

## ОБ УТОЧНЕННОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПРИБОРАХ

Моделирование электронных приборов в последнее десятилетие характеризуется все большим уровнем физичности самих моделей, т.е. учетом все большего числа принципиальных важных факторов, а также все более совершенным набором используемых вычислительных методов и алгоритмов. В электронике СВЧ, в частности, в релятивистской очевидна тенденция к анализу трехмерных эффектов в пространстве взаимодействия при учете реальных сложных конфигураций приборов. К указанным эффектам в релятивистской электронике относятся, в первую очередь, учёт собственного магнитного поля частиц, ВЧ-магнитного поля, плазменных образований, особенностей эмиссии и т.д.

Подобное усложнение задачи по сравнению с ранее применявшейся методикой целесообразно, хотя и трудоемко. Прежде такие модели не получили широкого распространения в связи с высокими требованиями к объему памяти и быстродействию ЭВМ. Сейчас большинство задач микро-, опто- и СВЧ-электроники можно строго решить напрямую с помощью уравнений Максвелла в обход ограничений приближенных методов.

Практически во всех известных моделях приборов магнетронного типа [1-5], основанных на методе крупных частиц, в связи со сложностью расчёта потенциала для реальной конфигурации электродов в приборе, используется приближение цилиндрической конструкции магнетрона, где поле пространственного заряда при решении уравнения Пуассона рассчитывается в цилиндрической области, ограниченной торцевыми электродами, находящимися под катодным потенциалом. Влияние разрезанности анода на электрическое поле учитывается лишь в некоторых моделях, а именно: по приближенным формулам – в моделях [5], структурным методом (решение уравнения Лапласа) – в работе [6] или подбором аналитической функции – в работе [7]. Согласно данным [8] неоднородность электростатического поля (у разрезанного анода) в реальном приборе оказывает сильное возмущающее действие на траектории электронов, что говорит о важности расчёта этого явления. Кроме того, важен расчёт эффекта от попадания частиц в резонаторы, а значит и вторичной эмиссией с резонаторов (согласно [9] этот эффект оказывает ощутимое влияние на характеристики прибора). Более того, из-за конструктивных особенностей обычных магнетронов, во всех упомянутых моделях отсутствует расчет в приосевой области (для релятивистских приборов примерами таких областей могут служить труба дрейфа, часть пространства взаимодействия для случая магнетрона с шайбовым или коротким катодом, либо коаксиальный резонатор в обращенном магнетроне – конструкцию см. [10]).

Значит, для адекватности электродинамической трехмерной модели реальному прибору при решении уравнения Пуассона необходимо максимально учитывать конфигурацию пространства взаимодействия, что говорит о недостаточности использовавшегося ранее цилиндрического приближения.

Для расчёта в областях сложной формы существует принципиальная возможность применения метода Хокни [1, 2, 4, 11], но этот метод налагает трудноразрешимые требования к граничным условиям (применим только в прямоугольных областях), хотя и имеет в десятки раз большее быстродействие. Поэтому для полноценного учёта всех конструктивных особенностей прибора выбран трёхмерный метод конечных разностей, позволяющий проводить расчёты в областях произвольной формы.

Оценим способы, которыми может быть реализован фактически выбранный метод конечных разностей в цилиндрической конструкции, характерной для микроволновых приборов магнетронного типа.

## 1. Решение уравнения Пуассона в цилиндрической системе координат при $r=0$

Трёхмерный метод конечных разностей связан с аппроксимацией исходной области электрического поля трёхмерной сеточной областью и заменой дифференциального уравнения соответствующим ему уравнением в конечных разностях, которое получается заменой частных производных их приближенными выражениями через конечные разности, использующими лишь значения функции в выбранных узлах.

Рассмотрим уравнение Пуассона в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1)$$

Видно, что для расчёта на оси оно не применимо в связи с наличием членов, пропорциональных  $1/r$ , а, значит, и разностный аналог так же неприменим. Решение проблемы лежит либо в переходе на оси в декартову систему координат (СК), либо в применении теоремы Гаусса.

**1.1. Применение декартовой СК.** Уравнение Пуассона в конечных разностях для декартовой СК имеет вид

$$\frac{U_{i+1,k,l} - 2 \cdot U_{i,k,l} + U_{i-1,k,l}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,k+1,l} - 2 \cdot U_{i,k,l} + U_{i,k-1,l}}{\Delta y^2} + \frac{U_{i,k,l+1} - 2 \cdot U_{i,k,l} + U_{i,k,l-1}}{\Delta z^2} = -\frac{\rho_{i,k,l}}{\varepsilon_0}, \quad (2)$$

где  $i, k, l$  – индексы, соответствующие координатам  $x, y$  и  $z$ .

Рассмотрим пространственную решётку в цилиндрической СК с индексацией узлов  $U_{i,k,l}$ , где индексы  $i, k, l$  соответствуют координатам  $\varphi, r$  и  $z$ . Для перехода в декартову СК необходимо на ближайшем к оси радиусе выбрать четыре узла с угловой мерой, отвечающей условию:

$$\varphi_i = \varphi_{0w\dot{e}} + \frac{\pi}{2} \cdot p, \quad (3)$$

где  $\varphi_{0w\dot{e}}$  – произвольный угол;

$p = 0, 1, 2, 3$  – номер выбранного узла,

или, что то же самое, эти узлы должны попарно лежать на взаимно перпендикулярных прямых (см. рис. 1 а). Иначе, формально необходимо выбрать оси ОХ, ОУ декартовой СК. Из рис.1 ясно, что  $\Delta x = \Delta r$  и  $\Delta y = \Delta r$ . Точное соответствие реальных узлов решетки условию (3) возможно лишь для случая, когда количество узлов решётки по  $\varphi$  кратно 4 (т.е.  $N_\varphi = 4m$ , где  $m = 1, 2, \dots$ ), иначе подобный перенос значений из цилиндрической СК в декартову будет связан с определённой погрешностью. Если принять, что индексы  $i_0, i_{90}, i_{180}, i_{270}$  отвечают узлам с угловыми мерами  $\varphi_0^\circ = \varphi_{0w\dot{e}}^\circ + 0^\circ$ ,  $\varphi_{90}^\circ = \varphi_{0w\dot{e}}^\circ + 90^\circ$ ,  $\varphi_{180}^\circ = \varphi_{0w\dot{e}}^\circ + 180^\circ$  и  $\varphi_{270}^\circ = \varphi_{0w\dot{e}}^\circ + 270^\circ$ , то для выбранных узлов, на оси, можно применить уравнение в конечных разностях для декартовой СК:

$$\frac{U_{i_0,1,l} - 2 \cdot U_{0,0,l} + U_{i_{180},1,l}}{\Delta r^2} + \frac{U_{i_{90},1,l} - 2 \cdot U_{0,0,l} + U_{i_{270},1,l}}{\Delta r^2} + \frac{U_{0,0,l+1} - 2 \cdot U_{0,0,l} + U_{0,0,l-1}}{\Delta z^2} = -\frac{\rho_{i,k,l}}{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

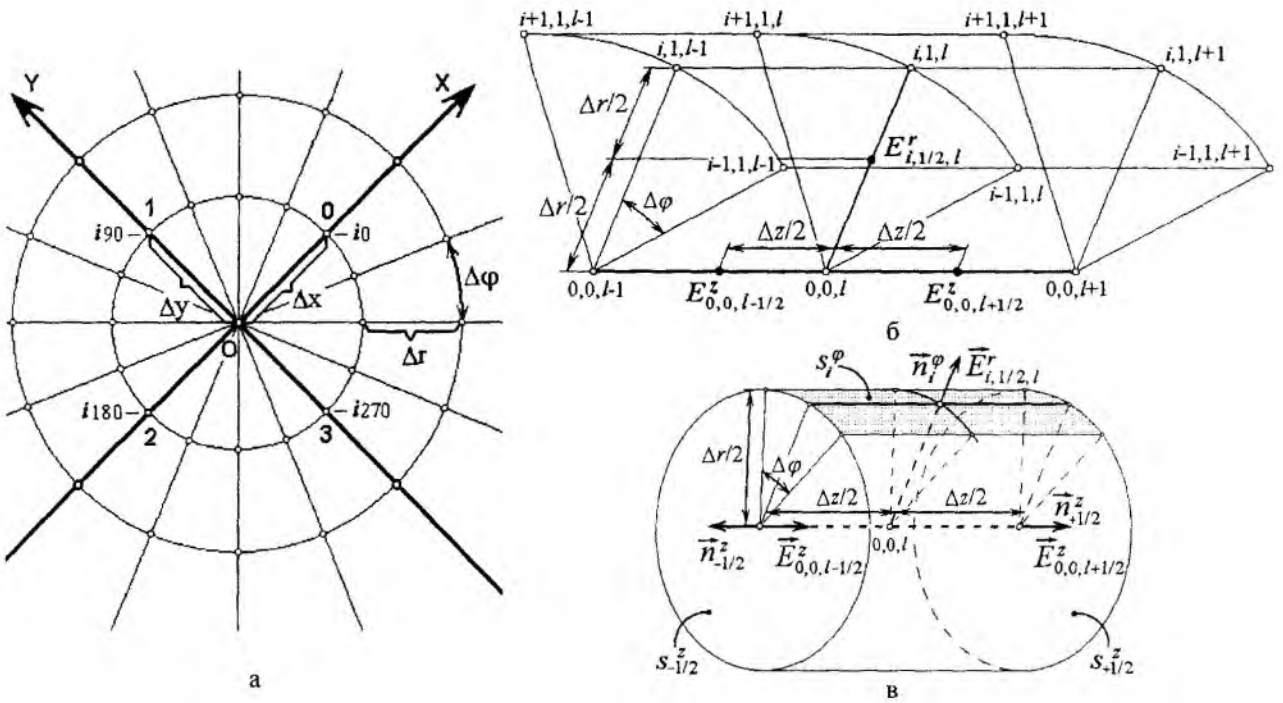


Рис. 1

**1.2. Применение теоремы Гаусса.** Применим методику, описанную в [12], с обобщением на трёхмерный случай. Теорема Гаусса связывает поток электрического поля  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность  $\sigma$ , ограничивающую объём  $V$ , содержащий заряд  $Q$ , с объёмной плотностью заряда  $\rho$ :

$$\oint_S \vec{E} ds = \frac{1}{\epsilon \cdot \epsilon_0} \iiint_V \rho \cdot dV = \frac{Q}{\epsilon \cdot \epsilon_0}. \quad (5)$$

Так как рассматривается решение уравнения Пуассона для вакуума, то  $\epsilon = 1$ , и по определению поверхностного интеграла имеем:

$$\oint_S \vec{E} ds = \lim_{diam \Delta s_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{E}_j \vec{n}_j \Delta s_j, \quad (6)$$

где  $\vec{n}_j$  - единичный вектор нормали к элементу поверхности  $\Delta s_j$ .

Аппроксимируя левую часть (5) по формуле (6), получим:

$$\sum_j \vec{E}_j \vec{n}_j \Delta s_j \approx \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (7)$$

Для пространственной решетки потенциала (см. рис.1 б) (индексация узлов аналогична описанной выше) компоненты электрического поля  $E^\varphi$  и  $E^z$  рассчитываются на полуцелых шагах решетки по формулам:

$$E_{i,l/2,l}^\varphi = -\frac{U_{i,l,l} - U_{0,0,l}}{\Delta r}, \quad E_{0,0,l-1/2}^z = -\frac{U_{0,0,l-1} - U_{0,0,l}}{\Delta z}, \quad E_{0,0,l+1/2}^z = -\frac{U_{0,0,l+1} - U_{0,0,l}}{\Delta z}. \quad (8)$$

Объём  $V_{0,0,l}$  и площади элементов поверхности  $\Delta s_i^\varphi$ ,  $\Delta s_{\pm 1/2}^z$  рассчитываются по следующим формулам (см. рис. 1 в):

$$V_{0,0,l} = \pi \cdot \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \cdot \Delta z, \quad S_i^\varphi = \frac{\Delta r}{2} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta z, \quad S_{\pm 1/2}^z = \pi \cdot \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2. \quad (9)$$

Применяя (7), (8) и (9) к осевой цилиндрической ячейке (см. рис. 1 в), находим, что

$$\frac{Q_{0,0,l}}{\varepsilon_0} \approx -S_{-1/2}^z \cdot E_{0,0,l-1/2}^z + S_{+1/2}^z \cdot E_{0,0,l+1/2}^z + \sum_i^{N_\varphi} S_i^\varphi \cdot E_{i,1/2,l}^\varphi =$$

$$\pi \cdot \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \cdot \frac{U_{0,0,l} - U_{0,0,l-1}}{\Delta z} - \pi \cdot \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \cdot \frac{U_{0,0,l+1} - U_{0,0,l}}{\Delta z} - \sum_i^{N_\varphi} \frac{\Delta r}{2} \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta z \cdot \frac{U_{i,1,l} - U_{0,0,l}}{\Delta r} \quad (10)$$

Учитывая, что  $\Delta \varphi = 2\pi / N_\varphi$ , объёмный заряд в рассчитываемой цилиндрической ячейке равен

$$\frac{\rho_{0,0,l}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{0,0,l}}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{V_{0,0,l}} = -\frac{U_{0,0,l+1} - 2 \cdot U_{0,0,l} + U_{0,0,l-1}}{(\Delta z)^2} + \frac{4}{(\Delta r)^2} \cdot U_{0,0,l} - \frac{4}{(\Delta r)^2 N_\varphi} \cdot \sum_i^{N_\varphi} U_{i,1,l} \quad (11)$$

**1.3. Сравнение методик.** Для сравнения эффективности формул (4) и (11) при итерационном процессе были проведены тестовые расчёты для уравнения Лапласа во внутренней области бесконечного цилиндра, находящегося под определённым потенциалом, и для уравнения Пуассона во внутренней области бесконечного цилиндра, равномерно заряженного по объёму. Результаты сравнивались с аналитическими решениями. Для сравнения скорости сходимости методов в качестве параметра выбрана относительная погрешность (ОП), рассчитываемая по формуле:

$$\delta_j = (U_j - U_{a|U\grave{a}}) / U_{a|U\grave{a}}, \quad (12)$$

где  $j$  – номер итерации;

$U_j$  – значение потенциала, рассчитанное на  $j$  итерации;

$U_{теор}$  – значение потенциала рассчитанное, по аналитической формуле.

Решения для упомянутых случаев известны и даются следующими формулами:

$$U_{a|U\grave{a}}^{\grave{a}\grave{a}\sim w\grave{a}}(r) = \pi \cdot \rho \cdot (R_{\acute{e}\acute{A}\acute{E}}^2 - r^2), \quad U_{a|U\grave{a}}^{x|\sim \acute{a}\acute{a}\sim w\grave{a}}(r) = U_{\acute{e}\acute{A}\acute{E}}, \quad (13)$$

где  $\rho$  – объёмная плотность пространственного заряда;

$R_{\acute{e}\acute{A}\acute{E}}$  – радиус цилиндра;

$U_{\acute{e}\acute{A}\acute{E}}$  – потенциал цилиндра;

$U_{a|U\grave{a}}$  – значение потенциала, рассчитанное по аналитической формуле.

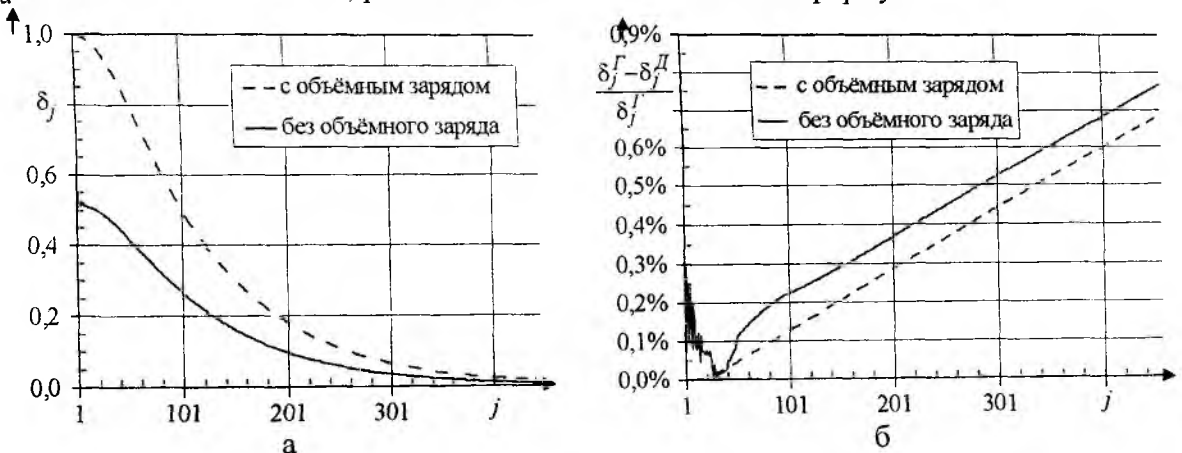


Рис. 2

На рис. 2 а показано изменение ОП  $\delta_j$  в зависимости от номера итерации  $j$ , на рис. 2 б – изменение относительной разницы между ОП, рассчитанных методом теоремы Гаусса ( $\delta_j^\Gamma$ ) и методом декартовой СК ( $\delta_j^C$ ) в зависимости от номера итерации  $j$ . По данным расчётов

видно, что метод декартовой СК имеет меньшую ОП для любого номера итерации, т.е. он имеет более быструю сходимость к точному результату, но это преимущество не велико и составляет  $0,01+0,85\%$ . По вычислительным затратам (судя по времени счёта) метод декартовой СК имеет выигрыш в  $1,2\%$ .

Как более оптимальный для дальнейших расчётов выбран метод декартовой СК.

## 2. Исследование неоднородности электростатического поля

Как уже упоминалось выше, учет разрезанности анода является крайне важным, особенно в приборах, где конфигурация поля вблизи анода существенно влияет на эффективность электронно-волнового взаимодействия. В этой связи в работе проделан анализ влияния геометрических размеров пространства на характер электрического поля, для этого при решении уравнения Пуассона используем трактовку, изложенную в п.1.1.

Расчеты прямой конструкции релятивистского магнетрона с шестью резонаторами лопаточной формы [10] показали, что зависимости глубины провала поля в резонатор от радиальной (см. рис. 3 а-в) и угловой мер резонатора неоднозначны (см. рис. 4 а-в). В качестве параметра, характеризующего глубину провала поля в резонатор, взята радиальная координата точки эквипотенциали, ближайшей ко дну резонатора (для рис.3 а -  $R_{\max}=40$  мм; 3 б -  $R_{\max}=31$  мм; 3 в -  $R_{\max}=22$  мм; для рис.4 а -  $\Delta\varphi_{\text{рез}}=55^\circ$ ; 4 б -  $\Delta\varphi_{\text{рез}}=31^\circ$ ; 4 в -  $\Delta\varphi_{\text{рез}}=20^\circ$ ). Зависимость глубины провала поля в резонатор от его глубины показана на рис. 3 г (угловая мера  $\Delta\varphi_{\text{рез}}$  постоянна и равна  $20^\circ$ ). Глубина резонаторов варьировалась путём изменения максимального радиуса анода  $R_{\max}$ . Зависимость глубины провала поля в резонатор от его угловой меры  $\Delta\varphi_{\text{рез}}$  показана на рис. 4 г (радиальные размеры анода постоянны и составляют  $R_{\max}=43$  мм и  $R_{\text{анода}}=21,5$  мм). Для этих и последующих расчётов следующие величины были постоянны: радиальный размер анода  $R_{\text{анода}}=21,5$  мм, длина анода  $h_{\text{анода}}=72$  мм, длина трубы дрейфа  $h_{\text{т.д.}}=50$  мм, сдвиг анода от нуля по оси  $z$   $h_{z0}=20$  мм.

На рис. 5 показаны эквипотенциали и вектора электростатического поля в релятивистском магнетроне, где а – сечение анодного блока по резонатору со щелью вывода энергии, б – сечение анодного блока по ламели, в – резонатор со щелью вывода энергии, г – резонатор без щели. В релятивистских магнетронах отсутствуют торцевые экраны, поэтому в рассчитываемой области, со стороны ввода катода, присутствует открытая граница (см. рис. 5 а и 5 б для  $z=0$  – промежуток катод-анод). Со стороны свободного конца катода применяется либо дифракционный вывод энергии, либо труба дрейфа – полый цилиндр ( $R_{\text{тр.дрейфа}}=R_{\max}$ ), одним концом соединенный с анодным блоком и закрытый с другого. И в том и в другом случаях в расчётной области присутствует область с  $r=0$ , где электростатическое поле имеет сильную неоднородность (см. рис. 5 а и 5 б для  $z=0.084\div 0.14$ ).

Кроме того, открытая граница присутствует и в области щели вывода энергии (см. рис. 5 а). Качественное отличие полей в резонаторах с и без щели вывода энергии хорошо видно при сравнении рисунков 5 в и 5 г, причем, чем меньше глубина резонатора, тем сильнее проявляется различие (см. врезку на рис. 5 в). При минимальной глубине ( $R_{\max}=22$  мм) разница  $dU$  имеет максимальное значение  $9,0\%$ . Расчёты проводились для конструкции с  $\Delta\varphi_{\text{рез}}=20^\circ$ .

### Выводы

На основе анализа существующих моделей сделано заключение, что для большей адекватности электродинамической трехмерной модели реальному прибору при решении уравнения Пуассона целесообразно использовать трёхмерный метод конечных разностей, позволяющий проводить расчёты в областях произвольной формы.

При сравнении эффективности формул расчёта уравнения Пуассона на оси методом декартовой СК и методом теоремы Гаусса оказалось, что оба метода практически равнозначны, как по точности, так и по затратам времени.

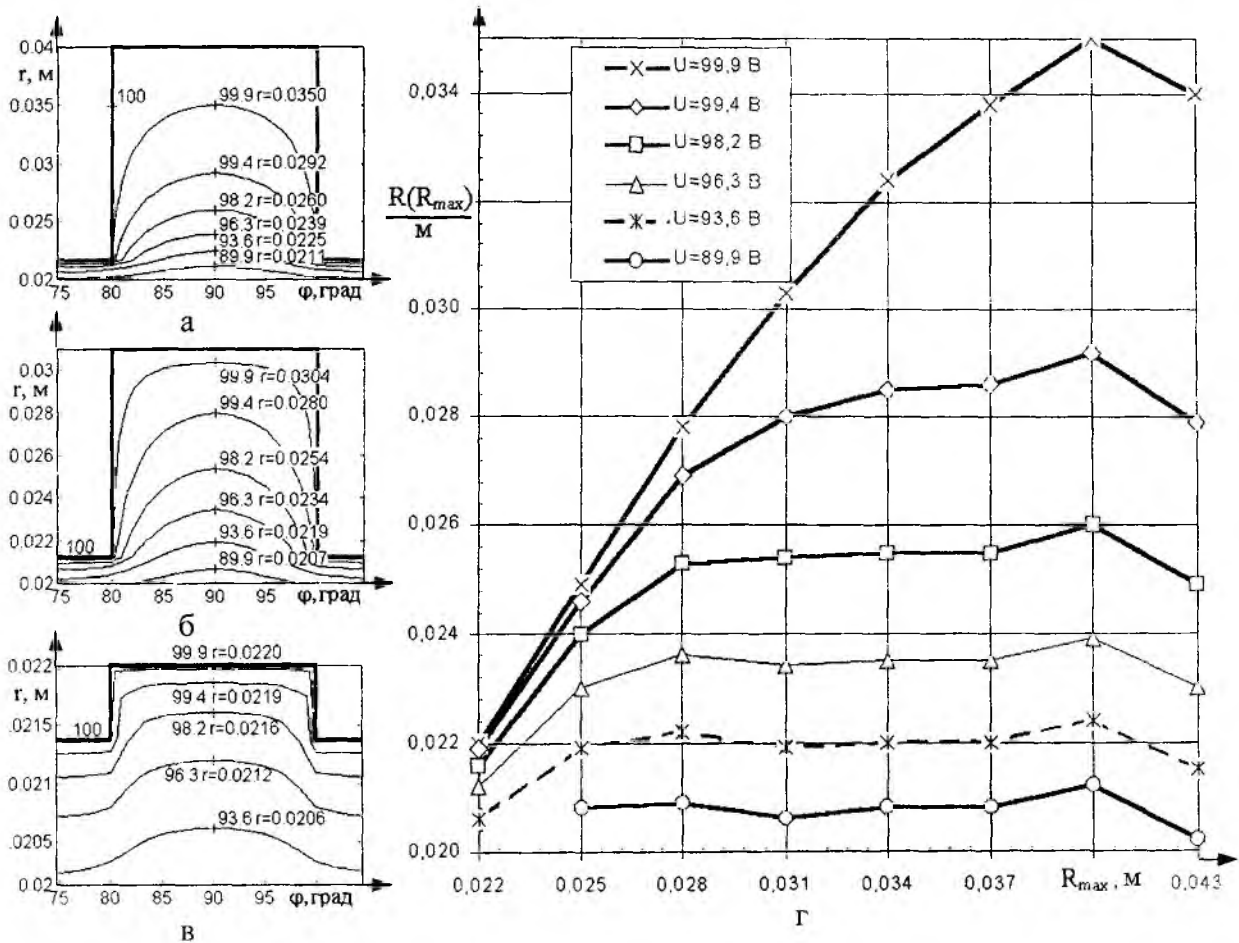


Рис. 3

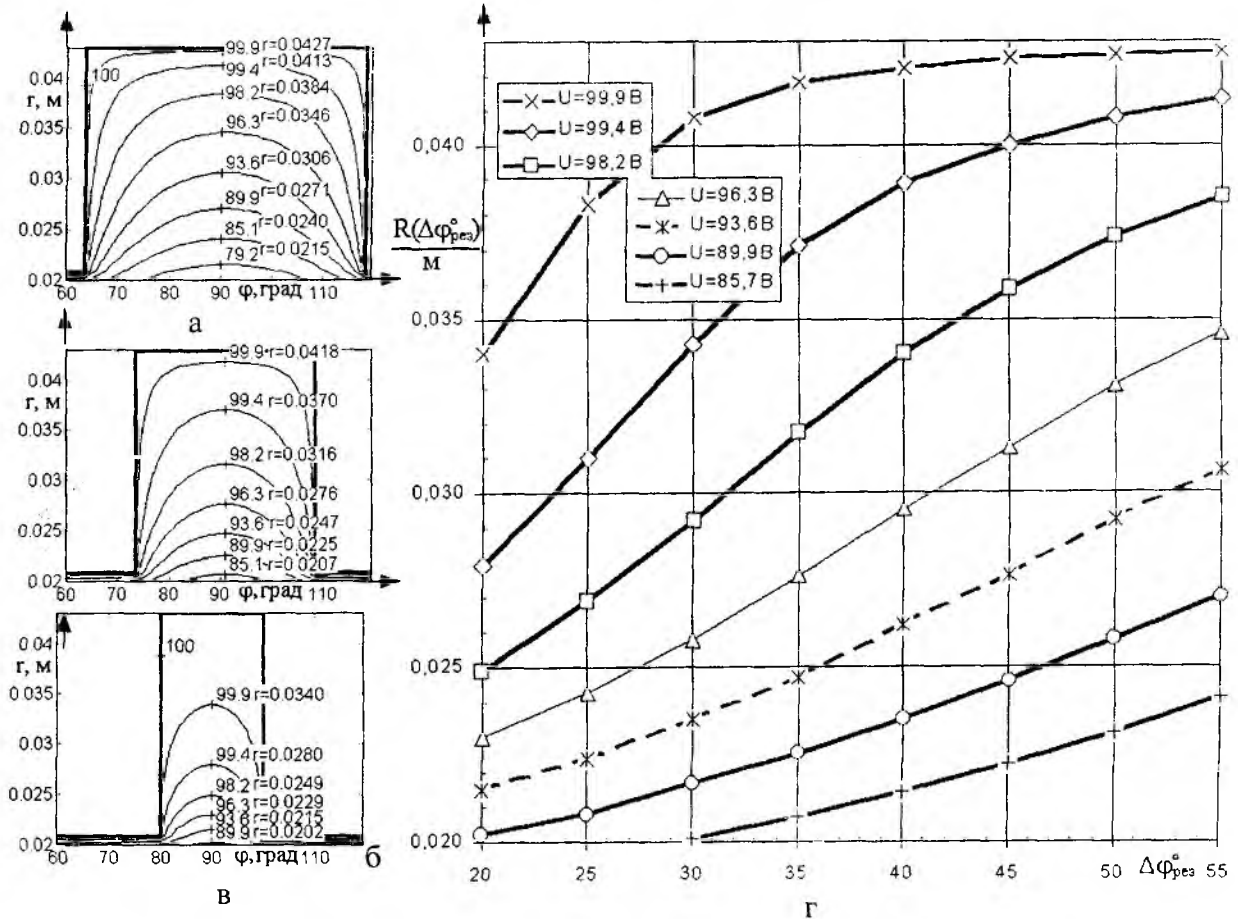
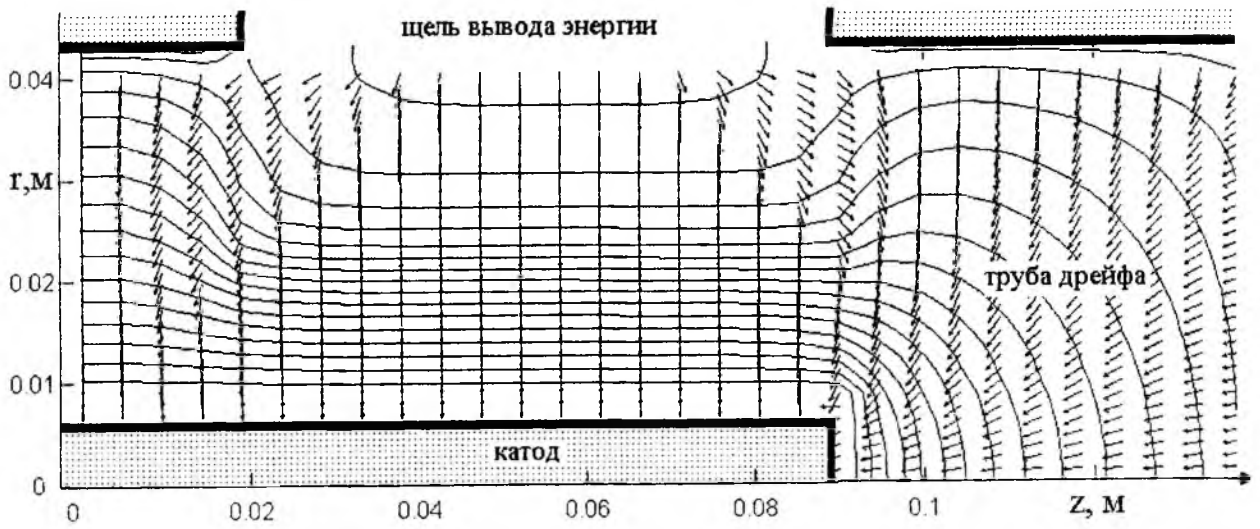
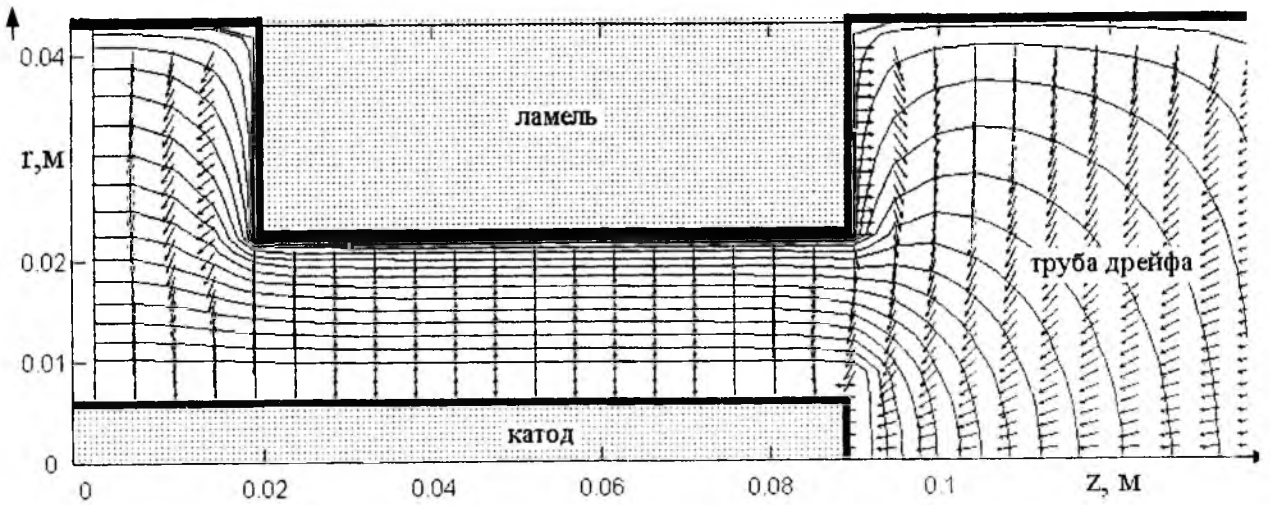


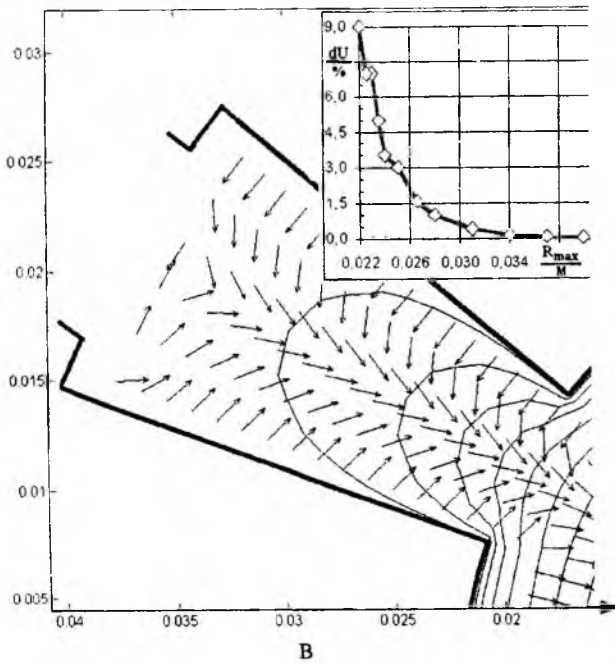
Рис. 4



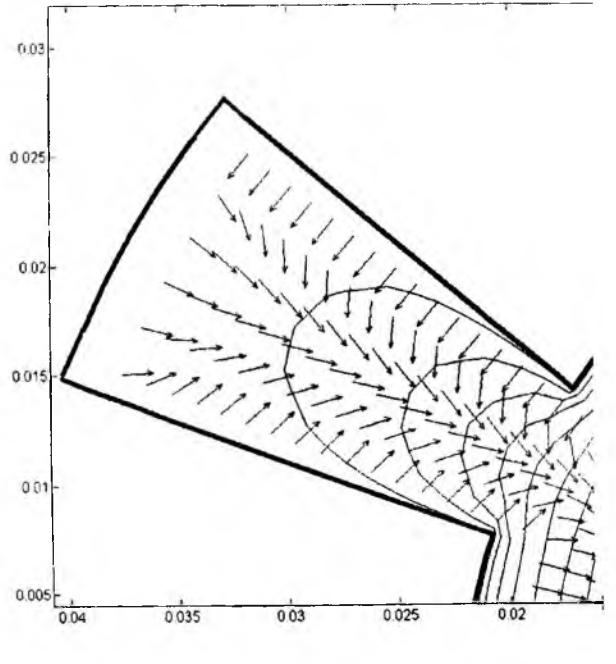
а



б



в



г

Рис. 5

Предложенный алгоритм и программа на его основе позволяют находить решение уравнения Пуассона в сложных по форме областях:

- в осевой области ( $r=0$  – труба дрейфа, дифракционный вывод энергии);
- на открытых границах (промежуток катод-анод со стороны ввода катода, щель вывода энергии в резонаторе, вакуумное окно в дифракционном выводе энергии);
- для разрезанного или цилиндрического анода (с выбором прямоугольной или лопаточной формы резонаторов);
- для прямой или обращенной конструкции прибора.

Расчеты прямой конструкции релятивистского магнетрона с резонаторами лопаточной формы показали, что для данной конструкции существенным являются наличие осевой области (трубы дрейфа) и открытых границ со стороны ввода катода и щели вывода энергии.

**Список литературы:** 1. *Рошаль А. С.* Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979. 224 с. 2. *Yu S.P., Kooyers G.P., Buneman O.* Time-Dependent Computer Analysis of Electron-Wave Interactions in Crossed Fields // *Journal of Applied Physics*. 1965. Vol.36. № 8. P.2550-2559. 3. *Галаган А.В.* Цилиндрическая трехмерная модель генератора со скрещенными полями // *Радиотехника*. 1989. Вып. 88. С. 130-135. 4. *Романов П.В., Рошаль А.С.* О решении уравнения Пуассона для области взаимодействия электронных приборов // *Известия вузов. Радиофизика*. 1971. XIV. 7. С.1097-1104. 5. *Кураев А.А., Байбуринов В.Б., Ильин Е.М.* Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ приборов. Мн.: Наука і тэхніка, 1990. 392 с. 6. *Тертышный А.С.* Применение структурного метода к расчёту электростатического поля магнетрона // *Известия вузов СССР. Радиоэлектроника*, 1981. Т. 24. № 12. С. 19-23. 7. *О.М. Нікітенко.* Розподілення електростатичного потенціалу в циліндричному магнетроні // *Радиотехника*. 2000. Вып. 113. С. 113-120. 8. *Vaughan J.R.M.* Computer Aided Design of Microwave Tubes. Tech. Digest. IEEE Int. Electron Dev. Meet. Washington, DC, 1976, P.511-514. 9. *Dombrowski Gorge E.* Computer Simulation Study of Primary and Secondary Anode Loading in Magnetrons // *IEEE Transactions on Electron Devices*. 1991. V.38. No. 10. P. 2234-2238. 10. Ограничение длительности СВЧ-излучения в сильноточном магнетроне *Глейзер И.З., Диденко А.Н., Сулакишин А.С., Фоменко Г.П., Цветков В.И.* // *Письма в журнал технической физики*. 1980. Т.6. Вып.1. С. 44-49. 11. *Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 640 с. 12. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1989. 452 с.

*Харьковский национальный  
университет радиоэлектроники*

*Поступила в редколлегию 27.07.2001*