

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШАГА ДИСКРЕТИЗАЦИИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО МАЛЫЕ ПОТЕРИ ДОСТОВЕРНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ

А. Д. Большевцев, В. Т. Разумный

Харьков

Квантование и дискретизация все глубже проникают в практику контроля и измерения. Обычно эти процессы рассматриваются как два самостоятельных действия. Между тем зачастую невозможно отделить один процесс от другого, и для правильного решения возникшей задачи требуется их совместное рассмотрение как единого целого.

Так, при автоматизации непрерывного производственного процесса приходится сталкиваться с необходимостью рационального выбора шага дискретизации непрерывной случайной функции, обеспечивающего заданную точность ее восстановления (измерения). При этом точность измерения характеризуется минимальным интервалом между двумя образцовыми величинами, т. е. шагом квантования функции по уровню. Ниже, исходя из условия малых потерь достоверности дискретного измерения, дается одно из возможных решений такой задачи.

1. Предварительные сведения

Квантование по уровню предполагает округление измеряемой величины, т. е. замену ее ближайшей образцовой величиной, кратной шагу квантования Δx (рис. 1, а). Временная дискретизация сводится к преобразованию непрерывного параметра в решетчатую функцию времени с шагом дискретизации Δt (рис. 1, б). Замена непрерывного параметра решетчатой функцией допустима лишь при сохранении воз-

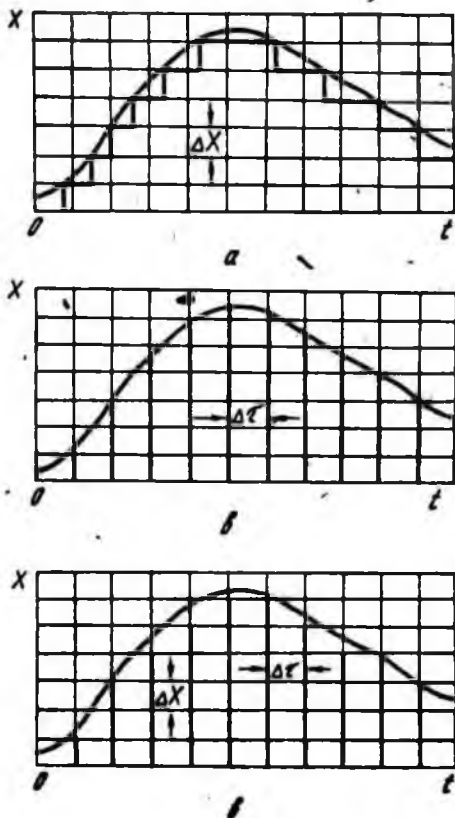


Рис. 1. Квантование непрерывного сигнала по уровню (поз. «а»), по времени (поз. «б»), по уровню и по времени (поз. «в»).

возможности восстановления этого параметра с той или иной наперед заданной точностью. В нашей постановке задачи точность восстановления исходного параметра определяется шагом его квантования по уровню (рис. 1, в).

Округление результата до нижней границы, как показано на рис. 1, является не единственным способом округления квантуемой величины. Можно округлить ее до верхней границы или же до средней точки интервала квантования. Эти варианты, по существу, равноценны. Раз-

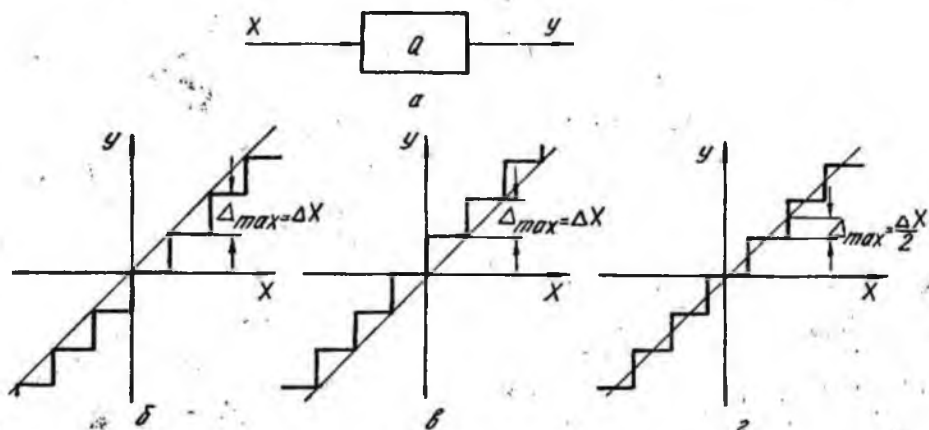


Рис. 2. Статистические характеристики квантователя Q (поз. «а») с округлением до нижней границы (поз. «б»), верхней границы (поз. «в»), средней точки интервала квантования (поз. «г»).

ница лишь в том, что в последнем, как это видно из статистических характеристик соответствующих квантователей (рис. 2), максимальная погрешность квантования Δ_{max} оказывается вдвое меньше, чем в двух предыдущих. Не нарушая общности полученных результатов, мы ограничимся рассмотрением первого варианта.

Простые рассуждения показывают, что заниженный шаг дискретизации может оказаться экономически неоправданным, а ее завышенный шаг может свести на нет полученные при измерении результаты. Отсюда следует, что для того или иного непрерывного случайного параметра и конкретных условий задачи заданному кванту по уровню может быть поставлен в соответствие и наиболее рациональный шаг по времени.

Целью настоящей статьи является получение и анализ расчетной зависимости шага дискретизации Δt от шага квантования Δx , отвечающей одному из возможных требований к достоверности дискретного измерения.

2. Потери достоверности измерения

Введем в рассмотрение понятие потерь достоверности измерения.

Пусть имеется некоторая случайная величина X , которая должна быть измерена с погрешностью, не превышающей $\pm \Delta x$. Если результат измерения укладывается в указанные допуски, то такое измерение следует считать достоверным. Если же он не укладывается в эти допуски, то будем говорить о потерях достоверности измерения.

Эти же понятия мы сохраним и для случая квантованных по уровню величин, т. е. измерение такой величины считается достоверным, если

после округления до образцовой величины расхождение между действительным и полученным результатами не превышает одного кванта. В противном случае будем полагать, что при измерении имеют место потери достоверности.

Введенную терминологию мы используем в дальнейшем для характеристики достоверности дискретного измерения непрерывных случайных параметров. Причем, поскольку измеряемые параметры случайны, целесообразен статистический подход к описанию и анализу имеющих место явлений.

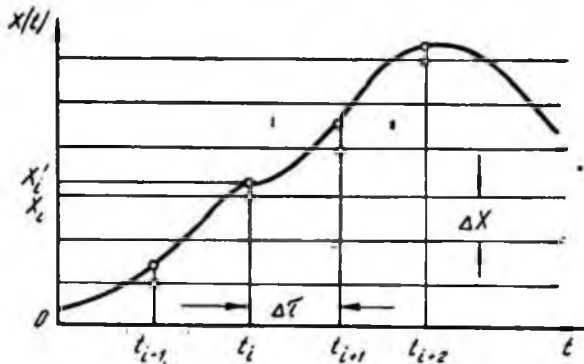


Рис. 3. Иллюстрация к понятию потери достоверности измерения.

Пусть имеется случайный параметр $X(t)$, состояние которого в некоторый момент времени t_i определяется точкой x' (рис. 3). В процессе дискретного измерения это значение округляется до ближайшей меньшей (для принятого нами способа квантования) образцовой величины x_i . С течением времени достоверность этого результата будет меняться, так как меняется измеряемый параметр. Чем меньше шаг дискретизации (опроса) параметра, тем менее вероятна потеря достоверности к моменту t_{i+1} очередной операции измерения. Слишком малый шаг дискретизации не экономичен, слишком большой шаг может привести к заметным потерям достоверности. Поэтому разумно попытаться найти по возможности больший шаг дискретизации, при котором потери достоверности дискретного измерения остаются достаточно малыми. К этому и сводится постановка нашей задачи.

В силу принятого определения, вероятность потери достоверности дискретного измерения можно характеризовать вероятностью смещения результата последующего измерения по крайней мере на два кванта относительно результата предыдущего измерения (событие A). Изменение же результата на один квант считается допустимым, т. е. не сопровождается потерями достоверности (событие B). Отсюда следует, что, выбирая шаг дискретизации по возможности большим, следует сохранить достаточно малым отношение событий A и B .

3. Получение расчетной зависимости

Строгое решение описываемой задачи трудоемко. Однако нетрудно найти приемлемые приближения, рассмотрев частный случай, для которого неокругленный результат первоначального измерения совпадает с одним из дискретных уровней.

Будем считать, что в момент времени t_i параметр $X(t)$ пересекает уровень x_i сверху вниз. События A и B в этом случае можно рассмат-

ривать как пересечения параметров уровней $x_i + 2\Delta x$ и $x_i + \Delta x$ соответственно (рис. 4). Распределение вероятностей таких пересечений определяется условной плотностью вероятности выброса параметра за соответствующие уровни. Аналитическая запись этой характеристики для нормального стационарного случая имеет вид [1, 2]

$$W(x|x_0, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \frac{x - x_0}{\sigma_v \tau} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_v^2 \tau^2}} \quad (1)$$

Здесь:

x_0 — уровень сравнения (уровень, пересекаемый процессом снизу вверх в момент времени τ , принятый за начало отсчета);

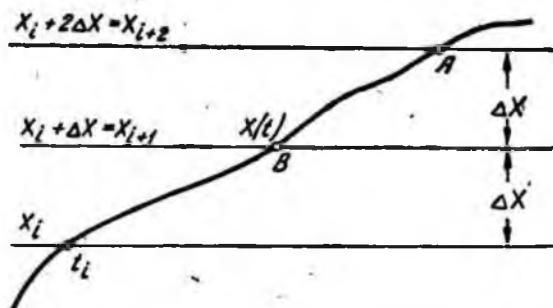


Рис. 4. Случай пересечения измеряемым параметром образцовой величины.

x — произвольный уровень, выбросы за который нас интересуют (предполагается $x > x_0$);

σ_v^2 — дисперсия скорости измеряемого параметра;

k — коэффициент уровней; этот коэффициент слабо зависит от нормированных уклонений x и x_0 и при малых значениях их разности близок к единице.

График условной плотности вероятности выбросов имеет довольно широкий участок малых абсолютных значений функции (0, τ_m) и явно

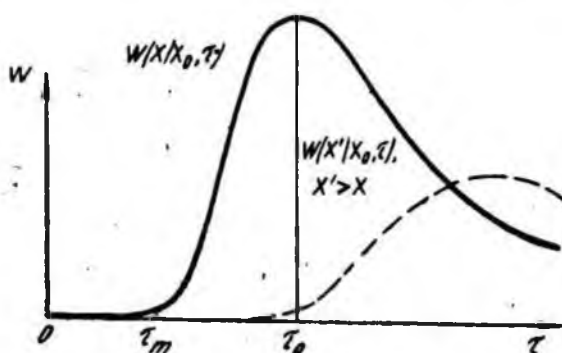


Рис. 5. График условной плотности вероятности выбросов.

выраженный максимум функции, соответствующий точке

$$\tau_0 = \frac{x - x_0}{\sqrt{2} \sigma_v} \quad (2)$$

(рис. 5).

Длительность τ_0 примерно вдвое превышает длительность τ_m . При смещении (удалении) уровней x и x_0 относительно друг друга величина максимума падает, а его абсцисса смещается вправо. Для небольших отклонений разности $x - x_0$ зависимость между смещениями по оси абсцисс и по оси ординат близка к линейной.

Если в качестве уровня сравнения принять какой-либо уровень квантования (образцовый уровень) x_i , то максимум условной плотности вероятности выбросов определяет наиболее вероятный момент пересечения анализируемым параметром другого дискретного уровня $x = x_{i+k}$. Приняв $k=1$, получим наиболее вероятный момент пересечения ближайшего дискретного уровня x_{i+1} . Для этого момента времени плотность вероятности выхода процесса на уровень x_{i+1} остается расположенной примерно в области ее малых абсолютных значений. Поэтому абсциссу максимума условной плотности вероятности выхода на уровень x_{i+1} можно принять в качестве расчетного значения искомого шага дискретизации $\Delta\tau$

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{\sqrt{2\sigma_v}}, \quad (3)$$

где

$$\Delta x = x - x_0 = x_{i+1} - x_i. \quad (4)$$

Выражение (3) показывает, что при вычислении необходимого шага временной дискретизации непрерывного случайного стационарного параметра при заданной точности его измерения (представления) из статистических показателей этого параметра достаточно располагать лишь дисперсией скорости.

4. Вероятность прохождения квант-зон

Квант-зоной будем называть область возможных значений измеряемого параметра, заключенную между двумя соседними дискретными уровнями квантования (например, между уровнями x_i и x_{i+1}). Представляет интерес определить вероятность прохождения параметром соответственно одной и двух квант-зон на интервале шага дискретизации $\Delta\tau$. Сами вероятности до некоторой степени характеризуют частоту перехода параметра из одной квант-зоны соответственно в соседнюю и последующие квант-зоны на интервале шага дискретизации. Отношение этих вероятностей позволяет оценить, насколько правильно соблюдено условие малости потерь достоверности дискретного измерения.

Итак, пусть в некоторый момент времени, принятый за начало отсчета, случайный параметр $X(t)$ пересекает уровень x_i снизу вверх. В последующие моменты времени, в силу случайного характера параметра и тенденции его движения вверх, появляется определенная для этого параметра вероятность оказаться выше ближайших дискретных уровней x_{i+1} и x_{i+2} (т. е. пройти одну или две квант-зоны). Определим эту вероятность для момента времени τ , соответствующего шагу дискретизации $\Delta\tau$, рассчитанному по формуле (3).

Интересующие нас вероятности представляют собой частные значения условной вероятности выбросов параметра за соответствующие уровни. Для небольших значений разности $x - x_0$ эта характеристика определяется выражением

$$p(x - x_0, \tau) = 1 - \Phi\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2\sigma_v\tau}}\right). \quad (5)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности вида

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (6)$$

остальные обозначения те же, что и в формуле (1).

В нашей задаче разность $x - x_0$ равна одному (Δx) и двум ($2\Delta x$) квантам; соответственно содержимое круглых скобок формулы (5) равно единице и двум, что дает для искомых вероятностей следующие величины:

$$\begin{aligned} p(\Delta x, \Delta \tau) &= 0,16, \\ p(2\Delta x, \Delta \tau) &= 0,0047. \end{aligned} \quad (7)$$

Отношение этих вероятностей

$$\frac{p(\Delta x, \Delta \tau)}{p(2\Delta x, \Delta \tau)} = 34 \quad (8)$$

примерно показывает, насколько чаще на интервале цикла дискретизации измеряемый параметр пересекает одну квант-зону, чем две и более.

Результаты (7) и (8) позволяют заключить, что при выборе шага дискретизации Δt измеряемого параметра, согласно формуле (3), вероятность потерь достоверности измерения остается достаточно малой величиной. Увеличение шага дискретизации приводит к быстрому росту вероятности потерь достоверности измерения и при данных условиях задачи нежелательно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Болычевцев. Условная плотность выбросов контролируемого процесса при централизованном управлении. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 4.
2. А. Д. Болычевцев. К статистическому анализу централизованного управления. В сб. «Методы отбора и передачи информации». Изд-во «Наукова думка», Киев, 1965.

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ РАБОТЕ ЭЦВМ, РЕШАЮЩЕЙ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ И ОПЕРАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. М. Бейлин, А. Н. Ефимов

Харьков

При эксплуатации ЭЦВМ часто приходится решать ряд задач оптимального обслуживания с точки зрения экономических критериев, заявок, поступающих на машину.

Одной из таких задач является следующая.

Из n источников на ЭЦВМ поступают простейшие потоки заявок с параметрами β_i ($i=1, 2, \dots, n$). Тогда суммарный поток также будет простейшим с параметром $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$. Пусть время обработки заявок всех типов подчиняется показательному закону $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, и при этом имеет место $\frac{\beta}{\mu} < 1$.

Кроме обработки случайных заявок (режим оперативного обслуживания), ЭЦВМ должна решать также задачи, требующие длительного времени счета, значительно превышающего μ^{-1} . Например, задачи