

УДК 519.216

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ МНОГОСЛОЙНЫМИ ГРАФАМИ



[Д.В. АГЕЕВ](#)

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

У статті запропоновано під час розв'язання задач проектування сучасних телекомунікаційних систем застосовувати як математичну модель багатошарові графи. Наведено властивості багатошарових графів та приклад постановки задачі синтезу структури телекомунікаційної системи.

У статті запропоновано під час розв'язання задач проектування сучасних телекомунікаційних систем застосовувати, як математичну модель багатошарові графи. Наведено властивості багатошарових графів та приклад постановки задачі синтезу структури телекомунікаційної системи.

В статье предложено в качестве математической модели при решении задач проектирования современных телекоммуникационных систем использовать многослойные графы. Приведены свойства многослойных графов и пример постановки задачи синтеза структуры телекоммуникационной системы.

Введение

В последнее время наблюдается бурное развитие информационных технологий, что связано с переходом от постиндустриального общества к информационному. Технической основой построения информационного общества является Глобальная информационная инфраструктура, включающая в свой состав телекоммуникационную подсистему. От телекоммуникационной подсистемы требуется обеспечение возможности передачи любого вида информации, из любой точки мира, в любое время. В настоящее время в качестве такой сети рассматриваются сети связи, построенные согласно концепции NGN. Удовлетворение выдвигаемых к телекоммуникационным системам требований возможно как за счет развития методов управления сетью, так и за счет развития методов проектирования.

Сети NGN отличаются архитектурой от ранее используемых и не ограничиваются количеством предоставляемых услуг и видов передаваемой информации. Современные телекоммуникационные системы строятся по принципу наложенных сетей, когда одна транспортная сеть обеспечивает прозрачную передачу информационных потоков другой сети, образующих ее логические связи, ее логическую структуру. Таким образом, современные телекоммуникационные системы имеют многоуровневую структуру, образуемую иерархией технологий. Перечисленные свойства внедряемой сети выдвигают новые требования к проектированию. В процессе проек-

тирования решаются такие задачи, как: синтез структуры будущей системы, синтез топологии и выбор параметров элементов системы.

В данной статье предложена математическая модель структуры современных телекоммуникационных систем, которая учитывает их многоуровневую природу и позволяет комплексно решать задачи проектирования на всех ее технологических уровнях. Проведено исследование свойств предлагаемого многослойного графа, являющегося обобщением классических графов. Приведены алгоритмы решения задачи поиска подграфа минимального веса.

I. Представление мультисервисной телекоммуникационной системы как многослойной сети

Современные телекоммуникационные системы обеспечивают передачу различных видов трафика. Передаваемый трафик включает, но не ограничивается, передачу IP трафика Интернет, корпоративный трафик различных компаний, передаваемый с использованием виртуальных частных сетей, видео и речевой трафик фиксированных и мобильных телефонных операторов. Для передачи всех этих видов трафика через сеть узлы сети должны быть оборудованы коммутационным оборудованием, обеспечивающим прием входящего трафика и его дальнейшую передачу по исходящим каналам связи. Также каналы связи между узлами сети должны иметь достаточную пропускную способность, чтобы обеспечить передачу циркулирующих в сети информационных потоков. Обычно, пропускная способность каналов связи может принимать значение из некоторого дискретного набора допустимых значений или наращиваться с некоторой дискретной величиной шага.

При строительстве данных сетей или их модернизации перед сетевым провайдером возникает задача проектирования телекоммуникационной системы. Постановка задачи проектирования в общем виде заключается в определении множества узлов сети и каналов связи между ними (топологии сети), определении пропускных способностей каналов связи и параметров устанавливаемого в узлах сети оборудования, определении маршрутов передачи информационных потоков через сеть и величины потоков передаваемых вдоль этих маршрутов. В процессе проектирования данных систем необходимо учитывать различные условия по совместимости используемого оборудования и условия, накладываемые на выбираемые маршруты передачи сообщений в сети.

Современные телекоммуникационные системы являются большими сложными системами, которые тяжело поддаются математическому описанию. Телекоммуникационные системы строятся по иерархическому, многоуровневому принципу, как организационно, так и технологически.

Организационно телекоммуникационные системы делятся на уровни, при этом, более высокие уровни управляют и обеспечивают взаимодействие более низких в иерархии уровней. Уровни организационной иерархии обычно разделены территориально. Например, магистральный сегмент сети (WAN), региональная сеть (MAN) и локальная сеть (LAN).

Уровни технологической иерархии представляют собой наложенные сети, использующие различные технологии. Каждая связь в верхнем уровне использует один или несколько путей на более низком уровне. Например, IP-канал между двумя IP-маршрутизаторами, чаще всего не является прямым соединением кабельной линии или прямого радиоканала. Обычно он обеспечивается одним или несколькими световыми потоками в нижележащей волоконно-оптической сети. Если выделить в иерархии технологических уровней два взаимодействующих уровня, то можно отметить, что связь между узлами в вышележащем уровне называется логической связью, в то время как, связи, которые реализуют путь на нижнем уровне, называются физическими связями. Для определенности иерархию технологических уровней, образующих иерархию наложенных сетей, мы будем называть слоями, а сеть, которая их содержит, – многослойной.

Рассмотрим основные концептуальные положения многослойных сетей. Концепция многослойной сети не ограничивается рассмотренной выше IP-сетью поверх оптической сети. Многие телекоммуникационные технологии транспортных сетей и протоколы, такие как: Multi-Protocol Label Switching (MPLS), Synchronous Digital Hierarchy (SDH), Asynchronous Transport Mode (ATM), Wavelength Division Multiplexing (WDM) обладают свойством многослойности согласно их технической спецификации. В частности, физические связи транспортного уровня могут реализовываться за счет путей на более низком уровне. Реальные сети могут содержать стек уровней, если данная телекоммуникационная технология учитывает их наличие.

Основное преимущество многослойной структуры телекоммуникационной сети то, что она упрощает сетевое оборудование в узлах и управление сетью. Например, установленный в узле оптической сети ОХС (Optical Cross Connect) обеспечивает передачу агрегированного оптического сигнала, несущего информационный поток в несколько Гбит/с, из входящего порта в исходящий посредством зеркал или другим способом. Таким образом, отпадает необходимость в преобразовании оптического сигнала в электрический и обработке каждого отдельного пакета, передаваемого в агрегированном сигнале. Данная обработка осуществляется только в конечных узлах, где устанавливается преобразующая аппаратура IP-маршрутизатора. В свою очередь IP-маршрутизатор оперирует только сведениями о наличии или отсутствии соединения к следующему IP-маршрутизатору и о величине пропускной способности данного соединения. При этом нет необходимости обрабатывать информацию о том, каким маршрутом передается сигнал через низлежащую транспортную сеть, и какая технология передачи при этом используется.

Следующие три свойства общие для всех многослойных телекоммуникационных систем вне зависимости от используемых телекоммуникационных технологий:

1. Информационные потоки абонентов сети могут быть переданы по пути, образуемому логическими каналами; каждый логический канал соответствует одному или нескольким путям физическими каналами нижележащего уровня.

2. Пропускная способность определена не только для физических каналов, но и для логических. В большинстве случаев, пропускная способность каналов может нара-

щиваться дискретным шагом, величина которого намного больше, чем требуемая пропускная способность для индивидуального информационного потока пользователя.

3. В каждом конечном узле логического канала, трафик может быть извлечен из входящего агрегированного сигнала и вновь перегруппирован в новый агрегированный сигнал, который передается в исходящий логический канал. Данный процесс ограничен производительностью оборудования, установленного в узле.

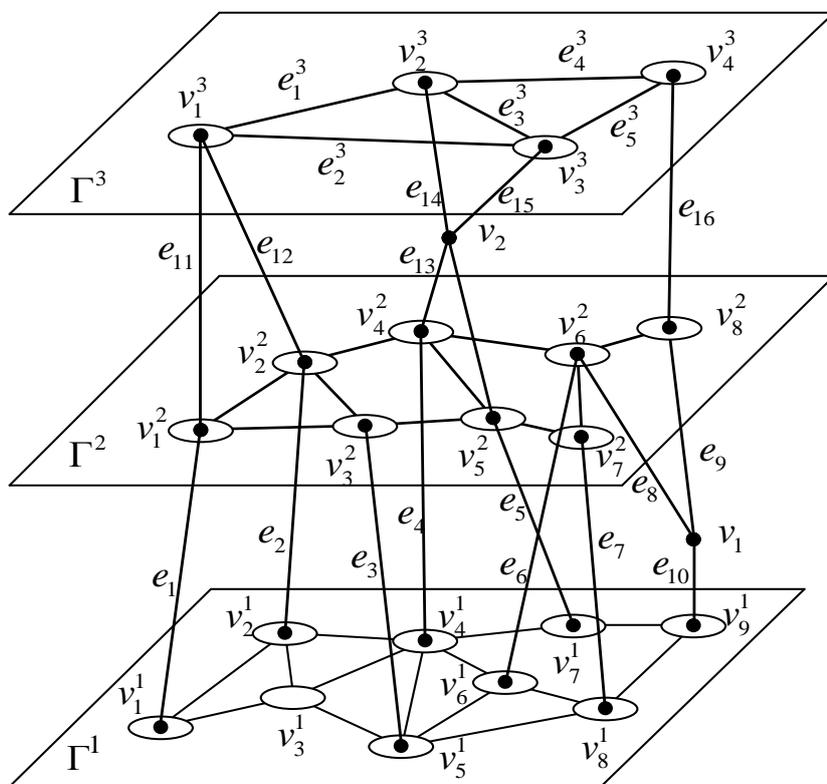
II. Описание математической модели многослойного графа и его свойства

Для математического моделирования структуры систем, в том числе телекоммуникационных, широко применяются графы. При описании системы с помощью графа элементы системы моделируются вершинами графа, а связи между ними – ребрами или дугами.

Для моделирования многослойных телекоммуникационных систем нами предлагается использовать многослойный граф $MLG = (\Gamma, V, E)$, который включает в свой состав:

– множество подграфов $\Gamma = \{\Gamma^1, \dots, \Gamma^l, \dots, \Gamma^L\}$, $\Gamma^l = (V^l, E^l)$, где подграф Γ^l описывает структуру сети на уровне l ;

– вершины $v_i \in V$ и ребра $e_k = (v_i, v_j)$, $e_k \in E$ обеспечивают связь подграфов Γ^l между собой (рис. 1).



$$MLG = \{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, V, E\}$$

$$\Gamma^1 = (V^1, E^1)$$

$$\Gamma^2 = (V^2, E^2)$$

$$\Gamma^3 = (V^3, E^3)$$

$$V^1 = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_9^1\}$$

$$E^1 = \{e_1^1, e_2^1, \dots, e_{14}^1\}$$

$$V^2 = \{v_1^2, v_2^2, \dots, v_8^2\}$$

$$E^2 = \{e_1^2, e_2^2, \dots, e_{10}^2\}$$

$$V^3 = \{v_1^3, v_2^3, v_3^3, v_4^3\}$$

$$E^3 = \{e_1^3, e_2^3, e_3^3, e_4^3, e_5^3\}$$

$$V = \{v_1, v_2\}$$

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_{16}\}$$

Рис. 1. Пример многослойного графа

На структуру графа MLG , моделирующего мультисервисные телекоммуникационные системы, накладывается дополнительное ограничение, которое заключается в том, что для каждого ребра $e_k^l = (v_i^l, v_j^l)$, $e_k^l \in E^l$ подграфа Γ^l существует путь $\pi = (v_i^l, \dots, v_m^n, \dots, v_j^l)$ между вершинами v_i^l и v_j^l , $v_i^l, v_j^l \in V^l$, проходящий через подграф более низкого уровня:

$$\forall e_k^l = (v_i^l, v_j^l), e_k^l \in E^l, v_i^l, v_j^l \in V^l, \exists \pi = (v_i^l, \dots, v_m^n, \dots, v_j^l), v_m^n \in V^n, n < l. \quad (1)$$

Данное правило не выполняется только для подграфа самого нижнего уровня, $l = 1$.

Многослойный граф MLG обладает следующими свойствами:

1. Если подграф Γ^l многослойного графа MLG связанный и $l > 1$, то каждая вершина v_i^l подграфа Γ^l имеет как минимум одно исходящее ребро, принадлежащее графу $\Gamma^0 \subset \Gamma^0 = (V, E)$, связывающий слой l с нижележащими слоями.

2. Если для МСГ MLG выполняется условие (1) и для любого слоя выше слоя l существует путь, проходящий через подграф не ниже слоя l , то выполнение условия (1) для слоев $n \leq l$, $n > 1$ гарантирует выполнение условия (1) для МСГ MLG в целом.

Рассмотрим пример постановки задачи синтеза структуры сети с использованием описанной выше математической модели.

Синтезируемая сеть обеспечивает доступ абонентов сети к серверам. Известно: местоположения абонентов, местоположение узлов сети и каналы связи – кандидаты на использование их в сети. Необходимо определить местоположение серверов, топологию сети, пути передачи трафика, пропускные способности каналов связи.

Для решения задачи зададим исходный многослойный граф. Граф $MLG = (\Gamma, V, E)$ (рис. 2) имеет два уровня (содержит два подграфа Γ^1 и Γ^2). Подграф Γ^1 описывает физическую структуру сети, подграф Γ^2 – логическую.

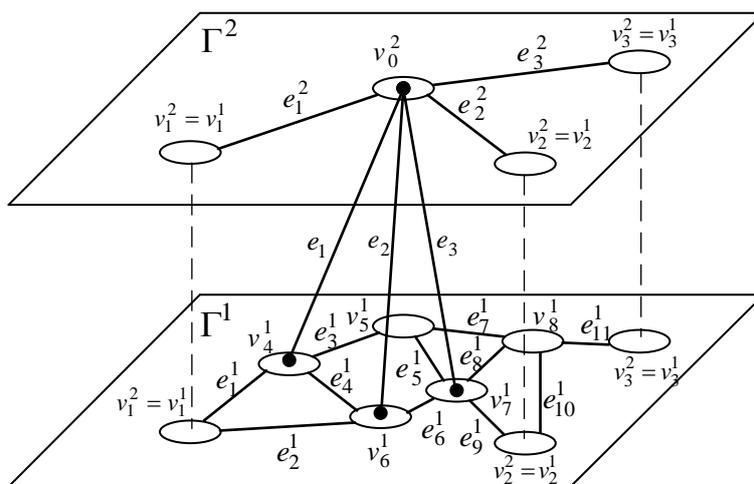


Рис. 2. Пример постановки задачи с использованием многослойного графа

В состав подграфа Γ^1 входят вершины и ребра – кандидаты на установку в них узлов коммутации и организацию каналов связи. В состав подграфа Γ^1 входят также узлы, моделирующие абонентов сети.

Подграф Γ^2 содержит вершину v_0^2 , моделирующую сервера и вершины, моделирующие абонентов сети. Подграф Γ^2 имеет радиальную топологию.

Подграфы Γ^1 и Γ^2 соединены ребрами E , которые соединяют вершину v_0^2 и вершины v_i^1 подграфа Γ^1 , в которых возможна установка серверов. Вершины, моделирующие абонентские узлы в обоих подграфах, совпадают. Ребрам подграфа Γ^1 приписывают веса, равные затратам на их использование. Ребрам E приписывают вес, равный затратам на установку оборудования сервера в узле сети, пропускные способности ребер E равны производительности сервера.

Решение исходной задачи сводится к нахождению результирующих множеств E , V^1 , E^1 таких чтоб, при соблюдении ограничений на величины потоков в каналах связи, суммарный вес ребер был минимальный.

III. Задача поиска многослойных графов минимального веса

Предлагаемый в работе многослойный граф является общим случаем графа, так как классический граф можно рассматривать как МСГ с одним слоем. Рассмотрим примеры решения отдельных задач теории графов для многослойного графа.

Одной из задач, решаемых на взвешенном графе, является нахождение связанного графа минимального веса. Связанный граф – это граф, где между любой парой вершин этого графа существует как минимум один путь. Из теории графов известно, что связанный граф минимального веса является деревом. Обобщим эту задачу на случай многослойного графа.

Согласно определению многослойный граф содержит множество связанных между собой подграфов, называемых слоями, и при этом для любого ребра верхнего слоя существует путь, проходящий через подграф нижнего слоя. Учитывая многослойную структуру предлагаемого в работе графа, существует несколько вариантов связанного графа минимального веса:

- многослойный связанный граф минимального веса, являющийся подграфом исходного многослойного графа, который включает все вершины исходного МСГ;
- многослойный связанный граф минимального веса, являющийся остовом подграфа Γ^l , который включает все вершины уровня l исходного МСГ;
- многослойный связанный граф минимального веса, который включает только часть вершины уровня l исходного МСГ.

Для определенности будем называть:

- первый тип: MLG_{\min} – многослойным графом минимального веса,
- второй тип: MLG_{\min}^l – остовом (остовным деревом) слоя l ,
- третий тип: ST_{MLG}^l – минимальным деревом Штейнера слоя l .

Рассмотрим методы решения указанных выше задач.

IV. Метод решения задачи поиска многослойного графа минимального веса

Многослойный граф минимального веса MLG_{\min} имеет связанный подграф Γ^L , описывающий верхний слой МСГ. Из связности верхнего слоя $l = L$ и из условия существования пути, проходящего через подграф нижележащего уровня, следует, что подграф Γ^{L-1} нижележащего слоя тоже является связанным. Применяв это рассуждение последовательно для всех остальных слоев графа получим, что все подграфы Γ^l , входящие в состав МСГ MLG_{\min} ($\Gamma^l \in \Gamma'$, $MLG_{\min} = (\Gamma', V, E')$) являются связанными.

Для того, чтобы условие существования пути, проходящего через подграф нижележащего уровня, выполнялось достаточно, чтобы для каждой вершины подграфа верхнего слоя МСГ существовал путь, связывающий ее с одной из вершин нижележащего слоя:

$$\forall v_i^l, \exists \pi = (v_i^l, \dots, v_j^n) = (e_i, \dots, e_j), \forall l = 2, \dots, L, n < l, e_k \in E.$$

Вес графа MLG_{\min} равен сумме весов каждого его слоя и веса подграфа, связывающего слои МСГ между собой. Для минимизации веса МСГ необходимо минимизировать вес каждой из его составляющих. Таким образом, необходимо найти связанный подграф минимального веса, охватывающий все вершины данного подграфа, для каждого слоя МСГ и подграф минимального веса, связывающий слои МСГ между собой.

Для поиска МСГ минимального веса MLG_{\min} предлагается следующий алгоритм:

1. Находим остовное дерево T^l для каждого слоя МСГ (для каждого подграфа Γ^l) с использованием известных из теории графов методов. $T^l \subset \Gamma^l$, $l = 1, \dots, L$, где L – количество слоев МСГ.

2. Находим множество остовных деревьев T_i^0 минимального веса для каждой компоненты связности графа $\Gamma^0 = (V^0, E)$, $V^0 = \left(\bigcup_{l=1}^L V^l \right) \cup V$, $V^l \subset \Gamma^l$, $l = 1, \dots, L$, $E \subset MLG$, $E \cap \Gamma^l = \emptyset$, $\forall l = 1, \dots, L$. Граф Γ^0 образован вершинами подграфов Γ^l , промежуточными вершинами V МСГ и ребрами E , обеспечивающих связь между слоями МСГ.

3. Результирующий МСГ минимального веса получается в результате объединения остовных деревьев, полученных на первом и втором шаге алгоритма:

$$MLG_{\min} = \left(\bigcup_{l=1}^L T^l \right) \cup \left(\bigcup_i T_i^0 \right).$$

V. Метод решения задачи поиска минимального остова слоя l двухслойного графа

Остов (остовное дерево) слоя l МСГ MLG_{\min}^l содержит связанный подграф Γ^l , $\Gamma^l \subset \Gamma^l$, описывающий слой l . Подграф Γ^l содержит все вершины подграфа Γ^l исходного многослойного графа MLG . Для слоев MLG_{\min}^l ниже слоя l подграф Γ^n , $n < l$ может содержать только часть вершин исходного подграфа Γ^n :

$$V^l \subseteq V^n, \quad V^n \subset \Gamma^n, \quad V^n \subset \Gamma^n, \quad \forall n < l.$$

Алгоритм поиска остова слоя l является сложной вычислительной задачей. Рассмотрим, вначале, алгоритм для случая двухслойного графа.

Исходный граф является многослойным графом, содержащим два слоя ($L = 2$). Нахождение остова для верхнего слоя ($l = 2$) производится в два этапа:

1. Находим остовное дерево T^2 минимального веса для подграфа Γ^2 (слоя $l = 2$) с использованием известных из теории графов методов, $T^2 \subset \Gamma^2$.

2. Формируем граф Γ^0 содержащий:

– подграф Γ^1 ;

– вершины V^2 , слоя $l = 2$, входящие в состав остовного дерева T^2 , $V^2 \subset T^2$;

– вершины V и ребра E , связывающие слои МСГ между собой.

$$\Gamma^0 = \Gamma^1 \cup V^2 \cup V \cup E.$$

3. Находим минимальное дерево Штейнера T^0 на графе Γ^0 , где вершины V^2 являются терминальными точками.

4. Результирующий МСГ MLG_{\min}^2 получается в результате объединения деревьев, полученных на первом и третьем шаге алгоритма:

$$MLG_{\min}^2 = T^2 \cup T^0.$$

Перед тем, как перейти к рассмотрению алгоритма поиска остова слоя l МСГ MLG_{\min}^l для случая количества слоев больше двух ($L > 2$), рассмотрим алгоритм поиска дерева Штейнера слоя l .

VI. Метод решения задачи поиска минимального дерева Штейнера слоя l многослойного графа

Минимальное дерево Штейнера ST_{MLG}^l содержит связанный подграф ST^l , $ST^l \subset \Gamma^l$, являющийся деревом подграфа Γ^l , которое покрывает заданное множество вершин V_{ST}^l , $V_{ST}^l \subset V^l \subset \Gamma^l$, называемых терминальными точками. Для слоев ST_{MLG}^l ниже слоя l подграф ST^n , $n < l$, аналогично остову слоя l , может содержать только часть вершин исходного подграфа Γ^n :

$$V^l \subseteq V^n, \quad V^n \subset ST^l \subset \Gamma^n, \quad V^n \subset \Gamma^n, \quad \forall n < l.$$

Для нахождения допустимого решения задачи поиска дерева Штейнера для многослойного графа можно использовать следующий алгоритм:

1. Находим дерево Штейнера $ST^l, l = L$ для верхнего слоя МСГ MLG , описываемого подграфом $\Gamma^l, l = L$, приняв в качестве терминальных точек дерева $ST^l, l = L$ множество вершин $V_{ST}^l, V_{ST}^l \subset V^l, l = L$.

2. Принимаем $m = L$.

3. Формируем граф $\Gamma^{(m)}$, содержащий:

– вершины V^m , слоя m МСГ MLG , входящие в состав дерева $ST^m, V^m \subset ST^m$;

– множество подграфов $\Gamma^i, i < m$;

– вершины $v_i \in V$ и ребра $e_i \in E$, обеспечивающие связь слоев $\Gamma^n, n = 2 \dots m$

МСГ MLG с нижележащими слоями.

4. Находим минимальное дерево Штейнера ST^{m+1} для графа $\Gamma^{(m)}$, приняв вершины V^m в качестве терминальных точек.

5. Принимаем $m = m - 1$.

6. Если $m > 1$, то переход на шаг 3. Иначе формируем дерево Штейнера ST_{MLG}^l слоя l МСГ MLG как объединение подграфов ST^l , полученных на 1 и 4 шаге алгоритма:

$$ST_{MLG}^l = \bigcup_{i=1}^L ST^i.$$

Алгоритм нахождения минимального дерева Штейнера для многослойного графа построен на базе метода ветвей и границ с использованием рекурсивной процедуры.

Предлагаемый алгоритм на этапе ветвления разбивает все множество решений на два подмножества:

– в одном из них заданная вершина $v_i^l \in MLG, 2 \leq l \leq L$ может входить в состав дерева Штейнера $ST^{(l)}$;

– во втором подмножестве вершина $v_i^l \in MLG, 2 \leq l \leq L$ не может использоваться при построении дерева Штейнера $ST^{(l)}$.

В качестве правила отсева используются следующие условия:

1) для полученного на стадии ветвления множества вершин графа невозможно построить дерево Штейнера;

2) рассматриваемая на этапе ветвления вершина $v_i^l \in MLG, 2 \leq l \leq L$ не входит в состав минимального дерева Штейнера $ST^{(l)}$;

3) вес частично построенного дерева Штейнера $ST^{(m)}$ для многослойного графа MLG (оценка снизу) больше уже найденного ST_{MLG} .

Опишем рекурсивную процедуру $MinST_MLG$.

Входные параметры процедуры $MinST_MLG(\Gamma_n^{(m)}, V_n^{(m)}, m, n, W)$:

– $\Gamma_n^{(m)}$ – анализируемый на данном шаге граф;

– $V_n^{(m)}$ – множество терминальных точек синтезируемого дерева Штейнера ST_{MLG}^m ;

– m – индекс слоя МСГ MLG , анализируемого на данном шаге;

– n – индекс рассматриваемой на данном шаге вершины $v_n^m \in V_n^m$;

– W – текущая стоимость частично построенного дерева Штейнера ST_{MLG} .

Процедура $MinST_MLG(\Gamma_n^{(m)}, V_n^{(m)}, m, n, W)$:

1. Находим дерево Штейнера $ST_n^{(m)}$ для подграфа $\Gamma_n^{(m)}$, приняв в качестве терминальных точек дерева $ST_n^{(m)}$ множество вершин $V_n^{(m)}$.

2. Если дерево Штейнера $ST_n^{(m)}$ не существует, то выходим из процедуры $MinST_MLG(\bullet)$ и возвращаем в качестве результата пустое множество.

3. Если $m = 1$ то выходим из процедуры $MinST_MLG(\bullet)$ и возвращаем в качестве результата полученное дерево $ST_n^{(m)}$.

4. Если $n = 0$, то переходим к шагу 16.

5. Определяем вес найденного дерева Штейнера $ST_n^{(m)}$: $W(ST_n^{(m)})$.

6. Принимаем $W = W + W(ST_n^{(m)})$.

7. Если $W > W_0$, где W_0 – пороговая величина, равная минимальному весу ранее найденного дерева Штейнера ST_{MLG}^l , то выходим из процедуры $MinST_MLG(\bullet)$ и возвращаем в качестве результата пустое множество.

8. Производим рекурсивный вызов $MinST_MLG(\bullet)$ с параметрами $ST_{MLG}^+ = MinST_MLG(\Gamma_n^{(m)}, V_n^{(m)}, m, n-1, W)$.

9. Если результат не является пустым множеством, то определяем вес полученного дерева Штейнера $W^+ = W(ST_{MLG}^+)$, иначе $W^+ = \infty$.

10. Если вершина $v_n^m \in ST_n^{(m)}$, то удаляем вершину v_n^m и инцидентные ей ребра e_i^m из рассматриваемого на данной итерации подграфа $\Gamma_n^{(m)}$:

$$\Gamma_n^{(m)} = \Gamma_n^{(m)} \setminus \{v_n^m, \{e_i^m : e_i^m = (v_n^m, v), v \in \Gamma_n^{(m)}\}\},$$

иначе: принимаем $W^- = \infty$ и переходим к шагу 13.

11. Производим вызов рекурсивной процедуры $MinST_MLG(\bullet)$ с параметрами $ST_{MLG}^- = MinST_MLG(\Gamma_n^{(m)}, V_n^{(m)}, m, n-1, W)$.

12. Если результат не является пустым множеством, то определяем вес полученного дерева Штейнера $W^- = W(ST_{MLG}^-)$, иначе $W^- = \infty$.

13. Принимаем $W' = \min(W^+, W^-)$.

14. Если $W + W' < W_0$, то $W_0 = W + W'$.

15. Если $W' = \infty$, то выходим из процедуры и возвращаем в качестве результата пустое множество, иначе выходим из процедуры и возвращаем в качестве результата МСГ (ST_{MLG}^+ или ST_{MLG}^-) с наименьшей стоимостью W' .

16. Формируем множество вершин $V_n^{(m-1)}$, являющиеся терминальными точками дерева Штейнера следующего слоя многослойного графа MLG . Множеству $V_n^{(m-1)}$,

$V_n^{(m-1)} \subset \Gamma^m$ принадлежат вершины слоя m МСГ MLG , входящие в состав дерева Штейнера $ST_n^{(m)}$, $V_n^{(m-1)} \subset ST_n^{(m)}$.

17. Формируем граф $\Gamma_n^{(m-1)}$, содержащий:

- вершины $V_n^{(m-1)}$, $V_n^{(m-1)} \subset \Gamma^m$ слоя m МСГ MLG ;
- множество подграфов Γ^i , $i = 1 \dots m-1$;
- вершины $v_i \in V$ и ребра $e_i \in E$, обеспечивающие связь слоев Γ^n , $n = 2 \dots m$

МСГ MLG с нижележащими слоями.

18. Производим вызов рекурсивной процедуры $MinST_MLG(\bullet)$ с параметрами $MinST_MLG(\Gamma_n^{(m-1)}, V_n^{(m-1)}, m-1, N(V^{m-1}), W)$, где $N(\bullet)$ – мощность множества.

19. Выходим из процедуры и возвращаем результат, полученный на шаге 18.

С использованием описанной выше процедуры $MinST_MLG(\bullet)$ можно решить задачу поиска дерева Штейнера ST_{MLG}^l слоя l следующим образом:

1. Формируем исходные данные, являющиеся аргументами процедуры $MinST_MLG(\bullet)$: $m = l$, $n = N(\Gamma^l)$, $\Gamma_n^{(m)} = \Gamma^l$, $V_n^{(m)} = V_{ST}^l$.

2. Находим допустимое решение задачи поиска дерева Штейнера слоя l - ST_{MLG}^l .

3. Определяем вес полученного МСГ $W = W(ST_{MLG}^l)$.

4. Применяем процедуру $MinST_MLG(\Gamma_n^{(m)}, V_n^{(m)}, m, n, W)$.

5. Решением задачи является результат, возвращаемый процедурой $MinST_MLG(\bullet)$. Если в результате использования процедуры $MinST_MLG(\bullet)$ получаем пустое множество, то для заданного МСГ MLG минимального дерева Штейнера слоя l не существует.

VII. Метод решения задачи поиска минимального остова слоя l многослойного графа

Вернемся к рассмотрению алгоритма поиска остова слоя l , в случае МСГ с количеством слоев больше двух $L > 2$. Для решения данной задачи предлагается следующий алгоритм.

1. Находим остовное дерево T^l минимального веса для подграфа Γ^l (слоя l) с использованием известных из теории графов методов, $T^l \subset \Gamma^l$.

2. Формируем исходные данные, являющиеся аргументами процедуры $MinST_MLG(\bullet)$: $m = l-1$, $n = N(\Gamma^{l-1})$.

3. Формируем множество $V_n^{(m)}$. Множество $V_n^{(m)}$ содержит вершины, входящие в состав дерева T^l : $V_n^{(m)} \subset T^l$.

4. Формируем граф $\Gamma_n^{(m)}$, содержащий:

- вершины $V_n^{(m)}$;
- множество подграфов Γ^i , $i < l$;
- вершины $v_i \in V$ и ребра $e_i \in E$, обеспечивающие связь слоев Γ^n , $n = 2 \dots l$ МСГ

MLG с нижележащими слоями.

5. Находим допустимое решение задачи поиска дерева Штейнера слоя l - ST_{MLG}^l .
6. Определяем вес полученного МСГ $W = W(ST_{MLG}^l) + W(T^l)$.
7. Применяем процедуру $ST_{MLG}^{l-1} = \text{Min}ST_MLG(\Gamma_n^{(m)}, V_n^{(m)}, m, n, W)$.
8. Решением задачи является МСГ, получаемый при объединении дерева T^l , полученного на первом шаге алгоритма и МСГ ST_{MLG}^{l-1} :

$$MLG_{\min}^l = T^l \cup ST_{MLG}^{l-1}.$$

Заключение

Процесс проектирования современных мультисервисных телекоммуникационных систем требует использования математических моделей его функционально-структурных свойств, которые наиболее полно описывают особенности данного класса систем. В статье в результате проведенного анализа структурных и функциональных свойств телекоммуникационных систем предложено использовать для описания телекоммуникационных систем на этапе проектирования многослойные графы, которые являются частным случаем классических неплоских графов с рядом дополнительных ограничений.

Предложенный в статье многослойный граф позволяет более полно учесть технологическую и организационную иерархию мультисервисных телекоммуникационных систем. Применение предложенной математической модели позволит решать большой круг задач, возникающих в процессе проектирования, такие как: определение мест размещения оборудования, физическая и логическая топология сети, задача распределения потоков и др.

Использование многослойных графов позволяет решать задачи проектирования иерархических и многоуровневых телекоммуникационных систем комплексно на нескольких их уровнях, что позволит повысить эффективность выбранного проектного решения по сравнению с последовательным решением задач проектирования на каждом из уровней сети.

Предложенный в статье подход может быть применен на практике при разработке систем автоматизации проектирования сетей NGN, для описания структуры проектируемой системы.

Список литературы:

1. *Orlowski S., Koster A.M.C.A., Raack C., Wessäly R.* Two-layer network design by branch-and-cut featuring MIP-based heuristics / Proceedings of the 3rd International Network Optimization Conference (INOC 2007), Spa, Belgium – 2007. – P. 114–119.
2. *Capone, A., Carello, G., Matera, R.,* Multi-Layer Network Design with Multicast Traffic and Statistical Multiplexing / IEEE Global Telecommunications Conference (IEEE GLOBECOM), Washington, USA – 2007. – P. 2565–2570
3. *Lozano A., Storchi G.* Shortest viable path algorithm in multimodal networks / Transportation Research, part A, 35, 2001. – P. 225–241.