовой помехи в этом случае равнялась $f=0.3$, а в качестве тестового сигнала использовался белый шум с одномерным распределением Парето. Как следует из данных, приведенных в табл. 27.1, уже при $q_{\Pi}=5$ дБ наблюдается заметное преимущество фильтра 3–го ранга.

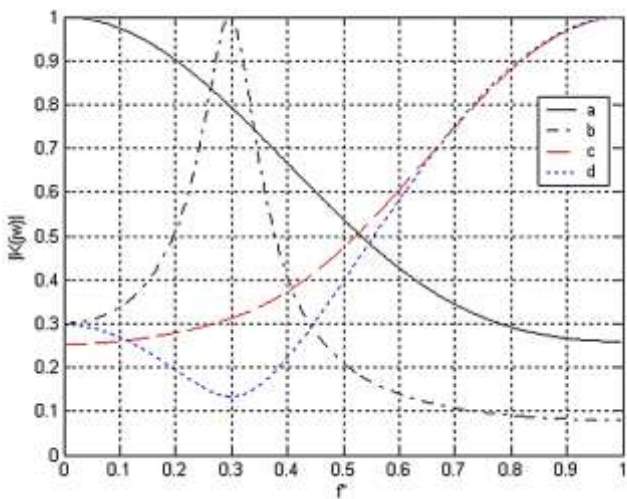


Рисунок 27.5– АЧХ канала и корректирующих фильтров, СПМ помехи

Таблица 27.1 – СКО ошибки $a_2[t]$ на выходе корректоров 2–го и 3–го рангов

$q=10$ дБ						
q_{Π}	0 дБ	3 дБ	5 дБ	7 дБ	10 дБ	15 дБ
СКО 2	0.281	0.203	0.187	0.181	0.178	0.177
СКО 3	0.716	0.197	0.095	0.054	0.034	0.028
$q=20$ дБ						
q_{Π}	0 дБ	3 дБ	5 дБ	7 дБ	10 дБ	15 дБ
СКО 2	0.258	0.177	0.162	0.156	0.154	0.153
СКО 3	0.687	0.173	0.071	0.030	0.010	0.004

Предложенный метод синтеза корректора МСИ на основе статистик третьего порядка сигнала является альтернативным по отношению к методу обращения в нуль незначущих коэффициентов, и позволяет синтезировать корректор даже при высоком уровне МСИ до выравнивания канала связи. Корректор 3–го ранга обеспечивает меньшее, чем корректор 2–го ранга, СКО на выходе в случае, когда обучение корректора происходит в присутствии значительной коррелированной гауссовой помехи,

а последующая его работа происходит при меньших уровнях помехи в канале связи. Возможен вариант комбинированного использования винеровского фильтра и фильтра 3–го ранга в зависимости от уровня помех при настройке и в режиме передачи данных [14].

Ряд методов подавления межсимвольной интерференции основаны на оценивании АЧХ канала связи. В [15] нами предложен метод оценивания амплитудно-частотной характеристики канала связи, моделируемого линейной системой авторегрессии 3–го ранга. Модель авторегрессии рассчитывается по моментной функции третьего порядка, что позволяет значительно уменьшить влияние на точность оценивания сосредоточенных по спектру гауссовых помех. Рассмотрим инвариантную во времени линейную систему с одним входом и одним выходом и решим задачу оценки АЧХ такой системы при мешающем воздействии сосредоточенной по спектру аддитивной гауссовой помехи.

Анализируемый случай характерен для многих практических приложений [16, 17], в которых наблюдения входного процесса $x[t]$ свободны от шума, а наблюдения выходного процесса $z[t]$ равны идеальной реакции линейной системы $y[t]$ на входной процесс плюс случайная гауссова помеха $n[t]$ (рис. 27.6). Оценку АЧХ системы, согласно [17], получают с использованием выражения

$$|H_2(f)| = \left(\frac{P_{2z}(f)}{P_{2x}(f)} \right)^{1/2}, \quad (27.9)$$

где $P_{2z}(f)$ и $P_{2x}(f)$ – СПМ второго порядка выходного и входного процессов соответственно.

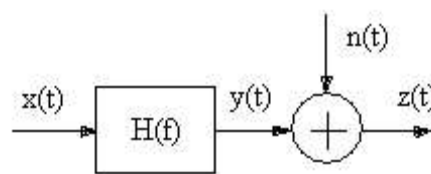


Рисунок 27.6 – Линейная система с одним входом и одним выходом

Спектральные плотности мощности в (27.9) можно оценить по реализациям конечной длины с использованием одного из методов, описанных в [16–18]. В том числе можно применить параметрический метод спектральных оценок на основе модели авторегрессии [18].

Как видно из рис. 27.6, СПМ выходного процесса определяется выражением

$$P_{2z}(f) = P_{2y}(f) + P_{2n}(f) = |H_2(f)|^2 P_{2x}(f) + P_{2n}(f).$$

Следовательно, при значительном уровне сосредоточенной по спектру гауссовой помехи $n[t]$ полученная согласно (27.9) оценка АЧХ неизбежно окажется смещенной.

В тех случаях, когда входное воздействие или тестовый сигнал являются негауссовыми процессами, можно значительно уменьшить влияние гауссовой помехи на точность оценки АЧХ. Для повышения точности оценивания АЧХ линейной системы в присутствии аддитивной гауссовой помехи предлагается производить оценку СПМ входного и выходного процессов при помощи обобщенной модели авторегрессии 3-го ранга. Условием применения предлагаемого метода, является негауссовость входного $x[t]$ и выходного $y[t]$ процессов. Эти процессы должны иметь отличные от нуля моментные функции третьего порядка.

Решение поставленной задачи основано на оценке спектров высших порядков. Различия в вероятностном распределении сигнала и помехи часто приводят к появлению различий в спектральных плотностях высших порядков. Это связано с тем, что моментные и кумулянтные функции сигнала и помехи могут заметно отличаться. У гауссовой помехи моментная функция третьего порядка равна нулю. Поэтому моментная функция смеси негауссова полезного сигнала и гауссовой помехи будет определяться характеристиками сигнала. Так как полезный сигнал и помеха будут иметь разные моментные функции, то будут отличаться параметры обобщенных моделей авторегрессии и соответствующие им параметрические оценки спектров.

СПМ третьего порядка негауссова случайного процесса [19] преобразуется линейной системой согласно выражению

$$|P_{3z}(f_1, f_2)| = |H_3(f_1)| |H_3(f_2)| |H_3(f_1 + f_2)| |P_{3x}(f_1, f_2)|.$$

Из этого выражения следует, что при $f_2 = 0$ АЧХ $|H_3(0)| = 1$ и оценка АЧХ линейной системы может быть рассчитана по формуле

$$|H_3(f)| = \left(\frac{|P_{3z}(f)|}{|P_{3x}(f)|} \right)^{1/2}, \quad (27.10)$$

где $P_{3z}(f)$ и $P_{3x}(f)$ – оценки нулевых сечений одностороннего спектра третьего порядка выходного и входного процессов соответственно. Если в качестве тестового сигнала используют негауссов белый шум, то $P_{3x}(f) = m_{3a}$ – постоянная величина, равная третьему центральному моменту случайного процесса. В этом случае выражение (27.10) упрощается

$$|H_3(f)| = \left(\frac{P_{3z}(f)}{m_{3a}} \right)^{1/2}.$$

Если оцениваемая система описывается моделью авторегрессии, то в качестве $P_{3z}(f)$ удобно брать параметрическую спектральную оценку.

На рис. 27.7 кривая 1 представляет АЧХ канала связи, а кривые 2 и 3 оценки АЧХ канала связи согласно (27.9) и (27.10) соответственно.

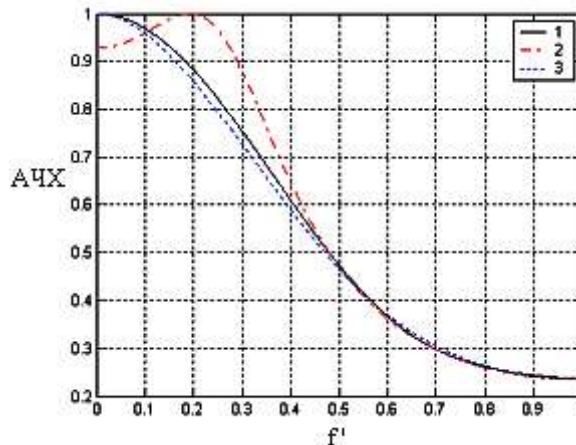


Рисунок 27.7 – АЧХ канала связи и оценки АЧХ канала связи

Как видно из рис. 27.7, предложенный метод оценивания АЧХ канала связи, в отличие от традиционных, оказывается менее чувствительным к воздействию гауссовой коррелированной помехи и обеспечивает высокую точность оценивания при низком ОСП, равном 3 дБ. Еще большее преимущество предложенного метода перед традиционными получено при ОСП 0 дБ.

Предложенный метод может быть использован для идентификации каналов связи при низких ОСШ в случае применения негауссова тестового сигнала. Увеличение точности оценивания АЧХ канала связи позволит обеспечить более эффективное подавление межсимвольной интерференции с помощью алгоритма Витерби и других методов, требующих априорного знания характеристик канала.

Необходимым условием эффективной работы корректора МСИ является его точная настройка на характеристики канала связи. Для этой цели в системе SDSL используется процедура адаптивного расчета коэффициентов корректора в начале каждого сеанса связи. В ряде работ [12, 14, 16] указывается на возможность применения для расчета коэффициентов корректора статистик высших порядков. Такие методы более устойчивы к шумам и позволяют в сложной помеховой обстановке рассчитать коэффициенты корректора с более высокой точностью по сравнению с методами, основанными на статистиках второго порядка и применяемыми в настоящее время. Ниже предлагается метод адаптации, в котором для расчета коэффициентов корректора МСИ используются

статистики третьего порядка тестового сигнала [20]. По аналогии с широко применяемым градиентным методом [21], рассчитываемым по статистикам второго порядка, предлагаемый метод будем называть градиентным методом 3-го ранга. Корректор МСИ, коэффициенты которого обновляются в соответствии с предложенным методом, будем называть корректором 3-го ранга. Эффективность применения данного метода в системе SDSL подтверждается результатами моделирования.

Получим градиентный метод адаптации 3-го ранга. Рассмотрим вначале оптимальный линейный корректор МСИ 3-го ранга, ошибка на выходе которого определяется выражением

$$a_3[t] = x[t] - \sum_{i=0}^{p-1} W_3[i]y[t-i], \quad (27.11)$$

где $x[t]$ – отсчет тестового негауссова сигнала с ненулевой моментной функцией третьего порядка, $y[t]$ – отсчет сигнала, искаженного МСИ и шумом, $W_3[i]$ – коэффициенты линейного корректора 3-го ранга, p – число коэффициентов корректора. Выберем в качестве критерия оптимальности коэффициентов корректора ортогональность третьего порядка ошибки на выходе корректора. При этом значение моментной функции третьего порядка ошибки равно

$$m_a[j, j-l] = E\{a_3[t]a_3[t-j]a_3[t-l]\} = 0, \text{ при } j > 0, l \geq 0. \quad (27.12)$$

Для нахождения $W_3[i]$ домножим выражение (27.11) на произведение $y[t-j]y[t-l]$ и усредним

$$\begin{aligned} E\{a_3[t]y[t-j]y[t-l]\} = \\ = E\{x[t]y[t-j]y[t-l]\} - \sum_{i=0}^{p-1} W_3[i]E\{y[t-i]y[t-j]y[t-l]\}. \end{aligned} \quad (27.13)$$

При выполнении условия (27.12), т.е. в случае, когда ошибка $a_3[t]$ статистически не связана с ошибками $a_3[t-j]$ и $a_3[t-l]$, она также не имеет статистических связей с отсчетами сигнала $y[t-j]$ и $y[t-l]$.

Тогда выражение (27.13) преобразуется к уравнению вида

$$m_{xyy}[j, j-l] = \sum_{i=0}^{p-1} W_3[i] m_{yyy}[j-i, j-l].$$

Моментные функции, входящие в это уравнение, определяются выражениями (27.5) и (27.6). Выражение для расчета оптимальных коэффициентов линейного корректора 3-го ранга можно записать в матричном виде

$$[\vec{W}]_{opt} = [m_{yyy}]^{-1} [\vec{m}_{xyy}],$$

где $[\vec{W}]_{opt}$ – вектор–столбец оптимальных согласно критерию (27.12) коэффициентов линейного корректора 3-го ранга размерностью $p \times 1$; $[m_{yyy}]$ – матрица значений моментной функции третьего порядка сигнала $y[t]$ размерностью $p \times p$, элементы которой определяются из (27.5); $[\vec{m}_{xyy}]$ – вектор–столбец размерностью $p \times 1$ с элементами, определяемыми из выражения (27.6).

Получим градиентный метод 3-го ранга для обучения адаптивного линейного корректора. Рекуррентное выражение градиентного метода 3-го ранга представим в виде

$$W_{3i}[t+1] = W_{3i}[t] - \mu \nabla F[W_{3i}[t]], \quad (27.14)$$

где $i = 0, 1, \dots, N-1$; μ – параметр адаптации – положительная константа, определяемая из условий устойчивости и требуемого времени сходимости коэффициентов к оптимальным значениям. В градиентном методе векторы коэффициентов $[\vec{W}_3[t+1]]$ обновляются в направлении $-\nabla F[\vec{W}_3[t]]$, где $\nabla F[\vec{W}_3[t]]$ – вектор–столбец частных производных функционала F , являющегося градиентом

$$\nabla F[\vec{W}_3[t]] = \left[\frac{dF}{dW_{30}}, \frac{dF}{dW_{31}}, \dots, \frac{dF}{dW_{3N-1}} \right]^T.$$

В предлагаемом методе адаптации функционалом F является абсолютное значение $m_{ayy}[j, j-l] = E(a_3[t]y[t-j]y[t-l])$, т. к. при оптимальных коэффициентах фильтра $[\vec{W}]_{opt}$ этот функционал должен быть равным нулю вследствие (27.12). Для получения адаптивного метода перейдем от средних к мгновенным значениям $m'_{eyy}[j, j-l] = a_3[t]y[t-j]y[t-l]$.

Тогда градиент равен

$$\nabla[m'_{ayy}[j, j-l]] = \left[\frac{dm'_{ayy}[j, j-l]}{dW_{30}}, \frac{dm'_{ayy}[j, j-l]}{dW_{31}}, \dots, \frac{dm'_{ayy}[j, j-l]}{dW_{3p-1}} \right]^T.$$

При этом

$$\frac{dm'_{ayy}[j, j-l]}{dW_{3i}} = \frac{d(a_3[t]y[t-j]y[t-l])}{dW_{3i}} = y[t-j]y[t-l] \frac{da_3[t]}{dW_{3i}}.$$

Из выражения (27.11) получаем

$$\frac{da_3[t]}{dW_{3i}} = -y[t-i].$$

Следовательно

$$\frac{dm'_{ayy}[j, j-l]}{dW_{3i}} = -y[t-i]y[t-j]y[t-l]. \quad (27.15)$$

Поскольку в качестве функционала выбрано абсолютное значение $m'_{ayy}[j, j-l]$, то при подстановке (27.15) в (27.14) необходимо учитывать его знак:

$$W_{3i}[t+1] = W_{3i}[t] + \mu(y[t-i]y[t-j]y[t-l]), \quad m_{ayy}[j, j-l] > 0;$$

$$W_{3i}[t+1] = W_{3i}[t] - \mu(y[t-i]y[t-j]y[t-l]), \quad m_{ayy}[j, j-l] < 0. \quad (27.16)$$

Применение предложенного метода адаптации для обновления коэффициентов обратной цепи корректора с решающей обратной связью (либо для обновления коэффициентов прекодера Томлинсона) производится аналогично применению для этой цели стандартного градиентного метода. При этом знак перед вторым слагаемым в (27.16) изменяется на обратный.

Необходимым условием применения разработанного градиентного метода адаптации линейного корректора 3-го ранга (27.16) является ненулевая моментная функция третьего порядка сигнала. Следовательно, адаптация коэффициентов должна происходить с использованием тестовой последовательности с асимметричной плотностью вероятности. При этом аддитивный гауссов шум, не имеющий асимметрии, будет оказывать

на процесс адаптации значительно меньшее влияние, чем при использовании для обучения коэффициентов корректора МСИ стандартного градиентного метода, основанного на статистиках второго порядка.

27.4 Моделирование процесса адаптации корректора межсимвольных искажений

Было проведено моделирование процесса адаптации корректора МСИ, применяемого в системе SDSL, с использованием классического градиентного метода и предложенного градиентного метода 3-го ранга. Для этой цели была разработана модель, структурная схема которой представлена на рис. 27.8.

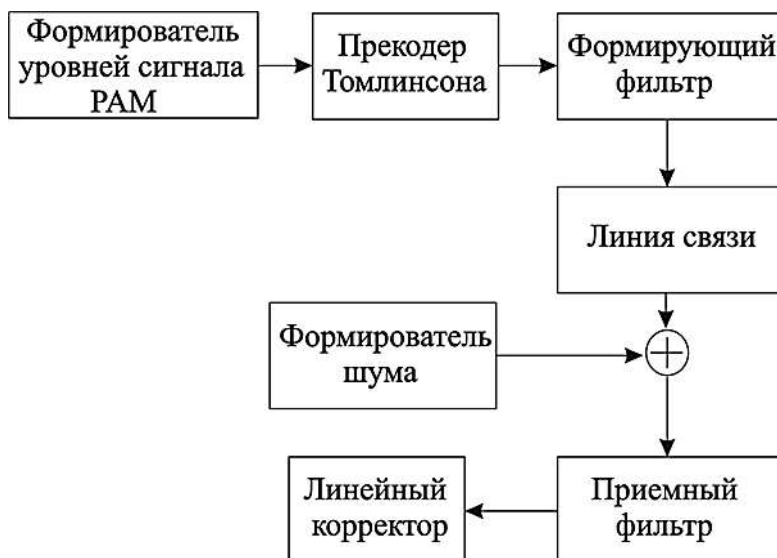


Рисунок 27.8 – Модель корректора МСИ, применяемого в системе SDSL

В режиме передачи данных формирователь сигнала генерирует равновероятную последовательность уровней РАМ–16. В режиме адаптации при использовании для обновления коэффициентов прекодера Томлинсона и линейного корректора стандартного градиентного метода формирователь сигнала генерирует равновероятную последовательность уровней РАМ–2. Закон распределения уровней в обучающей последовательности определяется структурой формирователя кода и зависит от используемого полиномиала [22]. В данной работе при моделировании классического метода адаптации был использован полиномиал

$$D_s = D_i \oplus D_s z^{-2} \oplus D_s z^{-3} \oplus D_s z^{-4} \oplus D_s z^{-8},$$

обеспечивающий формирование бинарной последовательности с вероятностью единицы 0.4981, асимметрией 0.0077, эксцессом 1.0001.

Для применения градиентного метода адаптации 3-го ранга обучающий сигнал должен быть асимметричным и иметь ненулевую моментную функцию

третьего порядка. При сохранении структуры формирователя кода было проведено моделирование с целью выявления полиномиала, обеспечивающего формирование асимметричной обучающей последовательности. В результате исследований был получен полиномиал

$$D_s = D_i \oplus D_s z^{-1} \oplus D_s z^{-2} \oplus D_s z^{-6} \oplus D_s z^{-7} \oplus \\ \oplus D_s z^{-8} \oplus D_s z^{-9} \oplus D_s z^{-10} \oplus D_s z^{-11} \oplus D_s z^{-15} \oplus . \\ \oplus D_s z^{-16} \oplus D_s z^{-17}$$

Данный полиномиал обеспечивает формирование бинарной последовательности с вероятностью единицы 0.1389, асимметрией 2.088, эксцессом 5.361. Полученная последовательность использовалась при моделировании процесса адаптации с использованием предлагаемого градиентного метода 3-го ранга. Для устранения появления постоянной составляющей (при различной вероятности появления уровней обучающего двухуровневого сигнала) в линии связи предлагается использовать подход, при котором более вероятный уровень меньше по модулю, чем менее вероятный.

Число коэффициентов прекодера, согласно стандарта [22], выбирается из диапазона $128 \div 180$. При моделировании оно было равным 150. Число коэффициентов линейного корректора МСИ соответствовало стандарту $8 \div 24$. При моделировании оно составляло 15.

Для исключения возникновения межсимвольной интерференции в формирующем и приемном фильтрах амплитудно-частотные характеристики этих фильтров описывались функцией «корень квадратный из приподнятого косинуса» с коэффициентом сглаживания 0.3.

Проверка адекватности разработанной модели проводилась с использованием данных, приведенных в стандарте [22], в котором описывается зависимость максимальной длины тестовых кабельных линий от скорости передачи данных при фиксированных условиях шума на входе приемника. Стандартом системы SDSL определены четыре основные модели шумов:

1. Модель А – представляет сценарий высокой степени взаимодействия систем передачи данных, когда система SDSL работает в распределительном многожильном кабеле (сотни жил) и по соседним жилам работает множество других (потенциально несовместимых) систем передачи данных;

2. Модель В – представляет сценарий средней степени взаимодействия систем передачи данных, когда система SDSL работает в распределительном многожильном кабеле и по соседним жилам работает множество других (потенциально несовместимых) систем передачи данных;

3. Модель С – практически аналогична модели В, но учитывает также помехи от систем типа ISDN–PRI (сигнал HDB3);

4. Модель D – представляет справочный сценарий работы по соседним жилам кабеля SDSL систем с одинаковыми скоростями передачи информации.

Конкретная помеховая обстановка на входе приемника SDSL модема зависит от длины кабельной линии, а также от того, расположен модем на стороне абонента или на стороне АТС. Профили шума для каждой из моделей (А, В, С, D) представляют собой зависимости СПМ шума от частоты. При моделировании для получения заданной СПМ шума на входе приемника белый гауссов шум пропусклся через цифровой фильтр – формирователь шума (рис. 27.8), рассчитанный по методу наименьших квадратов с целью минимизации отклонений между необходимой и аппроксимирующей ее АЧХ.

В качестве линии связи при моделировании использовалась тестовая линия #2 [22] с максимальной для данной скорости передачи информации и модели шума длиной. Дискретная модель линии связи представляла собой нерекурсивный цифровой фильтр с импульсной характеристикой, рассчитанной с применением модели ВТ#1, согласно [23, 24].

В [25] анализируется эффективность применения сверточных кодеров различной сложности для формирования сигналов с решетчатой модуляцией ТС–РАМ–16, применяемых в системе SDSL. Там также приведены значения ОСШ в канале связи, при которых достигается вероятность битовой ошибки BER (bit error rate) на выходе декодера Витерби, равная предельно допустимому согласно стандарту [22] значению 10^{-7} . Предельные ОСШ для различных длин кодового ограничения сверточного кодера K указаны в табл. 27.2 [25]. В системе SDSL длина кодового ограничения K изменяется вплоть до $K=21$, поэтому характеристики качества могут быть лучше, чем для $K=12$, но всегда хуже, чем для $K=\infty$.

Таблица 27.2 – Предельные ОСШ для различных длин кодового ограничения сверточного кодера

K	6	7	8	9	10	11	12	∞
ОСШ, дБ	23.58	23.32	23.07	22.83	22.6	22.44	22.26	21.46

При анализе эффективности применения различных методов адаптации корректоров МСИ более удобным, чем ОСШ, является максимально допустимая вероятность символьной ошибки SER (symbol error rate) на входе декодера Витерби (на выходе корректора МСИ). Было проведено имитационное моделирование, при котором решающее устройство располагалось на выходе канала связи с АБГШ и определялась вероятность символьной ошибки для случая применения сигналов РАМ–16 при указанных в табл. 27.2 ОСШ. Приведенные в таблице значения ОСШ относятся к случаю применения декодирования Витерби с жестким принятием решений (ПР). Применение

декодирования Витерби с мягким принятием решений, как указано в [26], дает дополнительный выигрыш в ОСШ, равный 2 дБ. Каждое значение вероятности ошибки рассчитывалось на основе проведения серии из 10-ти экспериментов с использованием 10^6 символов сигнала в каждом эксперименте. Максимально допустимые вероятности символьной ошибки на выходе корректора, полученные в результате моделирования, приведены в табл. 27.3.

Таблица 27.3 – Максимально допустимые вероятности символьной ошибки на выходе корректора

K	6	7	8	9	10	11	12	∞
SER, декодирование с жестким ПР	0.023	0.028	0.032	0.037	0.042	0.046	0.051	0.074
SER, декодирование с мягким ПР	0.070	0.079	0.087	0.096	0.105	0.111	0.118	0.153

27.5 Моделирование коррекции межсимвольных искажений системы SDSL

Исследовались зависимости вероятности символьной ошибки на выходе корректора системы SDSL от скорости передачи информации. На вход приемника, расположенного на стороне абонента, помимо тестового сигнала и сигнала данных, действовали шумы моделей А, С и D. Вероятность ошибки вычислялась путем усреднения результатов 5-ти экспериментов, в процессе которых проводилась адаптация корректора с использованием классического градиентного метода. После адаптации корректора через модель системы связи пропускались 10 последовательностей сигнала PAM-16 по 10000 отсчетов в каждой. Мощность передатчика в режиме адаптации и в режиме передачи данных согласно стандарту [22] составляла 13,5 дБм. Полученные результаты статистического эксперимента, представленные на рис. 27.9, соответствуют случаю работы системы SDSL по кабельным тестовым линиям #2 максимальной (для данной скорости передачи) длины.

Анализ полученных зависимостей показывает, что с уменьшением скорости передачи данных появляется возможность использовать для формирования сигнала TC-PAM-16 более сложный сверточный кодер. При этом допускаются более высокие вероятности символьной ошибки на выходе корректора МСИ при сохранении заданной вероятности битовой ошибки на выходе декодера Витерби 10^{-7} .

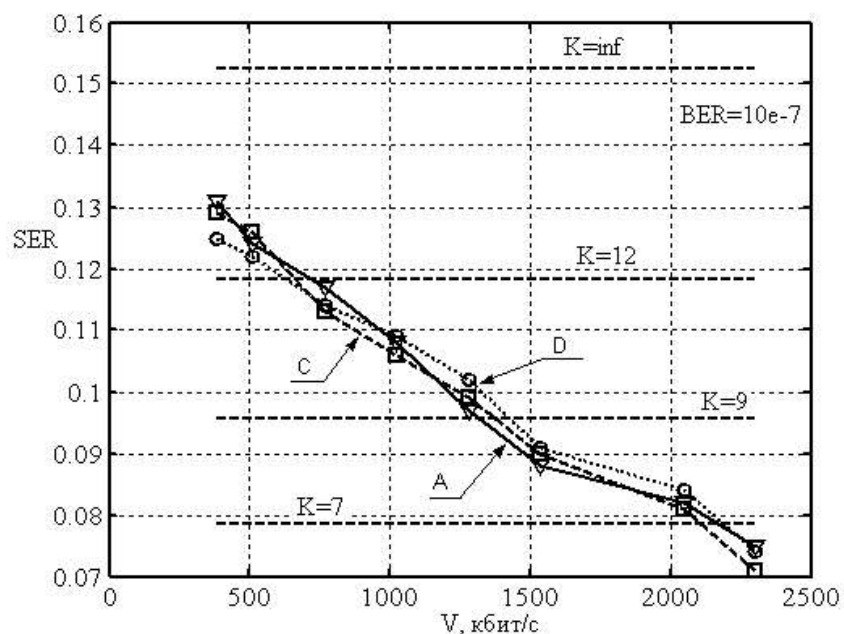


Рисунок 27.9 – Зависимости вероятности символьной ошибки на выходе корректора системы SDSL от скорости передачи информации

Эффективность предложенного градиентного метода адаптации 3-го ранга исследовалась при различных уровнях шума. При фиксированном уровне помех и длине кабельной линии, уменьшение ОСШ на входе приемника эквивалентно уменьшению необходимой мощности передатчика. Приведенные на рис. 27.10 зависимости вероятности символьной ошибки на выходе корректора в режиме передачи данных от мощности передатчика в режиме адаптации соответствуют случаю работы системы SDSL по кабельной тестовой линии #2 максимальной длины (1,82 км для скорости передачи информации 1536 кбит/с). Предполагалось, что приемник расположен на стороне абонента и на его вход воздействовал шум модели А. Вероятность ошибки вычислялась путем усреднения результатов 5-ти экспериментов. В процессе каждого эксперимента проводилась адаптация корректора с использованием градиентного метода 2-го ранга или градиентного метода 3-го ранга. После адаптации через систему канал-корректор пропускались 10 последовательностей сигнала РАМ-16 по 10000 отсчетов в каждой.

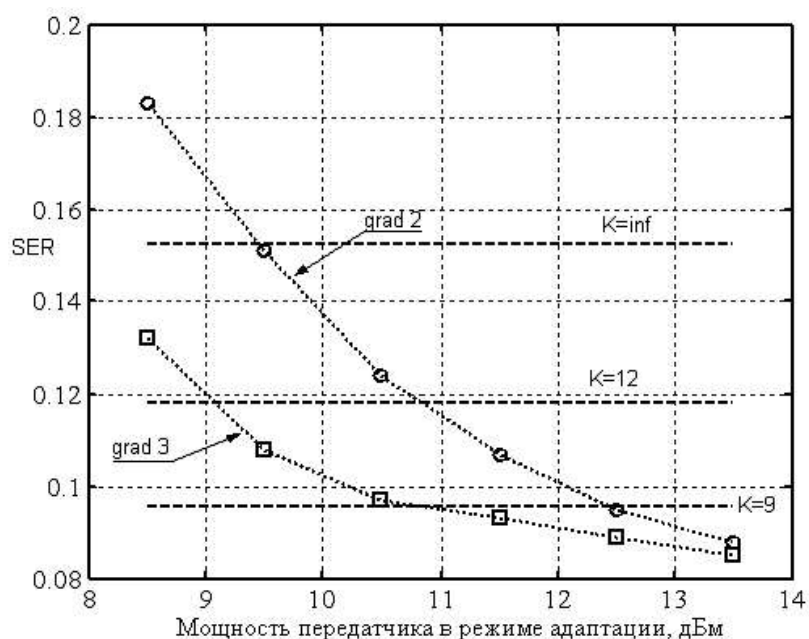


Рисунок 27.10 – Зависимости вероятности символьной ошибки на выходе корректора в режиме передачи данных от мощности передатчика

Как видно из графиков, представленных на рис. 27.10, применение предлагаемого градиентного метода 3-го ранга позволяет при незначительном усложнении сверточного кодера уменьшить мощность передатчика в режиме адаптации примерно на 2 дБ. Аналогично было проведено моделирование для других скоростей передачи информации, выбранных из диапазона 384÷2304 кбит/с для моделей шума (А, С, D). Результаты модельных экспериментов подтверждают возможность уменьшения мощности передатчика, при использовании предлагаемого метода адаптации, на 1,7÷2,8 дБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цопа А.И., Сидоров Г.И., Чечельницкий В.С., Тихонов В.А., Оценка возможности создания и использования математических моделей кабельных линий при проектировании цифровых систем передачи информации // Радиотехника. – 2002. – №127. – С. 145–151.
2. Цопа А.И., Сидоров Г.И., Тихонов В.А., Савченко И.В. Сравнение характеристик линейных и нелинейных структур корректоров межсимвольных искажений // Радиотехника. – 2003. – №131. – С. 183–190.
3. Тихонов В.А., Савченко И.В. Исследование некоторых аспектов применения цифровых фильтров // Тезисы докладов международной научной конференции «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». – Харьков: ХНУРЭ. – 2003. – С. 101–102.
4. Цопа А.И., Сидоров Г.И., Тихонов В.А., Савченко И.В. Уменьшение времени настройки адаптивных корректоров межсимвольных искажений // Радиотехника. – 2003. – №132. – С. 129–135.
5. Тихонов В.А., Савченко И.В., Божко А.Н. Статистическое моделирование каналов связи с нелинейной частотной характеристикой // Радиотехника. – 2003. – №135. – С. 107–112.
6. Бондарев В.Н., Трестер Г., Чернега В.С. Цифровая обработка сигналов: методы и средства: Учеб. Пособие для вузов. – Севастополь: Изд-во Сев. ГТУ, 1999. – 398 с.
7. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
8. Boets P., Zekri M., Van Biesen L., Bostoen T., Pollet T. On the Identification of Cables for Metallic Access Networks // IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference. – Budapest, Hungary. – May 21–23, 2001. – P. 1348–1353.
9. Цопа А.И., Тихонов В.А., Савченко И.В. Анализ предельных длин кабельных линий системы SDSL // Прикладная радиоэлектроника. – 2005. – Т.4, №4. – С. 400–404.
10. Цопа А.И., Сидоров Г.И., Тихонов В.А., Савченко И.В. Исследование линейной коррекции межсимвольных искажений // Радиотехника. – 2002. – №129. – С. 90–97.
11. Сидоров Г.И., Тихонов В.А., Савченко И.В., Нетребенко К.В. Выравнивание амплитудно-частотной характеристики канала связи в присутствии мощных гауссовых помех // Радиотехника. – 2005. – №140. – С. 127–133.
12. Тихонов В.А., Савченко И.В. Оценивание импульсной характеристики канала связи на основе статистик высших порядков // Радиоэлектроника и информатика. – 2005. – № 4. – С. 30–34.
13. Уидроу Б., Гловер Дж., Маккул Дж. и др. Адаптивные компенсаторы помех. Принципы построения и применения // ТИИЭР. – 1975. – Т.63, №12. – С. 69–98.

14. Тихонов В.А., Савченко И.В. Методы синтеза корректоров межсимвольной интерференции на базе статистик высших порядков // Международная конференция по телекоммуникационным технологиям и сетям (МКТТС 2005). Международный радиоэлектронный форум «Прикладная радиоэлектроника. Состояние и перспективы развития». – Харьков: АНПРЭ, ХНУРЕ. – 2005. – Т.4. С. 163–166.
15. Тихонов В.А., Савченко И.В., Нетребенко К.В. Метод идентификации канала связи на основе статистик третьего порядка // Прикладная радиоэлектроника. – 2005. – Т.4, №3. – С. 286–290.
16. Пропис Д. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
17. Бендат Д., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
18. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
19. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.
20. Тихонов В.А., Савченко И.В. Нетребенко К.В. Совершенствование метода адаптации корректора межсимвольной интерференции в системе передачи данных SDSL // Радиоэлектроника. – 2006. – Т.49, №12. – С. 45–54. (Изв. вузов).
21. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна, П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
22. ETSI TS 101 524 V1.2.1 (2003–03). Transmission and Multiplexing (TM); Access transmission system on metallic access cables; Symmetric single pair high bitrate Digital Subscriber Line (SDSL).
23. Luc H., Sparnex N.V. Cable models predict physically impossible behaviour in time domain. – ETSI TM6 – Plenary # 16, 994t53a0.
24. Rob van den Brinck. Cable reference models for simulating metallic access networks. – TM 6(97)02, 970p02r3.
25. T1E1.4/97–300. Tu M., Liu J. “A 512-State PAM TCM Code for HDSL2”.
26. Склад Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

28 ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ , ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

28.1 Введение

При анализе и обработке дискретных случайных сигналов и полей используются их статистические модели. Наиболее широкое применение получили статистические модели гауссовых процессов. Значительным этапом развития этих моделей стали корреляционная и спектральная теория случайных сигналов. Спектрально–корреляционная теория полностью описывает гауссовы сигналы, а негауссовы процессы рассматривает в рамках корреляционной теории и спектров второго порядка.

В статистической радиотехнике сигнал часто рассматривается как вектор, определенный в некотором абстрактном пространстве. Вектор определяется совокупностью чисел, являющимися его координатами. В корреляционной теории вектор рассматривается, как многокомпонентный элемент в некотором пространстве. Для преобразования векторов определяются математические операции сложения и умножения векторов и матриц, умножения их на скаляр. Ряд важных статистических характеристик получают с использованием скалярного произведения векторов. При использовании многомерных процессов и статистических характеристик, вектора заменяются матрицами. В математике важную роль играют различные способы перемножения матриц.

В последние годы проявляется интерес к построению моделей негауссовых сигналов. Вероятностные модели негауссовых шумов строятся на основе одномерных и многомерных плотностей вероятности. При решении ряда задач статистической радиотехники учет негауссовых статистических характеристик позволяет синтезировать более эффективные системы их обработки. Использование многомерных плотностей вероятностей вызывает затруднения для статистически связанных негауссовых случайных сигналов. Поэтому статистические модели эффективнее строить на основе наборов многомерных моментных и кумулянтных функций. В связи со сложностью обработки и анализа многомерных функций возникает задача построения теории моделей, позволяющей более компактно и эффективно отображать информацию, содержащуюся в моментных и кумулянтных функциях. Примером такой статистических моделей служит обобщенная модель линейного предсказания негауссовых процессов.

При построении моделей негауссовых процессов, требующих статистического усреднения, рационально использовать моментные функции. Они получаются в результате усреднения произведений трех, четырех и большего числа векторов–сигналов. Однако в пространстве, элементами которого являются негауссовы вектор–сигналы, не определены операции произведения трех, четырех и более векторов. Это приводит к ограничению использования теории векторных

пространств в моделях негауссовых процессов, поскольку требуют определения новых операций над векторами и матрицами.

В известной научной литературе, как правило, не рассматриваются вопросы построения векторных пространств, а также операции над векторами и матрицами с целью получения статистик высших порядков. В данной работе предложены операции над векторами и матрицами, позволяющие определить моменты и моментные матрицы. В работе естественным образом обобщены известные операции над векторами и матрицами. На примере обобщенной модели линейного предсказания негауссовых процессов продемонстрировано применения предложенных операций над векторами и матрицами. Представляет также интерес и предложенный в работе ряд обобщений известных произведений векторов и матриц.

28.2 Прямое произведение векторов и матриц

Вначале определим прямое произведение n векторов и матриц. Рассмотрим операции прямого произведения элементов векторного пространства $\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots, \vec{A}^n$. Векторы определяются своими компонентами (элементами) $\vec{A}^k = [a_1^k, a_2^k, \dots, a_N^k]$. Поэлементное (прямое) произведение двух векторов определяется как

$$\vec{A}^1 \circ \vec{A}^2 \equiv [a_i^1 a_i^2] = [a_1^1 a_1^2, a_2^1 a_2^2, \dots, a_N^1 a_N^2].$$

Естественно распространить это определение на произведение трех и произвольного количества векторов:

$$\begin{aligned} \vec{A}^1 \circ \vec{A}^2 \circ \vec{A}^3 &\equiv [a_i^1 a_i^2 a_i^3] = [a_1^1 a_1^2 a_1^3, a_2^1 a_2^2 a_2^3, \dots, a_N^1 a_N^2 a_N^3] \\ &\dots, \\ \vec{A}^1 \circ \vec{A}^2 \circ \dots \circ \vec{A}^s &\equiv [a_i^1 a_i^2 \dots a_i^s] = [a_1^1 a_1^2 \dots a_1^s, a_2^1 a_2^2 \dots a_2^s, \dots, a_N^1 a_N^2 \dots a_N^s] \end{aligned}$$

Рассмотрим операции прямого произведения над двухмерными матрицами $A^1 \equiv [a_{ij}^1]$, $A^2 \equiv [a_{ij}^2]$, ..., $A^s \equiv [a_{ij}^s]$. Адамарово прямое произведение двух матриц [1, 2] определяется через их поэлементное умножение

$$A^1 \circ A^2 = [a_{ij}^1 a_{ij}^2] = [{}^2 a_{ij}].$$

Здесь и далее индекс слева сверху указывает на количество сомножителей в данном произведении. Свойством адамарова произведения является коммутативность матриц.

Обобщим это определение на поэлементные произведения трех и произвольного числа матриц

$$A^1 \circ A^2 \circ A^3 = [a_{ij}^1 a_{ij}^2 a_{ij}^3] = [{}^3 a_{ij}],$$

$$\dots$$

$$A^1 \circ A^2 \circ \dots \circ A^s = [a_{ij}^1 a_{ij}^2 \dots a_{ij}^s] = [{}^n a_{ij}].$$

Как известно, прямое произведение матриц используется для решения некоторых задач математики и имеет приложение к физике элементарных частиц [3]. В радиотехнике может быть полезным использование понятия обобщенного прямого произведения обобщенных непрерывных и дискретных векторов. Как будет показано ниже, эта операция включает как частный случай прямое произведение матриц. Будем называть прямым произведением непрерывных векторов вектор, определяемый выражением

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) \circ \vec{x}_2(t) = x_1(t)x_2(t),$$

где $x_1(t)x_2(t)$ следует понимать как произведение функций, описывающих сигналы. Подобным образом можно определить прямое произведение s векторов

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) \circ \vec{x}_2(t) \circ \dots \circ \vec{x}_s(t) = x_1(t)x_2(t)\dots x_s(t),$$

где $x_1(t)x_2(t)\dots x_s(t)$ следует понимать, как произведение s функций сигналов. Аналогичным образом определяется прямое произведение векторов, зависящих от нескольких параметров. Введение прямого произведения позволяет описывать векторы сигналов, состоящих из произведения двух и более сигналов, а также некоторые другие операции над сигналами.

Приведем основные свойства прямого произведения:

- а) $(a\vec{x}) \circ \vec{y} = \vec{x} \circ (a\vec{y}) = a(\vec{x} \circ \vec{y})$;
- б) $(\vec{x} \circ \vec{y}) \circ \vec{z} = \vec{x} \circ (\vec{y} \circ \vec{z})$;
- в) $\vec{x} \circ \vec{y} \circ \vec{z} = \vec{x} \circ \vec{z} \circ \vec{y} = \vec{y} \circ \vec{x} \circ \vec{z} = \vec{y} \circ \vec{z} \circ \vec{x} = \vec{z} \circ \vec{x} \circ \vec{y} = \vec{z} \circ \vec{y} \circ \vec{x}$;
- г) $\vec{x} \circ (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \circ \vec{y} + \vec{x} \circ \vec{z}$;
- д) $(\vec{x} \circ \vec{y})^T = \vec{x}^T \circ \vec{y}^T$.

Рассмотрим некоторые примеры использования прямого произведения векторов в радиотехнике. Пусть $\vec{x}(t)$ – нестационарный процесс на входе

системы с постоянными параметрами, а $\vec{y}(t)$ – выход системы. Тогда спектр на выходе системы и взаимный спектр выражаются через прямое произведение

$$\vec{S}_{yy}(\omega_1, \omega_2) = \vec{H}^*(\omega_1) \circ \vec{H}(\omega_2) \circ \vec{S}_{xx}(\omega_1, \omega_2),$$

где $\vec{H}(\omega)$ – частотная характеристика системы. $\vec{H}(\omega)$ и $\vec{S}_{zz}(\omega_1, \omega_2)$ имеют все признаки векторов в пространстве непрерывных функций аргументов ω_i [4]. В случае, когда входной процесс стационарный, эти соотношения принимают вид

$$\vec{S}_{yy}(\omega) = \vec{H}^*(\omega) \circ \vec{H}(\omega) \circ \vec{S}_{xx}(\omega) = \left| \vec{H}(\omega) \right|^2 \vec{S}_{xx}(\omega).$$

Здесь учтено, что квадрат модуля комплексного вектора равен прямому произведению комплексно–сопряженного и комплексного векторов

$$\left| \vec{H}(\omega) \right|^2 = \vec{H}^*(\omega) \circ \vec{H}(\omega).$$

Спектр третьего порядка стационарного сигнала на выходе линейной системы описывается выражением

$$\vec{S}_y(0, \omega_2, \omega_3) = \vec{H}_3(\omega_2, \omega_3) \circ \vec{S}_x(0, \omega_2, \omega_3),$$

где частотная характеристика 3–го порядка линейной системы равна прямому произведению векторов

$$\vec{H}_3(\omega_2, \omega_3) = \vec{H}_1(-\omega_2 - \omega_3) \circ \vec{H}_1(\omega_2) \circ \vec{H}_1(\omega_3).$$

Прямое произведение векторов используется в выражении, описывающем преобразование спектра порядка линейной системой

$$\vec{S}_y(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = \vec{H}_s(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) \circ \vec{S}_x(0, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s),$$

где частотная характеристика s–го порядка линейной системы равна прямому произведению многомерных векторов

$$\vec{H}_s(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_s) = \vec{H}_1(-\omega_2 - \omega_3 - \dots - \omega_s) \circ \vec{H}_1(\omega_2) \circ \dots \circ \vec{H}_1(\omega_s).$$

Можно привести примеры использования прямого произведения векторов во временной области.

Так выражение для моментной функции пятого порядка нестационарного процесса через соответствующие кумулянтные функции содержит произведения вида

$$\vec{\chi}_1(t_1) \circ \vec{\chi}_4(t_2, t_3, t_4, t_5), \vec{\chi}_2(t_1, t_2) \circ \vec{\chi}_3(t_3, t_4, t_5), \vec{\chi}_1(t_1) \circ \vec{\chi}_1(t_2) \circ \vec{\chi}_3(t_3, t_4, t_5).$$

Моментная функция шестого порядка стационарного процесса содержит прямое произведение векторов вида

$$\vec{\chi}_2(\tau_2) \circ \vec{\chi}_4(\tau_{43}, \tau_{53}, \tau_{63}), \vec{\chi}_3(\tau_2, \tau_3) \circ \vec{\chi}_3(\tau_{54}, \tau_{64}),$$

где $\tau_{ik} = t_i - t_k$.

Прямое произведение можно применять для описания преобразований дискретных сигналов. Рассмотрим некоторые особенности прямого произведения дискретных сигналов. Пусть дискретный вектор представлен N элементами вектора столбца $\vec{x}^T[t] = [x[1], x[2], \dots, x[N]]$. Прямым произведением двух векторов называется вектор–столбец компонентами которого являются произведения соответствующих компонент векторов сомножителей

$$\vec{x}[t] = \vec{x}_1[t] \circ \vec{x}_2[t] = \begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_1[2] \\ \dots \\ x_1[N] \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_2[1] \\ x_2[2] \\ \dots \\ x_2[N] \end{bmatrix}.$$

После перемножения столбцов получим

$$\vec{x}[t] = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \dots \\ x[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1[1]x_2[1] \\ x_1[2]x_2[2] \\ \dots \\ x_1[N]x_2[N] \end{bmatrix}.$$

В случае прямого произведения s дискретных векторов имеем вектор

$$\vec{x}[t] = \vec{x}_1[t] \circ \vec{x}_2[t] \circ \dots \circ \vec{x}_s[t] = \begin{bmatrix} x_1[1]x_2[1]\dots x_s[1] \\ x_1[2]x_2[2]\dots x_s[2] \\ \dots \\ x_1[N]x_2[N]\dots x_s[N] \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом прямое умножение дискретных векторов распространяется на векторы, содержащие две и большее число переменных, являющихся матрицами. Так произведение вектора размерности $N \times 1$ на матрицу размерности $N \times M$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{b}[c_1, c_2] = \vec{x}[c_1] \circ a[c_1, c_2] &= \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \dots \\ x[N] \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} a[1,1] & a[1,2] & \dots & a[1,M] \\ a[2,1] & a[2,2] & \dots & a[2,M] \\ & & \dots & \\ a[N,1] & a[N,2] & \dots & a[N,M] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x[1]a[1,1] & x[1]a[1,2] & \dots & x[1]a[1,M] \\ x[2]a[2,1] & x[2]a[2,2] & \dots & x[2]a[2,M] \\ & & \dots & \\ x[N]a[N,1] & x[N]a[N,2] & \dots & x[N]a[N,M] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Из этого примера видно, что прямое перемножение коммутативно

$$b[c_1, c_2] = \vec{x}[c_1] \circ a[c_1, c_2] = a[c_1, c_2] \circ \vec{x}[c_1].$$

Количество строк у перемножаемых векторов должно быть одинаково.

Если в (28.1) все индексы разные, то полученное прямое произведение обобщенных векторов представляется матрицей

$$b[c_1, c_2, c_3] = \vec{x}[c_1] \circ a[c_2, c_3] = \begin{bmatrix} b[c_1, 1, 1] & b[c_1, 1, 2] & \dots & b[c_1, 1, N] \\ b[c_1, 2, 1] & b[c_1, 2, 2] & \dots & b[c_1, 2, N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b[c_1, N, 1] & b[c_1, N, 2] & \dots & b[c_1, N, N] \end{bmatrix}. \quad (28.2)$$

Элементами матрицы (28.2) являются векторы–столбцы, полученные в результате перемножения компонент вектора $\vec{x}[c_1]$ на элементы матрицы $a[c_2, c_3]$

$$b[c_1, 1, 1] = \vec{x}[c_1] \circ a[1, 1], \quad b[c_1, 1, 2] = \vec{x}[c_1] \circ a[1, 2], \quad \dots, \quad b[c_1, N, N] = \vec{x}[c_1] \circ a[N, N].$$

Рассмотрим три варианта прямого произведения двух матриц.

Если у векторов совпадают попарно два индекса, то их прямое произведение равно

$$b[c_1, c_2] = a_1[c_1, c_2] \circ a_2[c_1, c_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1[1,1]a_2[1,1] & a_1[1,2]a_2[1,2] & \dots & a_1[1,N]a_2[1,N] \\ a_1[2,1]a_2[2,1] & a_1[2,2]a_2[2,2] & \dots & a_1[2,N]a_2[2,N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1[N,1]a_2[N,1] & a_1[N,2]a_2[N,2] & \dots & a_1[N,N]a_2[N,N] \end{bmatrix}.$$

В том случае, когда у матриц совпадает два индекса, соответствующих строкам или столбцам, элементами блочной матрицы прямого произведения таких векторов будут либо строки, либо столбцы. Рассмотрим случай, когда совпадают индексы строк. Тогда

$$b[c_1, c_2, c_3] = a_1[c_1, c_2] \circ a_2[c_1, c_3] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1[1,1]a_2[1,c_3] & a_1[1,2]a_2[1,c_3] & \dots & a_1[1,N]a_2[1,c_3] \\ a_1[2,1]a_2[2,c_3] & a_1[2,2]a_2[2,c_3] & \dots & a_1[2,N]a_2[2,c_3] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1[N,1]a_2[N,c_3] & a_1[N,2]a_2[N,c_3] & \dots & a_1[N,N]a_2[N,c_3] \end{bmatrix}.$$

Элементы результирующей матрицы представляют собой векторы–строки. Найдем прямое произведение двухкомпонентных векторов у которых совпадают индексы столбцов

$$b[c_1, c_2, c_3] = a_1[c_1, c_2] \circ a_2[c_3, c_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1[1,1]a_2[c_3,1] & a_1[1,2]a_2[c_3,2] & \dots & a_1[1,N]a_2[c_3,N] \\ a_1[2,1]a_2[c_3,1] & a_1[2,2]a_2[c_3,2] & \dots & a_1[2,N]a_2[c_3,N] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1[N,1]a_2[c_3,1] & a_1[N,2]a_2[c_3,2] & \dots & a_1[N,N]a_2[c_3,N] \end{bmatrix}.$$

Элементами такой матрицы, полученной прямым произведением, являются векторы–столбцы.

Подобные структуры результирующих матриц можно получить и для прямых произведений типа

$$b[c_1, c_2, c_3] = a_1[c_1, c_2]a_2[c_2, c_3],$$

$$b[c_1, c_2, c_3] = a_1[c_1, c_2]a_2[c_3, c_1].$$

Прямое произведение двухкомпонентных векторов с разными индексами дает блочную матрицу

$$b[c_1, c_2, c_3, c_4] = a_1[c_1, c_2] \circ a_2[c_3, c_4] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_1[1,1] \circ a_2[c_3, c_4] & a_1[1,2] \circ a_2[c_3, c_4] & \cdots & a_1[1,N] \circ a_2[c_3, c_4] \\ a_1[2,1] \circ a_2[c_3, c_4] & a_1[2,2] \circ a_2[c_3, c_4] & \cdots & a_1[2,N] \circ a_2[c_3, c_4] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1[N,1] \circ a_2[c_3, c_4] & a_1[N,2] \circ a_2[c_3, c_4] & \cdots & a_1[N,N] \circ a_2[c_3, c_4] \end{bmatrix}.$$

Таким образом, предложенное обобщенное прямое произведение позволило расширить эту операцию на произвольное число векторов и матриц.

28.3 Скалярные произведения векторов и матриц

Обобщим операцию скалярного (внутреннего) произведения двух векторов на скалярное произведение n векторов. Результатом скалярного произведения двух векторов является скаляр

$$(\vec{A}^1, \vec{A}^2) = \sum_{i=1}^N a_i^1 a_i^2 = {}^2a.$$

Очевидно, что скалярное произведение двух векторов можно рассматривать как сумму компонент прямого произведения векторов. Определим скалярное произведение трех и произвольного числа s –векторов следующим образом:

$$(\vec{A}^1, \vec{A}^2, \vec{A}^3) = \sum_{i=1}^N a_i^1 a_i^2 a_i^3 = {}^3a,$$

$$\dots$$

$$(\vec{A}^1, \vec{A}^2, \dots, \vec{A}^s) = \sum_{i=1}^N a_i^1 a_i^2 \cdot \dots \cdot a_i^s = {}^s a.$$

Несмотря на широкое применение скалярного произведения двух векторов, скалярное произведение двух матриц не часто встречается в научной литературе. Скалярные произведения двух матриц [1, 2] определяются как сумма элементов прямого произведения соответствующих матриц

$$(A^1, A^2) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^1 a_{ij}^2 = {}^2a.$$

Рационально распространить на обозначение скалярного произведения нескольких матриц известное обозначение скалярного произведения двух векторов в виде круглой скобки и запятой. Естественным образом можно ввести скалярное произведение для трех и s матриц

$$\begin{aligned} (A^1, A^2, A^3) &= \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^1 a_{ij}^2 a_{ij}^3 = {}^3a, \\ &\dots \\ (A^1, A^2, \dots, A^s) &= \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^1 a_{ij}^2 \dots a_{ij}^s = {}^s a. \end{aligned}$$

Приведенные соотношения показывают коммутативность скалярного произведения векторов и скалярного произведения s матриц.

Необходимость введения скалярного произведения в теории сигналов связана с тем, что через него определяются такие важные характеристики сигналов, как энергия, корреляционные и моментные функции. Используемые для этого произведения двух и более сигналов обладают свойствами скалярного произведения. Так, энергия сигнала и взаимная корреляция двух сигналов определяются средними скалярных величин [5]:

$$D = E(\vec{x}(t), \vec{x}(t)),$$

$$R_{x_1 x_2} = E(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)).$$

Введение понятия скалярного произведения s векторов позволяет определить скалярные моменты произвольного порядка для сигналов. Тогда взаимный момент s -го порядка выражается через скалярное произведение вида

$$m_{x_1, x_2, \dots, x_s} = E(\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \vec{x}_3(t), \dots, \vec{x}_s(t)).$$

Центральный момент s -го порядка сигнала равен

$$m_s = E(\vec{x}(t), \vec{x}(t), \dots, \vec{x}(t)).$$

Таким образом, использование понятия скалярного произведения с векторов позволяет более полно применять аппарат функционального анализа к определению и анализу широкого класса характеристик детерминированных и случайных сигналов.

Для дискретного аргумента в результате скалярного произведения двух векторов–столбцов получаем скаляр

$$a^2 = (\vec{x}_1[t], \vec{x}_2[t]) = \vec{x}_1^T[t] \vec{x}_2[t] =$$

$$= [x_1[1], x_1[2], \dots, x_1[N]] \begin{bmatrix} x_2[1] \\ x_2[2] \\ \vdots \\ x_2[N] \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^N \vec{x}_1[t] \vec{x}_2[t],$$

где $\vec{x}_1^T[t] \vec{x}_2[t]$ – скалярное произведение векторов–матриц размерности $(1 \times N)$ и $(N \times 1)$. Скалярное произведение трех векторов–столбцов можно представить в виде комбинации одного скалярного и одного прямого произведений

$$^3a = (\vec{x}_1[t], \vec{x}_2[t], \vec{x}_3[t]) = \vec{x}_1^T[t] (\vec{x}_2[t] \circ \vec{x}_3[t]) =$$

$$= [x_1[1], x_1[2], \dots, x_1[N]] \left(\begin{bmatrix} x_2[1] \\ x_2[2] \\ \vdots \\ x_2[N] \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_3[1] \\ x_3[2] \\ \vdots \\ x_3[N] \end{bmatrix} \right) =$$

$$= [x_1[1], x_1[2], \dots, x_1[N]] \begin{bmatrix} x_2[1] & x_3[1] \\ x_2[2] & x_3[2] \\ \dots & \dots \\ x_2[N] & x_3[N] \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^N x_1[t] x_2[t] x_3[t].$$

Аналогичным образом можно получить выражение для скалярного произведения s векторов

$${}^s a = (\vec{x}_1[t], \vec{x}_2[t], \dots, \vec{x}_s[t]) =$$

$$= [x_1[1], x_1[2], \dots, x_1[N]] \begin{bmatrix} x_2[1] & x_3[1] & \dots & x_s[1] \\ x_2[2] & x_3[2] & \dots & x_s[2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2[N] & x_3[N] & \dots & x_s[N] \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^N x_1[t] x_2[t] \dots x_s[t].$$

Приведенные примеры скалярного произведения и его обобщение на s векторов позволяет сделать предположение, что оно определяется через суммирование по совпадающим аргументам прямого произведения векторов или матриц.

28.4 Матричные произведения и внешнее произведение векторов

Можно показать связь матричного произведения с прямым и скалярным произведениями, а также ввести операцию матричного произведения s матриц. Матричное произведение двух матриц выражается следующим известным соотношением:

$$A^1 A^2 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 = [{}^2 a_{ij}^1].$$

Каждый элемент этой матрицы есть результат скалярного произведения соответствующих строк и столбцов.

Расширим матричное произведение на три и на произвольное количество сомножителей матриц. Тогда матричным произведением трех матриц назовем операцию

$$A_1 = A^1 A^2 A^3 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 a_{kl}^3 = [{}^3 a_{ijl}^1].$$

Из этого выражения видно, что для получения произведения трех матриц необходимо элементы строк первой матрицы умножить

на соответствующие элементы столбцов второй матрицы, а затем на соответствующие элементы столбцов третьей матрицы и просуммировать. Такие операции необходимо проделать для всех индексов i, j, l .

Очевидно, что, возможно, произведение трех матриц вида

$$A_2 = A^1 A^2 A^3 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 a_{lk}^3 = [{}^3 a_{ijl}^2].$$

В этом случае для получения произведения трех матриц необходимо элементы строк первой матрицы умножить на соответствующие элементы столбцов второй матрицы, а также на соответствующие элементы строк третьей матрицы и просуммировать. Матричные произведения трех матриц нельзя получить обычным попарным произведением трех матриц, когда сначала перемножаются две матрицы, а затем полученная матрица умножается на третью матрицу

$$A = A^1 (A^2 A^3) = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 \sum_{j=1}^N a_{kj}^2 a_{jl}^3 = [a_{il}].$$

Матричным произведением произвольного числа s матриц назовем операцию

$$A = A^1 A^2 \cdot \dots \cdot A^s = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 \cdot \dots \cdot a_{kv}^s = [{}^s a_{ij\dots v}].$$

Матричные произведения трех или s матриц приведет к росту размерности матриц до трех и выше. Очевидно, что введенные матричные произведения допускают произведения различных матриц. Например, для частного случая возможно произведение

$$A = A^1 A^2 A^3 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 a_{kj}^3 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 (a_{kj}^2 a_{kj}^3) = [a_{ij}],$$

...

$$A = A^1 A^2 \cdot \dots \cdot A^s = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 (a_{kj}^2 \cdot \dots \cdot a_{kj}^s) = [a_{ij}].$$

где в круглых скобках прямое произведение матриц. В этом случае размерность матрицы A не увеличивается.

Рассмотрим определение произведения нескольких матриц на вектор. Произведения матриц на вектор определяются выражениями

$$A^1 \vec{A}^2 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_k^2 = [a_i],$$

$$A = A^1 A^2 \vec{A}^3 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 a_k^3 = [a_{ij}],$$

$$A = A^1 A^2 \dots A^{s-1} \vec{A}^s = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 \dots a_{kl}^{s-1} a_k^s = [a_{ij\dots l}].$$

Количество матриц и векторов в этих соотношениях может быть произвольным, например

$$\vec{A} = A^1 \vec{A}^2 \vec{A}^3 = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_k^2 a_k^3 = [a_i],$$

$$A = A^1 A^2 \dots A^{s-2} \vec{A}^{s-1} \vec{A}^s = \sum_{k=1}^N a_{ik}^1 a_{kj}^2 \dots a_{kv}^{s-2} a_k^{s-1} a_k^s = [a_{ij\dots v}].$$

Результатом внешнего произведения векторов является матрица [6]

$$A = \vec{A}^1 \times \vec{A}^2 = [a_i^1 a_j^2] = [a_{ij}].$$

Для трех векторов и произвольного числа векторов внешнее произведение определяется как

$$A = \vec{A}^1 \times \vec{A}^2 \times \vec{A}^3 = [a_i^1 a_j^2 a_l^3] = [a_{ijl}],$$

$$A = \vec{A}^1 \times \vec{A}^2 \times \dots \times \vec{A}^s = [a_i^1 a_j^2 \dots a_v^s] = [a_{ij\dots v}].$$

Размерность результирующей матрицы равна количеству векторов–сомножителей.

28.5 Векторная обобщенная модель авторегрессии третьего ранга

В разделе продемонстрировано применение элементов развитой выше теории векторов и матриц для вывода уравнений обобщенных моделей линейного предсказания. Обобщение моделей линейного предсказания получено как следствие векторного представления негауссовых случайных процессов. Хотя случайные процессы являются векторами, при изложении теории моделей линейного предсказания векторными представлениями пользуются только при написании уравнения Юла–Уокера и его решения, а также для получения корреляционной матрицы посредством внешнего произведения векторов [7]. Описанный ниже подход к построению моделей, не только более последовательно применяет векторное представление случайных процессов, но и позволяет более глубоко понять сущность введенных произведений векторов и матриц. Получим в качестве примера уравнения для нахождения коэффициентов ОАР третьего ранга в матричном виде. Для этого представим уравнение ОАР (1.1) через векторы и матрицу

$$\vec{x}[t] = x[t-i]\vec{\Phi}_3^l[i] + \vec{a}_3^l[t], \quad (28.3)$$

где $x[t-i]$ – матрица размерности $(N-1) \times p$, $\vec{\Phi}_3^l[i]$ – вектор коэффициентов ОАР для свободного индекса l , p_l – порядок модели ОАР для индекса l , $\vec{a}_3^l[t]$ – вектор негауссовых ошибок предсказания модели для индекса l . Применив матричное умножение левой и правой частей (28.3) на матрицы $x[t-j]$ и $x[t-l]$, а затем усреднив, получим

$$E(x[t-j]x[t-l]\vec{x}[t]) = E(x[t-j]x[t-l]x[t-i]\vec{\Phi}_3^l[i]) + E(x[t-j]x[t-l]\vec{a}_3^l[t]). \quad (28.4)$$

Среднее матричных произведений векторов и матриц случайного негауссова процесса дают моментные функции третьего порядка

$$E(x[t-j]x[t-l]\vec{x}[t]) = m_3[j, j-l], \quad (28.5)$$

$$E(x[t-i]x[t-j]x[t-l]) = m_3[j-i, j-l].$$

Уравнения для расчета параметров модели получают при условии ортогональности ошибок предсказания для разных сдвигов времени

$$E(x[t-j]x[t-l]\vec{a}_3^l[t]) = E(a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\vec{a}_3^l[t]) = 0. \quad 0 < j, l \geq 0. \quad (28.6)$$

Учитывая соотношения (28.5) и (28.6), из (28.4) получаем матричное уравнение

$$m_3[j, j-l] = m_3[j-i, j-l] \vec{\Phi}_3^l[i]. \quad (28.7)$$

Матрицы и векторы, входящие в (28.7), равны

$$m_3[j, j-l] = \begin{bmatrix} m_3[1, 1-l] \\ m_3[2, 2-l] \\ \dots \\ m_3[p_l, p_l-l] \end{bmatrix}, \quad \vec{\Phi}_3^l[i] = \begin{bmatrix} \Phi_3^l[1] \\ \Phi_3^l[2] \\ \dots \\ \Phi_3^l[l] \end{bmatrix},$$

$$m_3[j-i, j-l] =$$

$$= \begin{bmatrix} m_3[0, 1-l] & m_3[-1, 1-l] & \dots & m_3[1-p_l, 1-l] \\ m_3[1, 2-l] & m_3[0, 2-l] & \dots & m_3[2-p_l, 2-l] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_3[p_l-1, p_l-l] & m_3[p_l-2, p_l-l] & \dots & m_3[0, p_l-l] \end{bmatrix}.$$

Умножив скалярно (28.3) на прямое произведение векторов $\vec{x}[t]\vec{x}[t]$, получим

$$m_3 = \sum_{i=1}^{p_l} \Phi_3^l[i] m_3[i, i] + m_{3a}^l, \quad (28.8)$$

где m_3 – момент третьего порядка случайного процесса, $m_3[i, i]$ – двухмоментная моментная функция третьего порядка, m_{3a}^l – моменты третьего порядка ошибок предсказания. Уравнение (28.8) устанавливает связь между моментом третьего порядка ошибок предсказания ОАР модели с моментом ошибок предсказания m_{3a}^l и моментом m_3 случайного процесса $\vec{x}[t]$.

Решение матричного уравнения (28.7) имеет вид

$$\vec{\Phi}_3^l[i] = (m_3[j-i, j-l])^{-1} m_3[j, j-l], \quad (28.9)$$

где $(m_3[j-i, j-l])^{-1}$ – двухмерная обратная матрица при фиксированном l . Возможность представления решения уравнения (28.3) в виде (28.9)

значительно упрощает задачу вычисления коэффициентов ОАР модели. Такой подход также приводит к известным алгоритмам решения подобных задач, требующих обращения матрицы. Уравнения (28.7) и (28.8) аналогичны уравнениям Юла–Уокера (1.6, а) и (1.6, б), а решение (28.9) аналогично (1.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Халмош. Конечномерные векторные пространства: Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1963 – 264 с.
2. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. – 2-е изд. – М., 2008.
3. Ланкастер П. Теория матриц. Пер. с англ. – М.: Наука, 1982–272 с.
4. Харкевич А.А. Борьба с помехами. – М.: Наука, 1965–276 с.
5. Б.Г. Марченко, В.А. Омельченко. Вероятностные модели случайных сигналов и полей в прикладной статистической радиофизике: Учеб. пособие. – К.: УМК ВО, 1988. – 176 с.
6. Марпл–мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
7. Фридландер В. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных // ТИИЭР. – 1982. – Т.70, №8. – С. 54–98.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа представляет собой попытку объединить оригинальный материал по моделям линейного предсказания и некоторые результаты исследований по решению различных прикладных задач с использованием рассматриваемых моделей. С одной стороны, излагаемый материал ближе по глубине к монографии, но с другой стороны его можно рассматривать как учебное пособие по моделям линейного предсказания и их применению в задачах статистической радиотехники. При изложении материала авторы придерживались концепции доступности теоретических положений для студентов и преподавателей, желающих ознакомиться и получить представление о теории моделирования случайных сигналов и процессов и ее применениях при решении прикладных задач статистической радиотехники. Хотя упоминание или краткие представления о рассматриваемых математических моделях содержатся во многих современных книгах и учебных пособиях, достаточно подробное описание моделей можно встретить в лишь фундаментальных работах Дж. Бокса и Г. Дженкинса, а также С.Л. Марпла. К сожалению, их книги не всегда доступны, но их содержание в значительной мере дополняет затронутые здесь вопросы. Поэтому подготовку материалов и опубликование данной книги авторы считают полезной.

При изложении материала были рассмотрены стационарные и нестационарные сигналы, гауссовы и негауссовы процессы, узкополосные и широкополосные сигналы, а также сигналы со смешанным спектром. Достаточно подробно изложены вопросы анализа сигналов и синтеза моделей на основе фильтров прямой реализации и решетчатых фильтров. Продемонстрированы вопросы прогнозирования в радиосвязи сезонных нестационарных процессов с трендом на основе нестационарной модели авторегрессии. Приведен способ генерации случайных узкополосных сигналов по задаваемым параметрам спектральной плотности мощности. Излагаемый материал сопровождается множеством численных примеров и иллюстрируется графиками. Рассмотрены также вопросы сжатия речевых сигналов на основе модели авторегрессии и решетчатых фильтров в цифровых системах связи, на которые в учебной литературе уделяется недостаточно внимания.

Для научных работников интерес представляют исследования задач обработки случайных процессов и сигналов, для описания которых используются модели линейного предсказания. Рассмотрены алгоритмы распознавания случайных сигналов на основе авторегрессионной модели для решения ряда задач статистической радиотехники. Исследованы особенности применения таких математических моделей в задачах распознавания заданных радиоизлучений

при автоматизированном радиоконтроле, при распознавании метеообъектов в радиометеорологии по флуктуациям интенсивности отраженных сигналов, в радиолокационном распознавании объектов по пачке отраженных сигналов при широкополосном зондировании, для автоматизированного распознавания стадий сна по электроэнцефалограммам.

Перед обобщением моделей линейного предсказания на негауссовы процессы, изложены элементы теории случайных процессов высших порядков. В книге описана теория обобщенных моделей авторегрессии, скользящего среднего и авторегрессии-скользящего среднего. Показано, что к таким моделям можно также прийти путем анализа преобразования моментных функций высших порядков линейными системами и на основе операторного анализа. Построены также кумулянтные обобщенные модели линейного предсказания. Приведены элементы параметрического спектрального анализа высших порядков на основе обобщенных моделей предсказания. Показано использование в теории обобщенных моделей линейного предсказания нового способа произведения векторов и матриц. Разработано ряд приложений описанной теории для оценки параметрических спектров высших порядков сигналов на фоне белого шума и коррелированных помех в задаче синтеза фильтров на основе статистик высших порядков. Рассмотрено распознавание сигналов по моделям линейного предсказания, распознавание радиолокационных сигналов, применение моделей линейного предсказания и статистик высших порядков в задачах передачи данных в телекоммуникации.

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ТИХОНОВ Вячеслав Анатолійович
БЕЗРУК Валерій Михайлович

«МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПЕРЕДБАЧЕННЯ В СТАТИЧНІЙ РАДІОТЕХНІЦІ»

Монографія

Відповідальний випусковий
Редактор
Комп'ютерна верстка

В.М. Безрук
О.Г. Троценко
Л.Д. Медведєва

План 2019 (друге півріччя), поз. 110

Підп. до друку 13.07.2019. Формат 60*84 $\frac{1}{16}$. Спосіб друку – ризографія
Умов. друк. арк. 28,5. Облік. вид. арк. 28,3. Тираж 50 прим
Зам. 1-110.

ХНУРЕ. Україна. 61166. Харків, просп. Науки,14

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки,14