

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Оптимальне проектування лопатей повітряних установок

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи САУМ-23-2

Сичов А.О.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Стрельнікова О.О.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 06 ” листопада 2023 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Сичову Андрію Олексійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Оптимальне проєктування лопатей повітряних установок

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель динамічного стану лопатей
повітряних установок

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Стрельнікова О.О.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 72 с., 3 табл., 10 рис., 1 дод., 24 джерела.

ВАГОВА ОПТИМІЗАЦІЯ, ГІПЕРСИНГУЛЯРНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ, ЛОПАТІ ВІТРОВОЇ ТУРБИНИ, МЕТОДИ ГРАНИЧНИХ ТА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

Об'єкт дослідження – проектування лопатей повітряних установок з мінімальною вагою.

Мета роботи – створення ефективного методу оптимального проектування лопатей повітряних установок.

Методи дослідження – методи граничних інтегральних рівнянь, методи нелінійного програмування, методи скінченних та граничних елементів.

Сучасні вітроелектростанції являють собою технічні комплекси, що складаються з великої кількості взаємодіючих вузлів і агрегатів різного призначення. Серед них основне місце займає лопатева система повітряної установки. Оптимальне проектування цього типу структур використовує процедури пошуку для визначення оптимального набору параметрів, які задовольняють задані обмеження та забезпечують найкраще значення прийнятого критерію оптимальності. Запропоновано нову математичну модель на основі застосування методів граничних елементів. Гіперсингулярні інтегральні рівняння були використані для визначення динамічного тиску на лопаті. Скінченну частину гіперсингулярного інтеграла отримано аналітично за довільним плоским багатокутником. Розроблено нову версію методу нелінійного програмування, засновану на використанні адаптивного управління процедурами оптимізації. Запропонований метод оптимізації використовує ряд методів, які називаються гібридінтами. В якості гібридінтів для даної версії гібридного методу оптимізації обрано наступні модифікації методів: адаптивний покроковий спуск, схема Абрамова, модифікація яру, алгоритм розпізнавання образів. Визначено критерій, за яким

відбираються найбільш ефективні гібриденти для поточного пошуку екстремуму. Цей критерій включає інформацію, що характеризує мінливу ситуацію. За результатами комп'ютерного моделювання лопаті вітрової турбіни отримано лопать з мінімальною вагою. Далі запропонований підхід буде узагальнено для аналізу міцності та динаміки вітрових турбін з вертикальною віссю обертання.

ABSTRACT

Introductory note: 72 pages, 3 tables, 10 figures, 1 appendix, 24 sources.

BOUNDARY AND FINITE ELEMENT METHODS, HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION, NONLINEAR PROGRAMMING, WEIGHTED OPTIMIZATION, WIND TURBINE BLADES.

Object of research – design of blades of air installations with minimum weight.

Purpose of work – developing effective methods for optimal design of blades of air installations.

Methods of research – methods of boundary integral equations, methods of nonlinear programming, methods of finite and finite elements.

Modern wind power plants are technical complexes consisting of a large number of interacting nodes and units of various purposes. Among them, the main place is occupied by the blade system of the air installation. Optimal design of this type of structures uses search procedures to determine the optimal set of parameters that satisfy the given constraints and provide the best value of the adopted optimality criterion. A new mathematical model based on the application of boundary element methods is proposed. Hypersingular integral equations were used to determine the dynamic pressure on the blade. The finite part of the hypersingular integral was obtained analytically for an arbitrary flat polygon. A new version of the nonlinear programming method has been developed, based on the use of adaptive control of optimization procedures. The proposed optimization method uses a number of methods called hybrids. The following modifications of the methods have been selected as hybrids for this version of the hybrid optimization method: adaptive stepwise descent, Abramov scheme, ravine modification, pattern recognition algorithm. A criterion has been de-

terminated by which the most effective hybrids are selected for the current search for the extremum. This criterion includes information characterizing the changing situation. According to the results of computer modelling, the wind turbine blades were obtained with minimal weight. Further, the proposed approach will be generalized for analysing the strength and dynamics of wind turbines with a vertical axis of rotation.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	9
Вступ	10
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	13
1.1 Системний аналіз задачі оптимального проектування лопатей повітряних установок.....	13
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі оптимального проектування лопатей повітряних установок	14
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	16
1.4 Постановка задач дослідження	18
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	22
2.1 Методи теорії потенціалу та граничних інтегральних рівнянь	22
2.2 Методи чисельного розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь.....	24
2.3 Методи нелінійного програмування	26
Висновки за розділом 2	31
3 Програмна реалізація	33
3.1 Розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння	33
3.2 Алгоритм розв'язання задачі оптимального проектування лопатей повітряної турбіни.....	35
3.3 Опис пакету програм	37
Висновки за розділом 3	38
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	40
4.1 Обчислювальний експеримент для знаходження динамічних характеристик лопаті	40
4.2 Обчислювальний експеримент з оптимального проектування	46
Висновки за розділом 4	47
Висновки	49
Перелік джерел посилання	51
Додаток А Лістинг програми	54

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

ГІР – гіперсингулярні інтегральні рівняння;

МКЕ – метод скінченних елементів;

МГЕ – метод граничних елементів;

СЛАР – система лінійних алгебраїчних рівнянь;

E – модуль пружності, МПа;

ν – коефіцієнт Пуассона;

ρ – густина матеріалу лопаті, кг/м³.

ВСТУП

Актуальність теми. У різних галузях інженерної практики, таких як турбінобудування, двигунобудування, хімічне та енергетичне машинобудування, широко використовуються елементи тонкостінних конструкцій, що працюють за умов підвищених технологічних навантажень та високих температур. Проектування таких машин і споруд з достатнім рівнем надійності потребує кваліфікованого аналізу напружень і деформацій, частот і форм власних коливань конструктивних елементів, зокрема з урахуванням можливих дефектів структури. Це дозволяє оцінити межу міцності конструкції та уникнути небажаних резонансних частот.

Оскільки такі конструкції часто взаємодіють з повітряним або водним середовищем, для розрахунку зазначених характеристик необхідно вирішувати задачі гідро-аеропружності, тобто визначати напруження, деформації та частоти коливань з урахуванням сил, що діють на пружне тіло з боку рідини чи газу.

Таким чином, стає актуальним створення більш точних моделей і методів розрахунку таких конструкцій, які враховують складну геометрію та вплив потоків рідини на напружено-деформований стан, частоти та форми власних коливань. На етапі проектування виникає також необхідність оптимізації, пов'язаної зі зниженням матеріалоємності, при цьому забезпечуючи нормальне функціонування елементів машин і споруд. Це особливо важливо для конструкцій, виготовлених із дорогих матеріалів або серійного виробництва, де зменшення маси конструкцій має значний економічний ефект, наприклад, для лопатей великогабаритних повітряних турбін. Тому тема кваліфікаційної роботи є актуальною.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є створення ефективного методу оптимального проектування лопатей повітряних установок.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі оптимального проектування лопатей повітряних установок;

– розробити ефективний метод обчислення динамічних характеристик лопатей повітряних установок;

– удосконалити метод нелінійного програмування для визначення оптимальних параметрів лопаті повітряної установки.

Об'єктом дослідження є проектування лопатей повітряних установок з мінімальною вагою.

Предметом дослідження є визначення оптимальних параметрів лопаті повітряної установки.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються методи граничних інтегральних рівнянь, методи нелінійного програмування, методи скінченних та граничних елементів.

Інтенсифікація виробничих технологічних процесів у різних галузях перед'являє підвищені вимоги до конструктивної міцності та економічності машин та апаратів при забезпеченні їх високої продуктивності. Вимоги до підвищення техніко-економічних показників об'єктів і процесів при максимальному використанні міцності і жорсткості ресурсу, зниження матеріаломісткості, вартості та поліпшення інших важливих характеристик при дотриманні конструктивних обмежень часто виявляються суперечливими, а тому дуже проблемними у своїй реалізації. Прискорена наразі зміна подій так чи інакше призводить до проектування нового, а також перепроєктування вже наявного обладнання, враховуючи виникаючі вимоги до створення різних об'єктів, з одного боку, так і накопичений досвід і поява нових обчислювальних засобів, з іншого.

Проектування або вдосконалення об'єктів і процесів різного функціонального призначення передбачає обмежений перебір множини варіантів, що набір бажаних властивостей. Однак варіантний аналіз зазвичай ускладнений, оскільки майже не формалізований і тому достатньо не може використовувати безпосередньо переваги сучасної комп'ютерної техніки та обчислювальних методів.

Створення об'єктів або процесів, що володіють тими чи іншими конкретними властивостями, є головним завданням проектування.

Основою першої частини проектування є структура, якість і функціональне призначення конструкції, а друга частина - відповідальна за характеристики і фізико-математичні зв'язки їх з фіксованими і незалежними керованими параметрами. Конструювання сучасних технічних об'єктів (чи його елементів), і навіть вдосконалення вже створених, ставить перед конструктором численні проблеми, однієї з яких є отримання оптимального проекту, тобто. найбільш вигідного варіанту з множини можливих. При цьому проектувана конструкція (або її окремі елементи) повинна успішно протистояти різним пошкодженням і задовольняти експлуатаційним умовам (надійність), забезпечувати безвідмовну роботу протягом певно встановленого терміну експлуатації (довговічність), доцільно враховувати можливості виготовлення, транспортування та монтажу, зручності експлуатації (технологічність), відповідати сучасним вимогам щодо рівня витрат на матеріали та виготовлення (економічність), а також задовольняти необхідному рівню різноманітних техніко-економічних показників. Безпосередньо до зазначених загальних вимог відносяться фізико-технічні обмеження на міцність, жорсткість, стійкість і на багато інших характеристик конструкції, що висувуються існуючими умовами функціонування проектуваного об'єкта.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на науково-практичній конференції «Молодь і технічний прогрес в АПВ» 26-27 листопада 2024 року, Харків [1].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі оптимального проектування лопатей повітряних установок

Сучасні вітроелектростанції являють собою технічні комплекси, що складаються з великої кількості взаємодіючих вузлів і агрегатів різного призначення. Серед них основне місце займає лопатева система вітряка. Оптимальне проектування цього типу структур використовує процедури пошуку для визначення оптимального набору параметрів, які задовольняють задані обмеження та забезпечують найкраще значення прийнятого критерію оптимальності. Такі процедури добре відомі [2], однак вони мають різну ефективність залежно від змінних умов процесу пошуку оптимальності, і не завжди можна, застосовуючи будь-яку з них окремо, досягти успіху в прийнятний час. У запропонованому дослідженні використовується оригінальний гібридний метод оптимізації. З його реалізацією ефективно вирішуються багатопараметричні задачі нелінійного програмування з урахуванням системного ліміту та функціональних обмежень [3].

Наразі розроблено багато числових методів оцінки динамічних і міцнісних характеристик малих вітрових турбін [4], [5]. Як для оптимального проектування великих, так і для малих турбін зазвичай використовуються два типи обчислювальних методів, а саме: динамічний аналіз і аналіз міцності, а також нелінійне програмування. Для аналізу напружень-деформацій ефективно застосовано методи скінченних [6] і граничних [7] елементів, методи скінченних об'ємів [8], а також методи обчислювальної газової динаміки [9], [10]. Слід згадати деякі ефективні числові методи, що базуються на підході занурення та дослідженні міцності та стабільності аерокосмічної апаратури [11], а також експериментальні дослідження [12].

Сучасні аспекти нелінійного програмування описані в [13]. Ефективний

чисельний метод оптимального проектування із застосуванням до циклічно симетричних структур отримав свій подальший розвиток у [14]. Слід зазначити, що чисельна реалізація методів скінченних і об'ємних елементів, включаючи моделі турбулентності, вимагає значного комп'ютерного часу. Це призводить до труднощів у застосуванні процедур оптимізації, які потребують великої кількості обчислень цільової функції та обмежень. Таким чином, методи граничних елементів [15] та інші методи зі зменшенням сітки [16] для оптимальних проектів конструкцій виходять на перший план.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі оптимального проектування лопатей повітряних установок

Енергоефективність вітроенергетичних систем має великий вплив на економічний аналіз такого роду відновлювані джерела енергії. Ефективність у цих системах залежить від багатьох підсистем: лопатевої, редукторної, електричного генератора і керування. Деякими факторами, що впливають на ефективність лопаті, є особливості вітру, наприклад, його імовірнісний розподіл, механічна взаємодія лопаті з електрогенератором та стратегії що стосується регулювання кроку та швидкості обертання [17]. Це складна проблема, яка включає багато факторів і обмежень. Конструкція оптимальних лопатей передбачає аеродинамічні, структурні проблеми та проблеми керування. Однак, цикл проектування можна практично розглядати як ітеративний і поетапний метод. Для аеродинамічної оптимізації лопаті можна змоделювати як серію секцій уздовж осі кроку. Кожна секція має форму профілю, довжину хорди та кут приєднання, який є результатом спільного кута тангажу та локального кута повороту.

Останнє є властивістю лопаті, тоді як кут нахилу залежить від стратегії керування всією енергією системи. Розрахунок вітрового потоку навколо обертючих лопатей є дуже складною проблемою. Для точного знання вітрового потоку та індукованих сил на поверхнях турбіни необхідно розв'язувати тривимі-

рні рівняння Нав'є-Стокса в системі, що обертається, але обчислювальна вартість отримання такого точного рішення забороняє їх використання в середовищах проектування та аналізу Теорія імпульсу лопатевого елемента в основному одновимірною спрощена теорія, яка регулярно використовується вітроенергетичною промисловістю, оскільки вона забезпечує досить точне прогнозування продуктивності [18]. Теорія, розроблена в [19], показала, що її застосування дає хорошу точність щодо витрат часу при помірних швидкостях вітру цього вистачило для оптимізації геометрії лопаті [20-22]. Теорія імпульсу це композиція двох різних підходів до вивчення сил у вітряній турбіні. Перший сценарій - це підхід, який вивчає миттєві глобальні зміни вітру, осьові та тангенціальні, в ідеальній турбіні. Зміни осьового і обертального моментів створюють тягу і крутний момент відповідно в роторі. Вітровий потік розділяється на багато диференціальних невзаємодіючих кільцевих потокових труб.

Другий сценарій, що відноситься саме до елемента лопаті, вивчає аеродинамічні сили, що діють у локальному аеродинамічному профілі. Як у повітроплаванні, у теорії крил діють підйомна сила, яка перпендикулярна до напрямку вітру, і сила опору, яка діє в тому ж напрямку.

Головним чином опір створюється тертям між в'язкою рідиною та поверхнею профілю. Це дисипативна сила, яка генерує втрату потужності та відсутність змін імпульсу. Застосування товстих профілів поширюється на оцінку продуктивності вітрової турбіни. Добре встановлено, що потужність, що генерується вітром з горизонтальною віссю.

У цій кваліфікаційній роботі було реалізовано дві ефективні чисельні методи. Перший з них — це гіперсингулярний інтегральний метод із реалізацією граничних елементів [23] для отримання динамічних характеристик лопаті, а другий пов'язаний з нелінійним програмуванням [3]. Поєднання цих методів дозволяє розробити нові ефективні методики оптимального проектування лопатей вітрових турбін [24].

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Метою цього дослідження є оптимізація конструкції лопатей повітряних установок з метою мінімізації їхньої маси при забезпеченні необхідної міцності, жорсткості, а також надійності в експлуатації в умовах аеродинамічних та структурних навантажень.

Формальна постановка задачі включає в себе

Вихідні дані:

- геометричні параметри лопатей (довжина, ширина, товщина профілю);
- матеріали, з яких виготовлені лопаті, з відповідними механічними характеристиками (модуль пружності, густина, межа міцності);
- аеродинамічні характеристики та умови експлуатації (швидкість повітряного потоку, тиск, температура, тощо);
- граничні умови та навантаження (статичні, динамічні, циклічні).

Обмеження:

- лопать повинна витримувати максимальні робочі навантаження без утворення тріщин чи інших дефектів;
- частоти власних коливань лопаті повинні бути віддалені від частот робочих режимів, щоб уникнути резонансу;
- загальна маса лопаті повинна бути мінімізована;
- витрати на виготовлення та обслуговування мають бути обґрунтованими з точки зору економічної ефективності.

Критерій оптимальності: мінімізація маси лопаті m при виконанні всіх умов міцності, жорсткості та надійності.

Задача оптимізації може бути вирішена за допомогою чисельних методів, таких як метод скінченних елементів (МСЕ) для аналізу напружено-деформованого стану та власних коливань, а також використання методів оптимізації, наприклад, генетичних алгоритмів або градієнтних методів для знаходження оптимальних параметрів конструкції

Змістовна постановка задачі полягає в наступному.

Ставилася задача знайти лопать найменшої ваги при обмеженнях на напруження $\sigma < [\sigma]$ (границя міцності); перша частота власних коливань ω повинна бути у заданому діапазоні $[\omega_1] \leq \omega \leq [\omega_2]$ для відстроювання від частот власних коливань башти. Крім того, з конструктивних міркувань найбільше переміщення у напрямку осі турбіни не повинно перевищувати значення $[w]$. Варіюваними параметрами є товщини лопаті у розрахункових перетинах.

Лопать моделюється тонкостінним природно закрученим стрижнем змінного поперечного перерізу довжиною L , закріпленим на колесі ВЕУ. Віднесемо його до глобальної декартової системи координат (див. рис.1.1): Z_G – вісь поворотів перерізів; X_G збігається з віссю вітроколеса. Напрямок Y_G такий, що глобальна система координат є правою.

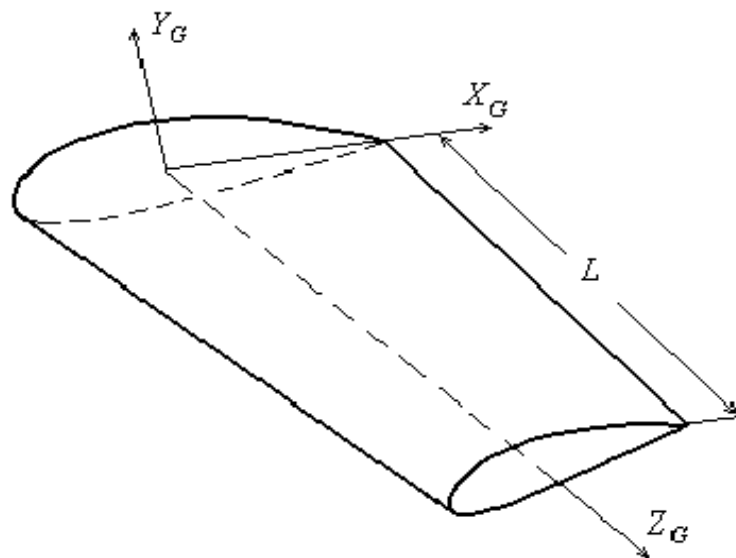


Рисунок 1.1 – Лопать повітряної установки

Геометрія лопаті представлена набором перерізів, у кожному задані такі параметри профілю: координати точок (x, y) зовнішнього контуру; товщина перерізу $h(z)$; товщина лонжерону $h_1(z)$; ширина лонжерону $l(z)$ (рис.1.2). Передбачається, що лопата знаходиться під дією аеродинамічних навантажень та відцентрових сил. Обчислювана аеродинамічна навантаження приводиться до

розподілених поперечних навантажень q_x , q_y і розподіленого крутного моменту m_z .

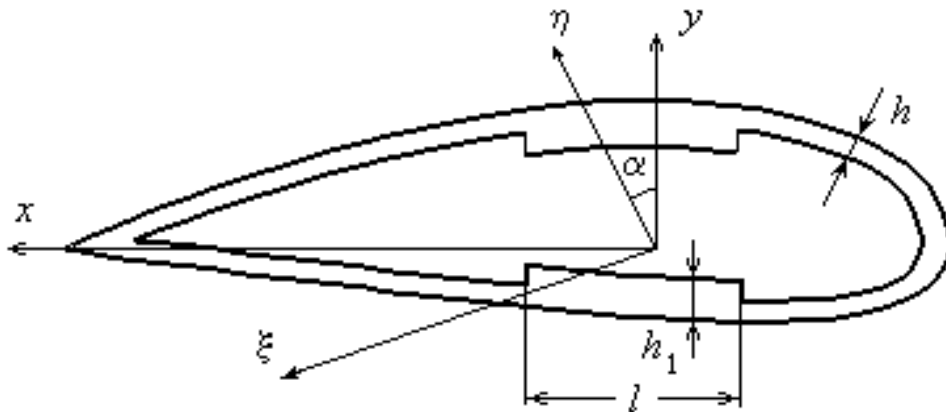


Рисунок 1.2 – Переріз лопаті повітряної установки

Повітряне середовище передбачається ідеальним, стисливим і незв'язаним. Як показано в попередньому пункті, завдання обтікання лопаті можна звести до вирішення гіперсингулярного інтегрального рівняння. Вирішення цього рівняння дозволяє визначити перепад тисків. Задача аеропружності вирішується в незв'язаній постановці: деформації та переміщення вважаються практично не впливають на аеродинамічні сили, що діють на лопать.

Для оптимального проектування конструкцій зазначеного типу необхідно використовувати процедури мінімізації (максимізації) деякої функції цілі шляхом належного вибору параметрів при заданих обмеженнях (самі обмеження є функціями вихідних параметрів).

1.4 Постановка задач дослідження

Опишемо одне з можливих формулювань задачі оптимізації лопаті вітроколеса. Потрібно знайти лопать мінімальної ваги за наступних умов. Під дією стаціонарного аеродинамічного навантаження та відцентрових сил нормальне

переміщення w не повинно перевищувати заданої величини $[w]$, напруження – величини $[S]$; на першу частоту власних коливань також має бути накладено обмеження

$$|\max w^i| \leq [w], [\omega_1] \leq \omega \leq [\omega_2]. \quad (1.1)$$

Функція мети – маса лопаті $m = \rho V$, де ρ – густина матеріалу, V – об'єм лопаті.

Створено базу методів пошуку – гібридентів, що складають гібридну коаліцію. Ефективне досягнення мети забезпечується завдяки спеціальній стратегії введення в дію того чи іншого гібридента, в залежності від ситуації, що створилася на поточний момент, а також корегуванню напрямів пошуку і пошукових кроків, що змінюються у процесі оптимізації.

Лопать промодельована тонкостінним закрученим стрижнем довжиною L змінного поперечного перетину, що знаходиться під дією аеродинамічного і відцентрового навантажень. Аеродинамічне навантаження зумовлено перепадом тиску на зовнішній та внутрішній поверхнях лопаті і зводиться до змінних по довжині навантажень перерізу q_x , q_y та крутильного моменту m_z . Задача обтікання лопаті вирішується у тривимірному формулюванні на основі теорії несучої поверхні. Набігаючий повітряний потік вважається безвихровим, швидкості – у декілька разів меншими за швидкість звуку. Задачу обтікання лопаті зведено до гіперсингулярного рівняння, розв'язком якого з фізичної точки зору є перепад тиску.

Для розрахунку аеродинамічних навантажень лопать моделюється несучою поверхнею кінцевих розмірів S_1 .

На цій поверхні розташований вихровий шар, що сходиться із задньої кромки у вигляді пелени вихорів S_2 , що поширюється у напрямку V_0 потоку, що набігає. При цьому перепад тиску на лопаті визначається із співвідношення Коші-Лагранжа, яке в даному випадку має вигляд

$$\frac{\Delta P}{\rho_0} = -(\text{grad}\Gamma \cdot V_R). \quad (1.2)$$

Розглянемо задачу визначення гідродинамічних навантажень, що виникають на лопаті, яка знаходиться у неоднорідному потоці нестисливої рідини (останнє є коректним, коли швидкості середовища суттєво менші за швидкість звуку). Система диференціальних рівнянь, що описує таку задачу, має вигляд:

$$\Delta\Phi(x,t) = 0, V = \text{grad}\Phi, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial n^\pm} = (V_0 \cdot n) + \frac{\partial w}{\partial t}, x \in S, \quad (1.4)$$

$$P^+ - P^- = -\rho \left[\frac{\partial(\Phi^+ - \Phi^-)}{\partial t} - (\text{grad}(\Phi^+ - \Phi^-) \cdot V_0) \right] = 0, x \in S_s, \quad (1.5)$$

$$\text{grad}\Phi|_\infty = 0, \quad (1.6)$$

де $\Phi(x,t)$ – потенціал збурень швидкості потоку;

рівняння (1.3) – умова нерозривності рідини;

$V_0(x,t)$ – швидкість незбуреного потоку (тобто за умови відсутності лопаті);

w – прогин лопаті;

n – нормаль до серединної поверхні лопаті S .

Рівняння (1.2) – умова непротікання рідини через цю поверхню; рівняння (1.3) означає відсутність перепаду тиску ($P^+ - P^-$) на вихоревій завісі S_s ; рівняння (1.6) – умова спадання збурень Зоммерфельда. Аеродинамічні сили, що виникають на лопаті, знаходяться після визначення потенціалу $\Phi(x,t)$ за допомогою інтеграла Коші-Лагранжа (1.3). Задача (1.3) – (1.6) є допоміжною при розв'язанні задач флатеру, коливань з аеродемпфуванням та коливань із приєднаними масами. В останньому випадку вважається, що $V_0 = 0$, тобто вихрова завіса не збігає з лопаті, і поверхня S_s (разом з відповідними граничними умо-

вами) відсутня. У цьому випадку амплітуда потенціалу $\Phi(x, t)$ розшукується у вигляді

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS, \quad (1.7)$$

де $\Gamma(\xi)$ – невідома густина на S (її фізичний зміст – амплітуда циркуляції швидкості потоку).

Виконання граничних умов призводить до необхідності розв’язання наступного гіперсингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \iint_S \Gamma(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS = f(x). \quad (1.8)$$

Тобто, головні завдання полягають в тому, щоб розробити та удосконалити методи розв’язання гіперсингулярних рівнянь та методи нелінійного проєктування стосовно до задачі оптимального проєктування лопаті повітряної установки.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Методи теорії потенціалу та граничних інтегральних рівнянь

Зупинимось на розв'язанні гіперсингулярного рівняння з використанням методу граничних елементів.

З'ясуємо зміст другого методу (МГЕ), на прикладі рівняння (1.8) у випадку, коли $\Gamma(\xi)$ апроксимується сталими. Нехай область інтегрування в (1.8) апроксимована плоскими трикутними або чотирикутними елементами (або відрізкамі січних – у плоскому випадку) S_k . Нехай $\Gamma(\xi) = \Gamma_k$, коли $\xi \in S_k$, (Γ_k – невідомі сталі). У середині області S_k оберемо точки колокації x_{0k} . СЛАР, що розв'язує дискретний аналог гіперсингулярного рівняння, фактично є умовою виконання цього рівняння у точках x_{0k} .

Гіперсингулярні рівняння виникають при розв'язанні крайових задач механіки та математичної фізики, коли інтегрування ведеться вздовж тонкої поверхні. Такі задачі виникають у теорії тріщин та при обтіканні тонкої поверхні.

Для визначення напружено-деформованого стану пружного тіла використовується система рівнянь еліптичного типу в частинних похідних другого порядку відносно вектору переміщення \mathbf{U} :

$$\mu \Delta U_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \vartheta = \operatorname{div} \mathbf{U}, \quad j = 1, 2, 3,$$

де μ та λ – коефіцієнти Ламе.

Введемо диференціальний оператор поверхневого напруження класичної теорії пружності як:

$$\mathbf{T}^{n(x)} \mathbf{U} = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda n \operatorname{div} \mathbf{U} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}),$$

де \mathbf{n} – одинична зовнішня нормаль до поверхні.

Сформульовано крайову задачу для тривимірного тіла, обмеженого областю Ω та ослабленого розрізами $S_i (i = 1, \dots, n)$, для визначення \mathbf{U} :

$$\Delta U_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}, j = 1, 2, 3, U_i(\mathbf{x}) = u_{i1}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_1, \mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_2,$$

$$(\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) = N_{3i}, (\mathbf{T}^{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}_k(\mathbf{x})) = N_{3i}, \mathbf{x} \in \Omega_2, i = 1, 2. \quad (2.1)$$

Розв'язання крайової задачі (2.1) може бути знайдено за допомогою різних числових методів. Серед них варто відзначити методи скінчених [2] та граничних елементів (МГЕ) [3]; обидва засновані на використанні методу зважених похибок. Далі використано формулювання на основі методу граничних елементів. Однією з ключових особливостей цього методу є використання сингулярних пробних функцій, які задовольняють диференціальне рівняння (2.1) всюди, за винятком однієї сингулярної точки. Таким чином, фундаментальні та сингулярні розв'язки рівняння (2.1) використовуються як пробні функції. Фундаментальний розв'язок теорії пружності отримується при розв'язанні рівняння Ламе з правою частиною у вигляді дельта-функції і подається в матричній формі:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} \right],$$

$$\frac{1}{4\pi} \iint_s \frac{\alpha_3(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dS_y = Mq(\mathbf{x}), M = \frac{1 - \nu}{\mu}.$$

Область інтегрування S розділена на N плоских трикутних та чотирикутних елементів. Розглянуто гіперсингулярний інтеграл по апроксимованій поверхні і отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^N H_{kj} \alpha_{3k} = f(\mathbf{x}_{0j}), j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2)$$

де елементи матриці H_{kj} обчислюються за формулами:

$$H_{kj} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^m \frac{([\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i] \cdot \mathbf{n})}{\|[\mathbf{l}_i \times \mathbf{r}_i]\|^2} \left[\frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1})}{r_{i+1}} - \frac{(\mathbf{l}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i} \right] \cdot \mathbf{r}_k = (x_k - x_0, y_k - y_0, z_k - z_0),$$

$$\mathbf{l}_i = (x_{i+1} - x_i, y_{i+1} - y_i, z_{i+1} - z_i), i = \overline{1, m},$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3), x_{m+1} = x_1, y_{m+1} = y_1, z_{m+1} = z_1, r_k = |\mathbf{r}_k|. \quad (2.3)$$

Цей метод дає змогу проводити розрахунки для областей, що мають довільну форму поверхні інтегрування.

2.2 Методи чисельного розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь

Для порівняння ефективності методів чисельного розв'язку розглянуто задачу визначення невідомої густини гіперсингулярного інтегрального рівняння (6), якщо S – квадрат.

На рис. 2.1 зображені значення густини, що обчислені на середній лінії, для правої частини $f(x_1, x_2) = 1$. Цифрами 1 і 2 позначені розв'язки, що отримані проекційним методом і методом колокацій. Цифрою 3 на рисунку позначено розв'язок, який було отримано за допомогою метода граничних елементів (МГЕ).

Оскільки аналітичний розв'язок рівняння з правою частиною $f(x_1, x_2) = 1$ невідомий, важко оцінити точність отриманих результатів. Тому було розглянуто праву частину $f(x_1, x_2)$ у вигляді

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\xi_1^2 - 1)^2 (\xi_2^2 - 1)^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi_1 d\xi_2.$$

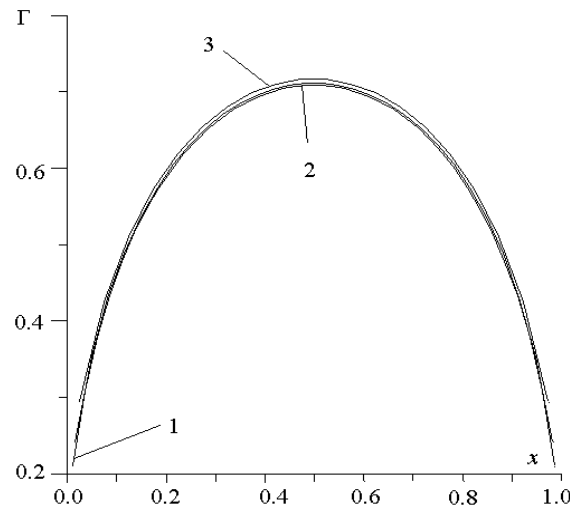


Рисунок 2.1 – Порівняння методів розв’язку ГІР

Розв’язком рівняння (1.7) для квадрату $\{[-1,1] \times [-1,1]\}$ в цьому випадку буде функція $\Gamma(x_1, x_2) = (x_1^2 - 1)^2 (x_2^2 - 1)^2$.

На рис. 2.2 показані значення $\Gamma(x_1, x_2)$ ($x_2 = 0.1$), що отримані аналітично (крива 1) і чисельно (крива 2) при використанні 100 (10×10) граничних елементів зі сталою апроксимацією густини (похибка не перевищує 10^{-3}). Для $x_2 = 0.9$ таку точність без урахування асимптотичної поведінки розв’язку вдалося отримати з використанням 400 (20×20) граничних елементів та збільшенням густини сітки біля межі області інтегрування. З урахуванням асимптотики таку ж точність вдалося досягти при попередній кількості (10×10) елементів. Отримані результати дозволяють зробити практичні висновки про збіжність та її специфіку для методу граничних елементів зі сталою апроксимацією густини.

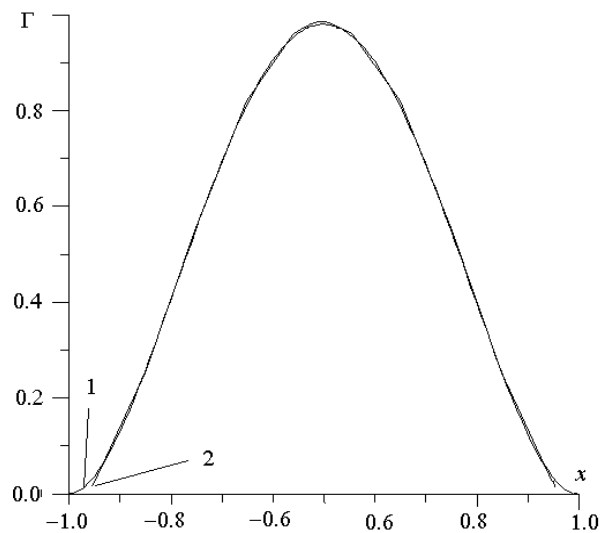


Рисунок 2.2 – Числовий і аналітичний розв'язки

2.3 Методи нелінійного програмування

Методи нелінійного програмування є одним із ключових розділів оптимізації, який зосереджується на пошуку оптимального розв'язку для задач, що мають нелінійні цільові функції та/або обмеження. Цей напрямок є важливим для розв'язання різноманітних практичних проблем, що виникають у багатьох сферах, таких як економіка, інженерія, машинобудування та інші. Зокрема, задачі нелінійного програмування знаходять застосування у галузях, де оптимальні рішення необхідні для управління ресурсами, зменшення витрат або підвищення ефективності виробничих процесів. В нашому випадку – це зменшення ваги лопаті.

Основна мета нелінійного програмування полягає в тому, щоб мінімізувати або максимізувати цільову функцію за наявності обмежень, які можуть також бути нелійними. На відміну від лінійного програмування, де цільова функція та обмеження є лійними, у нелінійних задачах оптимізації математичний опис є значно складнішим, що потребує застосування спеціалізованих методів та алгоритмів. Існують численні підходи до розв'язання таких задач, серед яких варто виділити методи градієнтного спуску, метод Ньютонa, метод мно-

ників Лагранжа, а також еволюційні алгоритми.

Через нелінійний характер таких задач їхнє розв'язання може потребувати значних обчислювальних ресурсів та точного налаштування параметрів алгоритму. Останні досягнення в обчислювальній техніці, а також розвиток сучасних програмних інструментів дозволили значно розширити можливості розв'язання нелінійних задач оптимізації. Тому дослідження у галузі нелінійного програмування залишається актуальним і постійно розвивається.

При оптимальному проектуванні складних багатопараметричних об'єктів типу, що розглядається, зручно скористатися автоматичним гібридним пошуковим методом оптимізації [4], призначеним для відшукування локального оптимального вектора X^* задачі на умовний екстремум.

Проведений аналіз оптимізаційних процедур та особливостей вирішення завдань оптимального проектування показує, що просте накопичення ефективних методів у бібліотеці математичного забезпечення і навіть запровадження діалогового режиму рішення не може забезпечити необхідних умов для оптимізації. Пов'язано це з тим, що задача, що реалізується, заздалегідь не забезпечена відповідним набором ознак, за якими керуюча метапрограма зуміла б ідентифікувати завдання і призначити необхідний метод.

Суть запропонованого методу полягає, загалом, у наступному. Є низка методів-гібридентів, які становлять гібридну коаліцію $\{M_i\}$. Задається критерій Q , який з'ясовує у процесі рішення, який із гібридентів у даній ситуації найефективніше може використовуватися задля досягнення поставленої мети. Вводиться функція керування $u = u(Q)$, що встановлює адаптивну стратегію введення в дію конкретного гібридента $M_k \in \{M_i\}$, $i = 1, \dots, k, \dots, s$ (або групи гібридентів).

Спільні дії гібридентів забезпечують більш ефективно досягнення мети, ніж кожен із гібридентів коаліції окремо. Це досягається шляхом введення спеціального адаптивного управління, яке здійснює одержання векторів мінімізуючої послідовності $\{X\}$, напрямів пошуку Dir та пошукових адаптованих

кроків відповідно до ситуації. Запропонована схема гібридної оптимізації для розв'язання задачі виду (2.1), (2.2) побудована таким чином, що обходиться без будь-яких попередніх перетворень розв'язуваної задачі і не висуває жодних спеціальних вимог до функцій мети $F(X)$ та обмежень $G(X) \geq 0$. Враховується лише використовувана коаліція гібридентів (див. п. 4.1.2) та заздалегідь описується обмежений набір найбільш характерних ситуацій, які можуть виникнути у реальному завданні оптимізації.

Суть запропонованого методу оптимізації полягає в тому, що обрано низку методів-гібридентів M_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Заданий критерій, який з'ясовує в процесі вирішення, який із гібридентів у цій ситуації найбільш ефективно може використовуватися для досягнення поставленої мети. У критерій ситуації Q входить незалежна від методів інформація, яка характеризує ситуацію, що власне змінюється; а саме ознаки структури та метричні параметри простору, де здійснюється пошук; передісторію обчислювального процесу, за якою встановлюється можливе продовження; природу системи функцій, що визначають вирішуване завдання; і т. д.

Далі вводиться функція управління, на основі якої встановлюють адаптивну стратегію введення в дію конкретного гібридента групи гібридентів. Для того, щоб загальна дія гібридентів забезпечувала більш ефективного досягнення мети, ніж кожен з них окремо, запроваджують спеціальне адаптивне управління, яке здійснює одержання мінімізуючої послідовності векторів, напрямів пошуку та пошукових кроків, що адаптуються відповідно до ситуації.

Операцію гібридизації або отримання гібридної точки на k -му етапі процесу можна визначити у вигляді матрично-векторного «добутку»

$$X_k^r = \left(U_j^{(i)} \right) \left(X_j^{(i)} V(r) \right),$$

$$\sum_{i=1}^N U_j^{(i)} = \sum_{j=k-r+1}^N V_j(r) = 1, \quad j = \overline{k-r+1, k}, \quad k \geq r.$$

На кожному кроці процесу проводиться вилучення верхньої та приєднання нижньої рядків матриць і так, що загальна кількість рядків залишається незмінною. Прийнята глибина пам'яті r гібридного методу вимагає деякого знання передісторії процесу, в якому враховується r попередніх наближень, а вектор, що стискає, грає роль механізму послідовного забування старої інформації. Компоненти вектору змінюються за деякими законами від попередніх до поточних. [10, 11] доведено, що гібридний метод може вирішувати широке коло завдань більш ефективно, ніж кожен із згаданих гібридентів.

Запропонована схема гібридної оптимізації для розв'язання задачі нелінійного програмування побудована таким чином, що обходиться без будь-яких попередніх перетворень розв'язуваної задачі та не висуває жодних спеціальних вимог до функцій мети та обмежень. Розглядається лише використовувана коаліція гібридентів і заздалегідь описується обмежений набір найбільш характерних ситуацій, які можуть виникнути у реальному завданні оптимізації.

Розрізнятимемо такі ситуації та їх ознаки.

1. Стаціонарні ситуації: а) розмірність задачі; б) рівень труднообчислюваності системи функцій завдання нелінійного програмування; в) обмеження у вигляді рівностей; г) обмеження у вигляді нерівностей; д) загальна кількість обмежень; е) опуклість (увігнутість) функції мети та обмежень; ж) характерні особливості допустимої галузі; з) дискретність чи безперервність функцій завдання тощо. Названі конкретні ситуації досить стійкі у межах окремо взятої задачі.

2. Динамічні ситуації: а) пологий спуск із плавною зміною напрямку пошуку; б) крутий спуск; в) прямолінійний яр із пологим спуском; г) вигнутий яр; д) спіралеподібний яр; е) еліпсоїдальна яма; ж) змінюється кількість порушених обмежень тощо. Ці ситуації віднесені до динамічних, оскільки вони лише локально стаціонарні, тобто. у міру просування до екстремуму ступінь їхнього прояву постійно змінюється в одній і тій же задачі. За описаним набором ситуацій може бути обрано деяке число відповідних гібридентів, не обов'язково дорівнює кількості ситуацій. Отже, вибір гібридентів вирішено самим користува-

чем програми оптимізації, з передбачуваним набором можливих ситуацій. Природно, у разі гібридів повинні бути, по можливості прості, але досить ефективні пошукові методи.

Для побудованого тут варіанта гібридного методу оптимізації як гібридів прийнято такі методи (або їх модифікації): а) покроковий адаптивний спуск [11]; б) схема Абрамова [11]; в) ярова модифікація [10]; г) метод паралельних дотичних ПАРТАН [12]; д) модифікація методу ковзного допуску [11]; е) січний рух уздовж кордону [13] та ряд прийомів, що враховують ті чи інші прояви описаного набору ситуацій. Серед них відзначимо метод мультистарту [14]. При використанні з безлічі допустимих значень параметрів випадково або детерміновано вибирається деяке підмножина з точок. На кожному i -тому підмножині з випадкової початкової точки робиться локальний спуск до найближчого мінімуму будь-яким локальним методом пошуку.

У гібридному адаптивному методі використання мультистарту здійснюється при переході на нову гіперплощину, рис. 2.3.

Застосований гібридний метод оптимізації відноситься до локальних пошукових. Тому для пошуку глобального мінімуму використано метод мультистарту. При цьому проводиться серія спусків із заздалегідь визначеної множини початкових точок, рівномірно розподілених по області допустимих значень параметрів, що варіюються. Точки локальних екстремумів належать різним околицям області рішень. Проте значення екстремумів у цих точках є близькими. Ця обставина дає можливість вибору оптимального проєкту, використовуючи конструктивні міркування.

В результаті проведеної оптимізації за допомогою розробленого гібридного пошукового методу зменшено масу лопаті повітряної установки.

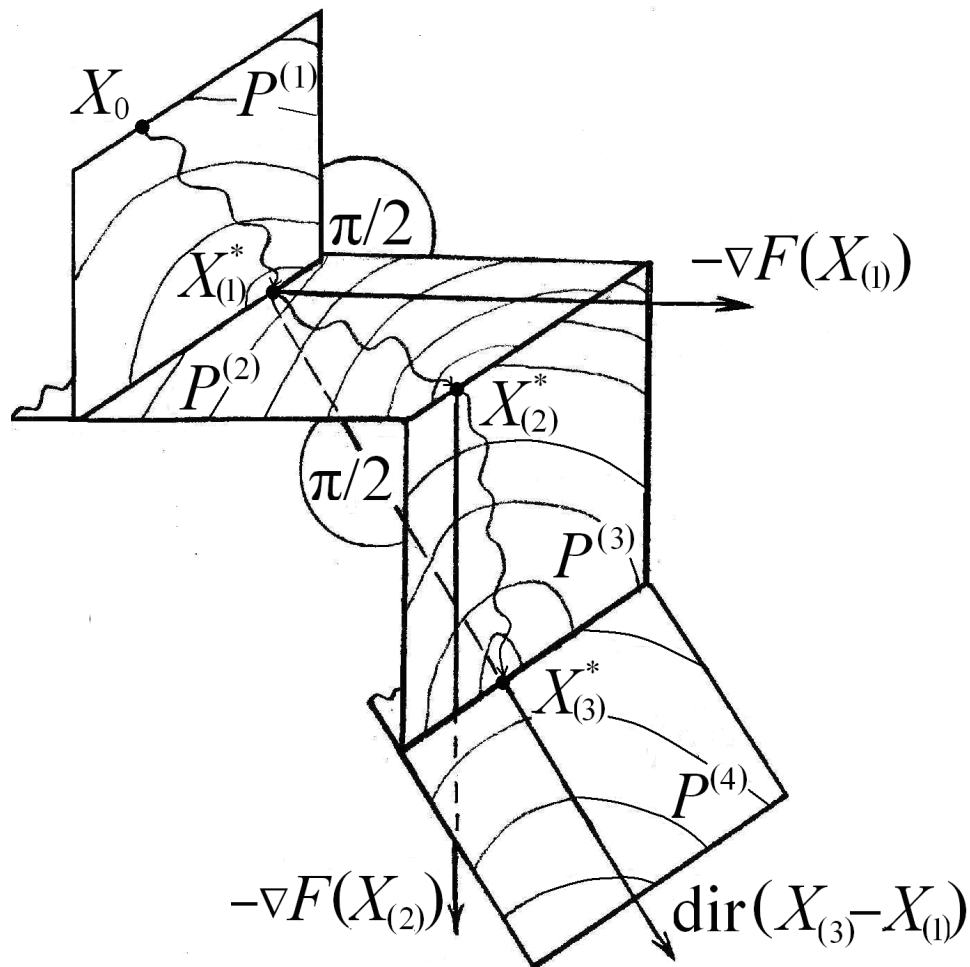


Рисунок 2.3 – Перехід на гіперплощини в просторі пошуку

Висновки за розділом 2

Використання методу граничних елементів (МГЕ) для розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння дозволило точно визначити напружено-деформований стан лопатей повітряних установок. Цей підхід показав високу точність у моделюванні складних граничних умов і дозволив ефективно врахувати вплив навантажень на поверхні конструкції, що свідчить про високу ефективність методу граничних елементів:

Обґрунтування застосування гібридного адаптивного методу оптимізації полягає в такому. Гібридний адаптивний метод оптимізації продемонстрував високу ефективність у пошуку конструкції лопаті з мінімальною вагою, одно-

часно дотримуючись усіх обмежень щодо міцності та жорсткості. Завдяки комбінуванню глобальних і локальних пошукових стратегій цей метод забезпечив швидке зближення до оптимального рішення, що підтверджує його придатність для задач високої складності.

Оптимізація за допомогою обраного методу дозволила значно знизити вагу лопатей, що є критично важливим для підвищення загальної ефективності повітряних установок. Це зниження ваги безпосередньо впливає на зменшення матеріальних витрат і покращення експлуатаційних характеристик, таких як зниження енерговитрат і підвищення надійності.

Обрані числові методи продемонстрували гнучкість і здатність адаптуватися до різних геометричних і матеріальних параметрів лопатей, що дозволяє використовувати їх для широкого спектра конструкцій, забезпечуючи при цьому високу точність і ефективність розрахунків.

Застосування МГЕ та гібридного адаптивного методу оптимізації в проектуванні лопатей підтвердило їхню практичну значимість для інженерної практики. Отримані результати можуть бути безпосередньо використані для проектування сучасних повітряних установок, що відповідають вимогам до надійності та ефективності.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння

Для розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння застосовано метод граничних елементів. При дискретизації цього рівняння була отримана така система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{N_S} H_{kj} \Gamma = f(x_{0j}), j = 1, 2, \dots, N_S.$$

Праві частини цієї системи містять значення навантажень, які діють на лопать повітряної установки. Елементи матриці розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь будуються за формулами (2.3). Обчислення цих елементів здійснює процедура НМАТРИХ, текст якої надано в доданку А. При обчисленні вказаних елементів область інтегрування ділиться на N_s підобластей (граничних елементів). Ці елементи є плоскими багатокутниками. Найчастіше використовуються прямокутні та трикутні граничні елементи. Важливим моментом є побудова відповідності елементів та вузлів інтегрування які належать даному граничному елементу.

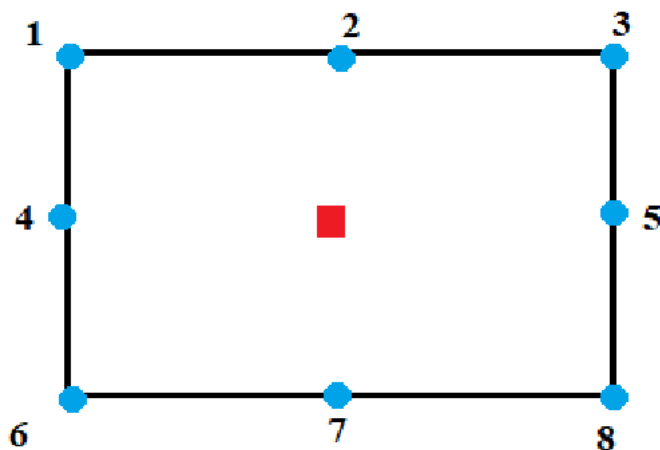


Рисунок 3.1 – Граничний елемент із точками вузлів та точкою колокації

На рис. 3.1 зображено прямокутний плаский граничний елемент. Червоною точкою у центрі елемента позначено точку колокації. Спочатку будуються граничні елементи, їм присвоюються відповідні номери. Потім будується масив відповідності. Якщо на рис. 3.1 зображений перший граничний елемент то перший рядок масиву відповідності має вигляд

1 2 3 4 5 6 7 8.

Тут припускається, що розглядається 8-и вузловий елемент. В кваліфікаційній роботі застосовані граничні елементи із сталою апроксимацією густини вздовж кожного елемента.

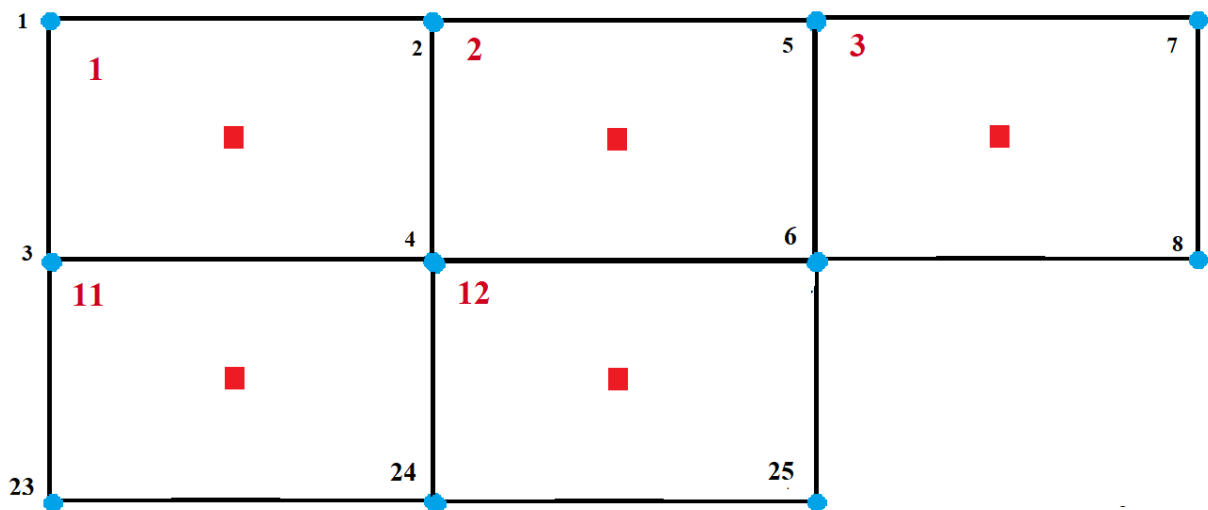


Рисунок 3.2 – Частина сітки граничних елементів
для прямокутного граничного елемента

При цьому перші рядки масиву відповідності мають вигляд

1 1..2..3..4

2 2 5 4 6

3 5..7..6 8

.....

11 3 4 23 24

12 4 6 24 25

Номери контрольних точок співпадають із номерами граничних елементів. Зауважимо, що коли точка колокації знаходиться саме в граничному елементі, то інтеграл існує лише як гіперсингулярний, тобто як граничне значення нормальної похідної потенціалу подвійного шару. Для використання формули (2.3) обчислюємо координати вузлових точок (сині точки на рис. 3.2), координати точок колокації (червоні точки на рис.3.2), компоненти нормалей та дотичних векторів у токах колокації. Для розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння задається праві частини в точках колокації, вони визначаються за заданими навантаженнями.

Після побудови матриці та правих частин розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, що дозволяє отримати аеродинамічні навантаження.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі оптимального проектування лопатей повітряної турбіни

Алгоритм розв'язання задачі оптимального проектування лопатей повітряної турбіни складається з таких частин

Постановка задачі, в яку входять:

- задання геометричних параметрів лопаті;
- задання матеріальних характеристик;
- встановлення граничних умов і зовнішніх навантажень;
- формулювання критеріїв оптимізації (мінімізація ваги) і обмежень (міцність, частоти коливань).

Наступний етап – це розрахунок навантажень за допомогою методу гіперсингулярних інтегральних рівнянь. Для цього виконується

- формулювання гіперсингулярного інтегрального рівняння для моделю-

вання впливу аеродинамічних навантажень на поверхню лопаті.

– використання методу граничних елементів (МГЕ) для числового розв'язання цього рівняння.

Далі йде обчислення розподілу навантажень по поверхні лопаті.

Воно включає аналіз напружено-деформованого стану та власних коливань за методом скінчених елементів (МСЕ):

Для цього робиться створення сіткової моделі лопаті за допомогою методу скінчених елементів.

Далі йде розрахунок напружень і деформацій у кожному елементі сітки, а також визначення власних частот коливань лопаті.

На кожному кроці оптимізації йде перевірка відповідності отриманих напружень і частот обмеженням на міцність і уникнення резонансу.

Останньою працює програма оптимізації параметрів конструкції.

В цій програмі застосовано гібридний адаптивний метод оптимізації для пошуку оптимальних геометричних і матеріальних параметрів лопаті. Це є аналог та предтеча генетичних алгоритмів, бо програма аналізує ситуації, обирає з наявного арсеналу найбільш придатний метод для проведення пошуку локального екстремуму на напрямку.

Метод передбачає використання глобальних пошукових стратегій для знаходження області оптимуму та локальних методів для точного визначення оптимальних значень та адаптивне коригування параметрів алгоритму на основі проміжних результатів для покращення ефективності пошуку.

Після отримання оптимальних параметрів йде перевірка та уточнення моделі. Вона включає перевірку отриманих оптимальних параметрів на відповідність заданим обмеженням.

У разі необхідності повторний розрахунок з коригуванням початкових умов або обмежень (тобто працює метод мульті-старту).

Підсумковий аналіз дає оцінку ефективності оптимальної конструкції з точки зору мінімізації ваги та отримання всіх технічних вимог.

Проведені розрахунки дадуть змогу здійснити підготовку рекомендацій

для практичного застосування отриманих результатів у проектуванні повітряних турбін.

Цей алгоритм забезпечує комплексний підхід до оптимального проектування лопатей повітряних турбін, враховуючи взаємодію аеродинамічних навантажень, механічних властивостей і динамічних характеристик конструкції.

3.3 Опис пакету програм

Програмний пакет містить такі компоненти.

Предпроцесор. Задаються вхідні дані: геометричних параметрів лопаті та її матеріальні характеристики, а саме модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона, межа плинності, навантаження на лопать у заданому наборі точок, а також спектр обмежень га частоти коливань системи.

Першою працює програма HYPER, яка будує матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою підпрограми HMATRIX, здійснює введення правих частин, В цій програмі здійснюється також розбиття розрахункової області на граничні елементи. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) здійснює підпрограма DGELG. Тут використовується метод Гауса із виділенням головного елемента. Після цього в програмі HYPER будуються ті навантаження, що діють на лопать: сили та моменти.

Далі працює програма DYNAMICS, яка будує напруження, деформації в лопаті, а також знаходить власні частоти.

Це перший виклик програми DYNAMICS для того, що оцінити початковий стан лопаті. Можливо, не всі обмеження за міцністю та спектром частот виконані. Це призведе до додаткових труднощів при роботі програми оптимізації HELIX. Якщо обмеження не виконані, то спочатку здійснюється вхід в розрахункову область.

Програма HELIX як допоміжні процедури використовує саме програму DYNAMICS, яку оформлено як процедуру. Ця процедура видає значення функ-

ції мети та обмежень на кожному кроці. Тут задіяно декілька засобів зупинення розрахунків, а саме за близькими значеннями функції мети на кроках, за малими значеннями норми градієнту, знайденого числовим способом, а також за кількістю кроків пошуку.

Постпроцесор. Йде перевірка та уточнення моделі. Вона включає перевірку отриманих оптимальних параметрів на відповідність заданим обмеженням. Видаються оптимальні параметри та значення функції мети.

Висновки за розділом 3

Програмний пакет для розв'язання задачі оптимального проєктування лопатей повітряних турбін демонструє комплексний підхід до моделювання та оптимізації конструкції. Основні компоненти пакета, такі як предпроцесор, основні обчислювальні модулі (HYPER, DYNAMICS, HELIX) та постпроцесор, забезпечують ефективне виконання всіх етапів розрахунків, від введення початкових даних до отримання оптимальних параметрів.

Предпроцесор дозволяє задати необхідні вхідні дані, включаючи геометричні параметри лопаті, матеріальні характеристики та спектр обмежень, що забезпечує гнучкість у налаштуванні моделі під різні сценарії експлуатації.

Програма HYPER з підпрограмою HMATRIX здійснює побудову матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь і розбиття розрахункової області на граничні елементи. Підпрограма DGELG ефективно розв'язує СЛАР методом Гауса з виділенням головного елемента, що забезпечує високу точність визначення навантажень на лопать.

Програма DYNAMICS проводить розрахунок напружень, деформацій та власних частот, оцінюючи початковий стан лопаті. Це дозволяє своєчасно виявити невідповідності обмеженням і підготувати дані для подальшої оптимізації.

Програма HELIX використовує DYNAMICS як підпроцедуру для обчислення функції мети та обмежень на кожному кроці оптимізації. Гібридний ада-

птивний підхід у HELIX забезпечує ефективне досягнення оптимальних параметрів за рахунок кількох критеріїв зупинки розрахунків, що підвищує стабільність і точність пошуку.

Постпроцесор завершує цикл обчислень, перевіряючи відповідність отриманих параметрів заданим обмеженням і надаючи оптимальні значення, що дозволяє завершити процес з впевненістю у правильності результатів.

Загалом, програмна реалізація забезпечує надійний і ефективний інструмент для оптимального проєктування лопатей повітряних турбін, інтегруючи чисельні методи та алгоритми оптимізації для досягнення найкращих результатів у заданих умовах.

Застосування методу гіперсингулярних інтегральних рівнянь у програмі HYPER дозволило точно моделювати складні аеродинамічні навантаження, що діють на лопать. Використання методу скінчених елементів у DYNAMICS забезпечило детальний аналіз напружено-деформованого стану та динамічних характеристик лопаті, дозволяючи враховувати складну геометрію та матеріальні особливості. Гібридний адаптивний метод оптимізації, реалізований у програмі HELIX, значно прискорив процес пошуку оптимальних параметрів, забезпечуючи при цьому високу точність результатів. Поєднання цих числових методів забезпечило ефективне вирішення задачі оптимального проєктування з мінімальними витратами обчислювальних ресурсів і високою надійністю отриманих рішень.

Обрані числові методи не тільки забезпечують точність і надійність розрахунків, але й оптимізують обчислювальні ресурси, що є важливим для великих інженерних завдань.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

4.1 Обчислювальний експеримент для знаходження динамічних характеристик лопаті

Побудовані математичні моделі для визначення перепаду тиску, що діє на тонку поверхню в потоці рідини або газу. Ці моделі дають змогу вирішити задачу визначення аеродинамічних навантажень, що діють на лопаті повітряної енергетичної турбіни. Лопать промодельована тонкостінним закрученим стрижнем довжиною L змінного поперечного перетину, що знаходиться під дією аеродинамічного і відцентрового навантажень. Аеродинамічне навантаження зумовлено перепадом тиску на зовнішній та внутрішній поверхнях лопаті і зводиться до змінних по довжині навантажень перерізу q_x , q_y та крутильного моменту m_z . Задача обтікання лопаті вирішується у тривимірному формулюванні на основі теорії несучої поверхні. Набігаючий повітряний потік вважається безвихровим, швидкості – у декілька разів меншими за швидкість звуку. Задачу обтікання лопаті зведено до гіперсингулярного рівняння, розв'язком якого з фізичної точки зору є перепад тиску.

Лопаті ВЕУ являють собою тонкі крила скінченного розмаху.

Тому як тестові далі вирішені завдання визначення аеродинамічних похідних для таких крил.

Крила кінцевого розмаху, моделюватимемо прямокутними пластинами, що займають область $S = \{-b < x < b; -1 < z < 1\}$. У цьому випадку одинична нормаль до S має вигляд $n = (0, 1, 0)$.

Для обчислення коефіцієнтів аеродинамічних похідних тонких крил кінцевого розмаху необхідно визначити приєднані маси крила.

Приєднаними масами називаються величини, що визначаються за формулами

$$\lambda_{ik} = -2\rho \iint_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (i, k = 1, 2, \dots, 6), \quad (4.1)$$

де ρ – густина рідини;

φ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) – є зникаючими на нескінченості гармонічними функціями, що задовольняють таким граничним умовам на S :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mathbf{n}} = 1; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial \mathbf{n}} = -z; \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial \mathbf{n}} = 0; \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial \mathbf{n}} = x.$$

Визначимо функції φ_i ($i = 2, 4, 6$), з гіперсингулярних рівнянь:

$$\frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_i(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x \partial \mathbf{n}_\xi} \frac{1}{|x - \xi|} dS = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{n}}. \quad (4.2)$$

Тоді

$$\Delta c_y^{\dot{\alpha}} = 2k_{22}; \quad \Delta m_z^{\dot{\alpha}} = 2k_{26}; \quad \Delta m_z^{\dot{\omega}_z} = 2k_{66}; \quad \Delta m_x^{\dot{\omega}_x} = -\frac{32b}{3l} k_{44}.$$

Для числового розв'язання рівняння (4.2) невідома інтенсивність $\Gamma(x, y)$ розшукувалася у вигляді ряду за задалегідь заданими, лінійно-незалежними функціями з заданою асимптотикою на межі S , що визначаються за формулами (2.3). Задачу зведено до розв'язання системи лінійних рівнянь алгебри. Елементи матриці обчислювалися за формулами [24]. Число підобластей інтегрування S приймалося рівним $N_s = 10 \times 10$. У кожній сингулярній підобласті гіперсингулярні інтеграли визначалися аналітично, а інтеграли в несингулярних областях – з використанням три-очкових квадратур Гауса.

Кількість базисних функцій обиралася на основі наступного правила –

$n \times m = 12, (n = 1, \dots, 4, m = 1, \dots, 3)$. Для розв'язання системи рівнянь алгебри використовувався проєкційний метод, що дозволило не пов'язувати число підобластей інтегрування з кількістю базисних функцій. Збільшення значень N_S, n, m не призвело до суттєвої зміни результатів. Результати розрахунку представлені у табл.4.1 – 4.2.

Таблиця 4.1 – Порівняння даних розрахунків та експерименту

$\lambda = l/b$	Експеримент [25]	Розрахунок [25]	Розрахунок за запропонованою методикою
1.0	0.875	0.802	0.856
2.0	1.200	1.150	1.200
3.0	1.200	1.210	1.300
4.0	1.300	1.270	1.370
2.0	1.410	1.320	1.420
6.0	1.500	1.381	1.450
7.0	–	1.392	1.500
8.0	1.550	1.395	1.570
9.0	–	1.410	1.571

Аналіз чисельних результатів показав, що запропонований підхід дає задовільний збіг з результатами роботи [25] і краще, ніж у [25] збіг з експериментальними даними.

Такий метод є досить ефективним, коли область виконання рівняння (6) є прямокутником у деякій, наприклад, косокутній або полярній системах координат. Для цього підходу запроваджено також проєкційний варіант (типу методу Гальоркіна), при цьому матриця СЛАР утворюється при подвійному інтегруванні по області S (тобто інтеграли в матриці СЛАР є чотирикратними).

Далі переходимо до розрахунку напружено-деформованого тану лопаті під дією заданих навантажень.

Таблиця 4.2 – Порівняння даних розрахунків та експерименту для коефіцієнта під'ємної сили

$\lambda = l / b$	Експеримент [25]	Розрахунок [25]	Розрахунок за запропонованою методикою
1.0	-	-0.13	-0.160
2.0	-0.12	-0.11	-0.120
3.0	-0.11	-0.09	-0.110
4.0	-0.08	-0.08	-0.080
2.0	-0.07	-0.06	-0.070
6.0	-0.06	-0.05	-0.060
7.0	-	-0.04	-0.055
8.0	-	-0.04	-0.052
9.0	-0.05	-0.04	-0.050

Лопать промодельована тонкостінним закрученим стрижнем довжиною L змінного поперечного перетину, що знаходиться під дією аеродинамічного і відцентрового навантажень. Аеродинамічне навантаження зумовлено перепадом тиску на зовнішній та внутрішній поверхнях лопаті і зводиться до змінних по довжині навантажень перерізу q_x , q_y та крутильного моменту m_z . Задача обтікання лопаті вирішується у тривимірному формулюванні на основі теорії несучої поверхні. Набігаючий повітряний потік вважається безвихровим, швидкості – у декілька разів меншими за швидкість звуку. Задачу обтікання лопаті зведено до гіперсингулярного рівняння, розв'язком якого з фізичної точки зору є перепад тиску. Розрахунок пружних характеристик лопатей проводився на основі теорії природно закручених стрижнів.

Визначимо НДС лопаті під дією аеродинамічних та відцентрових навантажень. Тут використані методи та алгоритми, розроблені в [4] і [5] і розвинені стосовно розрахунку аеродинамічних навантажень на лопаті ВЕУ в [6].

Переміщення поперечного перерізу можна представити як поступальне переміщення центру вигину та поворот перерізу щодо центру вигину.

На рис. 4.1, 4.2 наведено графіки розподілу поперечних навантажень та крутного моменту по довжині лопаті.

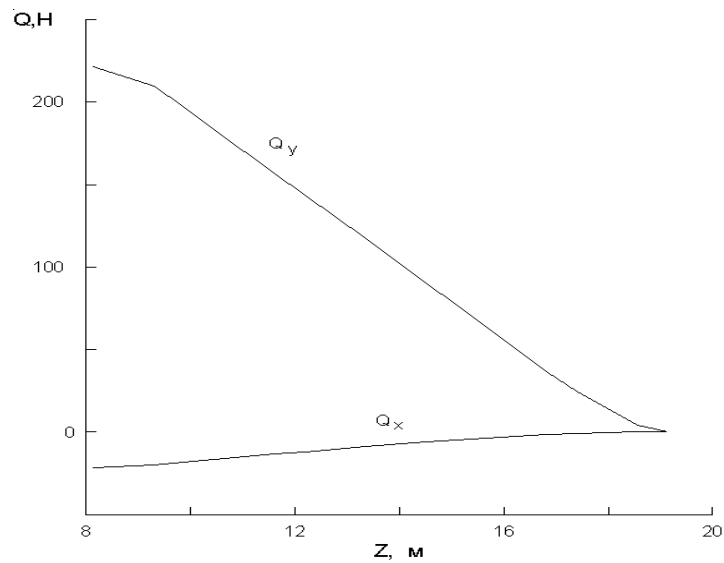


Рисунок 4.1 – Поперечне навантаження

Максимальні переміщення u у площині обертання вітроколеса, нормальні до осі OZ , склали 160.9 см. Максимальні згинальні напруження виникають у циліндричній частині подовжувача та досягають 290.8 МПа, у кореневому перерізі лопаті напруження 73.8 МПа

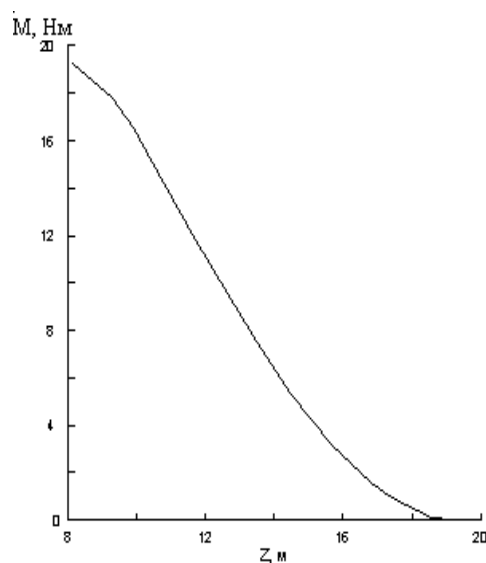
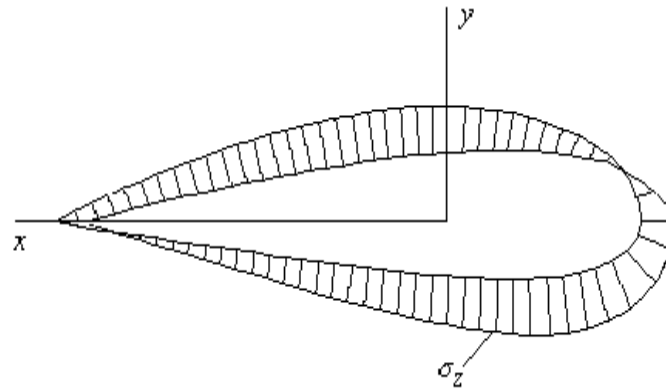


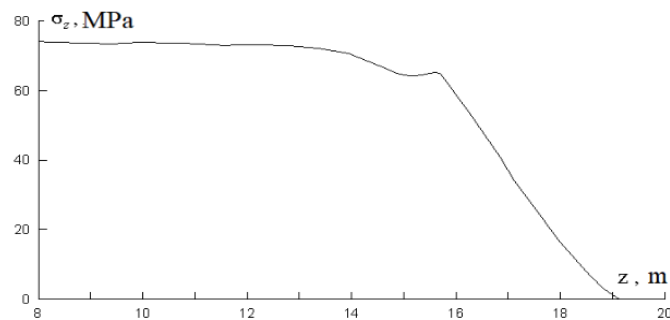
Рисунок 4.2 – Крутний момент

Розглянуто також задачу флатера та виявлено, що для цієї лопаті він виникає при швидкостях, суттєво більших V_0 .

Розподіл напружень по поперечному перерізу лопаті та вздовж осі лопаті продемонстровано на рис.4.3а), 4.3б).



а)



б)

Рисунок 4.3 – Розподіл напружень

Зауважимо, що на більшій частині лопаті напруження σ_z майже постійні, рис. 4.3б). Такий результат отримано завдяки змінності параметрів поперечного перерізу по довжині лопаті. Після оцінки аеродинамічних навантажень визначено напружено-деформований стан лопаті, а також частоти вільних коливань згідно з [4]. Переміщення поперечного перерізу представлено у вигляді поступальних переміщень центру згину та обертання перерізу відносно центру згину.

4.2 Обчислювальний експеримент з оптимального проектування

Для отримання оптимальної конструкції була розглянута лопатка вітрогенератора з такими параметрами: $L=4$ м, модуль пружності $E=5 \cdot 10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,3$, густина матеріалу $\rho=1.6 \cdot 10^3$ кг/м³, швидкість обертання вітроколеса $\Omega=20$ об/хв, швидкість вітру 10 м/с, $[\sigma]=200$ МПа, діапазон частот $[\omega_1]=0,1$ Гц, $[\omega_2]=10$ Гц. Ширина лопаті коливалася від 1 м до 0,6 м.

У процесі вирішення задачі визначено поля переміщень і напружень у лопаті під дією аеродинамічних навантажень. Кількість перерізів прийнято рівною 28.

Максимальне переміщення в площині обертання вітроколеса, нормальної до осі OZ, становить 28,5 см, максимальні згинальні напруження в кореневій частині лопаті – 12,8 МПа, перша частота власних коливань – 2,28 Гц. У таблиці 4.3 наведені результати розв'язання оптимізаційної задачі для серії лопатевих секцій Zi. Наведено вихідні значення товщини в перерізах h_0 та оптимальні параметри h^* . У початковому варіанті маса лопаті дорівнювала 19,38 кг.

Таблиця 4.3 – Початкові та оптимальні значення товщин у перерізах

Номер перерізу	Координати z, м	Початкові товщини, мм	Оптимальні товщини, мм
1	0.800	6.0	5.04
2	1.236	5.6	4.73
3	1.818	5.0	4.21
4	2.400	4.4	3.67
5	2.836	4.0	3.25
6	3.564	3.2	2.41
7	4.000	3.0	2.19

В результаті оптимізації отримано клинок вагою 16,64 кг. Єдиним діючим обмеженням було зміщення леза. Власна частота коливань була незначно змінена в процесі підрахунку, ця зміна не порушувала зазначених обмежень. Таким чином, методи розрахунку аеродинамічних навантажень та аналізу напружено-деформованого стану лопаток ВЕУ показали високу ефективність і точність, що дозволило формулювати та розв'язувати оптимізаційні задачі, які потребують повторних перевірочних розрахунків. За допомогою розробленого власного гібридного адаптивного методу вирішено проблему оптимізації ваги лопатей вітроенергетичної установки (ВЕУ).

Висновки за розділом 4

Запропоновано ефективний метод оптимізації ваги лопатей вітрових турбін. Розроблено математичну модель для визначення тиску повітря на лопаті вітрової турбіни на основі методу гіперсингулярних інтегральних рівнянь, та методу граничних елементів для його чисельної реалізації. Передбачається, що невідомі густини є постійними вздовж елементів. Для розв'язання задачі вагової оптимізації лопаті застосовано адаптивний гібридний метод нелінійного програмування.

У цьому дослідженні розроблено нову версію методу розв'язування задач нелінійного програмування, що базується на застосуванні комбінації різних методів оптимізації, які включаються в процес шляхом впровадження адаптивного керування. Проведено оцінку напружено-деформованого стану і коливань лопаті повітряної установки, що дозволило зменшити її вагу при дотриманні конструктивних і міцнісних обмежень. Основною перевагою практичного застосування нової конструкції лопатей може стати збільшення терміну служби лопатей і мінімізація впливу на навколишнє середовище вітрових електростанцій у разі їх передчасного руйнування під дією вітрових навантажень і опадів.

Подальші дослідження в даній області стосуватимуться застосування нових інноваційних композиційних матеріалів для виготовлення лопатей вітрових турбін . Це дозволить сконструювати лопаті вітрових турбін з покращеними механічними характеристиками. Запропонований підхід також буде узагальнено для міцності та динамічного аналізу вітрових турбін з вертикальною віссю обертання з оптимізацією їх ваги.

ВИСНОВКИ

Запропоновано методику розрахунку оптимальних параметрів лопаті повітряної установки, засновану на використанні гіперсингулярних інтегральних рівнянь та гібридного адаптивного методу оптимізації. Гіперсингулярні інтегральні рівняння були використані для визначення динамічного тиску на лопаті. Скінченну частину гіперсингулярного інтеграла отримано аналітично за довільним плоским багатокутником. Розроблено нову версію методу нелінійного програмування, засновану на використанні адаптивного управління процедурою оптимізації. Проведені дослідження з оптимального проектування лопатей повітряних установок продемонструвала ефективність застосованих числових методів у досягненні поставлених цілей. Використання методу гіперсингулярних інтегральних рівнянь для обчислення навантажень, методу скінчених елементів для визначення напружень і частот коливань, а також гібридного адаптивного методу оптимізації для пошуку оптимальних параметрів, дозволило отримати конструкцію лопатей з мінімальною вагою, що відповідає всім технічним обмеженням. Результати відповідають сучасному рівню наукових і технічних знань, підтверджуючи їхню актуальність і ефективність у проектуванні складних аеродинамічних систем.

Ступінь впровадження та можливі галузі застосування:

Розроблені методи та програмне забезпечення можуть бути впроваджені у виробництво для оптимального проектування лопатей повітряних турбін, вентиляторів, компресорів та інших аеродинамічних систем. Вони мають значний потенціал для використання у авіаційній, енергетичній, автомобільній промисловості, а також у проєктах із розробки нових технологій вітроенергетики.

Наукова, науково-технічна, соціально-економічна значущість:

Наукова значущість роботи полягає у розробці нових підходів до оптимізації аеродинамічних конструкцій із застосуванням передових числових методів. Науково-технічна значущість полягає у створенні програмного забезпечення, яке може використовуватись для розробки ефективних конструкцій із пок-

ращеними експлуатаційними характеристиками. Соціально-економічна значущість проявляється у можливості зменшення витрат на матеріали та підвищення енергоефективності установок, що сприяє зниженню витрат на експлуатацію та обслуговування.

Доцільність продовження досліджень:

Продовження досліджень за відповідною тематикою є доцільним, оскільки подальший розвиток методів оптимізації та числового моделювання дозволить покращити точність і швидкість розрахунків. Дослідження можуть бути спрямовані на оптимізацію конструкцій із використанням нових матеріалів, інтеграцію додаткових факторів, таких як температурні навантаження, та розробку більш універсальних підходів, що враховують мультифізичні процеси. Це відкриє нові можливості для вдосконалення аеродинамічних систем та розширення сфери їх застосування.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Сичов А. Розвинення методів оптимального проектування лопатей повітряних установок. *Молодь і технічний прогрес в АПВ* : матеріали міжнародної науково-практичної конференції. Харків : ДБТУ, 2024. С. 424.
2. Two-Stage Optimization of Laminated Composite Elements with Minimal Mass / N. Smetankina, O. Semenets, A. Merkulova [and others]. *Smart Technologies in Urban Engineering. STUE. Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022. V. 536. P. 84-90.
3. Shape optimization of two turbine stages using the deformed polyhedron method and a three-dimensional RANS solver / S. Yershov, A. Rusanov, A. Shapochka [and others]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*. 2002. V. 216 (2). P. 203–213.
4. Small wind turbine effectiveness in the urban environment / L. Battisti, E. Benini, A. Brighenti [and others]. *Renew. Energy*. 2018. V. 129. P. 102–113.
5. Sierikova O., Strelnikova E., Degtyariov K. Numerical Simulation of Strength and Aerodynamic Characteristics of Small Wind Turbine Blades. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds) *Integrated Computer Technologies in Mechanical Engineering - 2022. ICTM 2022*. Lecture Notes in Networks and Systems. Springer, Cham. 2023. V. 657. P. 357-370.
6. Kolodiazhna L., Bykov Y. Aeroelastic Characteristics of Rotor Blades of Last Stage of a Powerful Steam Turbine. *J. of Mech. Eng.* 2023. V. 26(1). P. 6-14.
7. Sierikova O., 2024. *The Fundamentals of Boundary Element Methods*. NY: “Nova Science Publishers, Inc”, 2024. P. 150
8. Tip leakage / main flow interactions in multi-stage HP turbines with short-height blading / Lampart P., Yershov S., Rusanov A., Szymaniak M.. *Proceedings of the ASME Turbo Expo 2004*. 2004. V. 5. P. 1359–1367.
9. A Short Review on RANS Turbulence Models / Yusof S. N. A., Asako Y., Sidik N. A. C., Mohamed S. B., Mohd W., Japar A. A. *CFD Letters*. 2020. V. 12(11). P. 83-96.

10. Full-Field Modal Analysis by Using Digital Image Correlation Technique / Mastrodicasa D., Di Lorenzo E., Manzato S., Guillaume P. *Rotating Machinery, Optical Methods & Scanning LDV Methods*. 2022. V. 6. P. 205-201.
11. Umbricht G.F., Rubio D. Optimal Estimation of Thermal Diffusivity in a Thermal Energy Transfer Problem with Heat Generation, Convection Dissipation and Lateral Heat Flow. *WSEAS Transactions on fluid mechanics*. 2021. V.16. P. 232-238.
12. Development and experimental validation of real fluid models for CFD calculation of ORC and steam turbine flows / Rusanov A., Rusanov R., Klonowicz P., Lampart P., Zywica G., Borsukiewicz A. 2021. *Materials*, 14(22). P. 6879.
13. Sheludko G., Ugrimov S. The localization method of extremum points for unimodal function. *Journal of Mechanical Engineering*. 2016. V. 19(1). P. 43-54.
14. Misura S., Smetankina N., Misiura I. Optimal design of the cyclically symmetrical structure under static load. In: Nechyporuk, M., Pavlikov, V., Kritskiy, D. (eds.) *ICTM 2020. LNNS*. 2021. V. 188. P. 256–266.
15. Acoustic simulation using singular boundary method based on loop subdivision surfaces: A seamless integration of CAD and CAE / Liu H., Wang F., Qiu L., Chi C. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2024. V. 158. P. 97-106.
16. Eisa S.A. Nonlinear Modeling, Analysis and Simulation of Wind Turbine Control System with and without Pitch Control as in Industry. *Advanced Control and Optimization Paradigms for Wind Energy Systems, Power Systems*. Singapore: Springer. P. 1-40.
17. Maalawi K.Y., Badr M.A.. A practical approach for selecting optimum wind rotors, *Renewable Energy*. 2003. V. 28. P. 803-822.
18. Tangler J.L. The Nebulous art of using wind-tunnel airfoil data for predicting rotor Performance, 2002. V. 5. P. 245-257.
19. Thresher R.W., Dodge D.M. Trends in the evolution of wind turbine generator configurations and systems. *Wind Energy*. 1998. V. 1. P. 70–86.
20. Duquette M.M., Visser K.D. Numerical implications of solidity and blade number on rotor performance of horizontal-axis wind turbines. *J. Sol. Energy Eng.-Trans, ASME*. 2003. V. 125. P. 425–432.

21. Fuglsang P., Madsen H.A. Optimization method for wind turbine rotors. *J. Wind Eng, Ind. Aerodyn.* 1999. V. 80. P. 191–206.
22. Jureczko M., Pawlak M., Mezyk A. Optimisation of wind turbine blades. *J. Mater, Proc. Technol.* 2005. V. 167. P. 463–471.
23. Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis / Gnitko V., Karaiev A., Degtyariov K., Vierushkin I., Strelnikova E. *WIT Transactions on Engineering Sciences.* 2022. V. 34. P. 67-79.
24. Rzadkowski R., Gnesin V., Kolodyazhnaya L. Aeroelasticity Analysis of Unsteady Rotor Blade Forces and Displacements in LP Last Stage Steam Turbine with Various Pressure Distributions the Stage Exit. *J. Vib. Eng. Technol.* 2018. V. 6. P. 333–337.
25. Mahmuddin F. Rotor Blade Performance Analysis with Blade Element Momentum Theory. *Energy Procedia.* 2017. V. 105. P. 1123–1129.