

О. В. ОВЧАРЕНКО

## АСИМПТОТИКА СИГНАЛОВ С ФИНИТНЫМ АНАЛИТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ

Пусть  $u(t)$  — вещественный сигнал, а  $S(\omega)$  — его спектр

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Комплексная функция  $S(\omega)$  обладает свойством  $S(-\omega) = \overline{S(\omega)}$ , где черта обозначает комплексное сопряжение, поэтому носитель  $\text{supp } S(\omega)$  спектра  $S(\omega)$  вещественного сигнала  $u(t)$  всегда симметричен, т. е. если  $\omega \in \text{supp } S(\omega)$ , то  $-\omega \in \text{supp } S(\omega)$ .

В случае, когда  $\text{supp } S(\omega)$  содержится в множестве

$$(-\Delta - \omega_0, -\omega_0 + \Delta) \cup (-\Delta + \omega_0, \omega_0 + \Delta), \quad \omega_0, \\ \Delta > 0, \quad \omega_0 - \Delta > 0, \quad (1)$$

состоящем из двух симметричных конечных интервалов, говорят, что сигнал  $u(t)$  имеет финитный спектр [1]. Структура финитных спектров может быть весьма разнообразной. Естественными являются два крайних случая — сплошной спектр: функция  $S(\omega)$  непрерывна на носителе (1); дискретный спектр: множество частот  $\{\omega_i : S(\omega_i) \neq 0\}$  конечно или счетно и содержится во множестве (1). В работе рассматривается только первый случай.

Для сигналов  $u(t)$  с финитным сплошным спектром имеет место естественное представление  $u(t)$  в виде [2]

$$u(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega_0-\Delta}^{-\omega_0+\Delta} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0-\Delta}^{\omega_0+\Delta} [\overline{S(\omega)} e^{-i\omega t} + S(\omega) e^{i\omega t}] d\omega = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} [\overline{S(\omega_0 + \omega)} e^{-i(\omega_0 + \omega)t} + S(\omega_0 + \omega) e^{i(\omega_0 + \omega)t}] d\omega = \\
 &= e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} \overline{S(\omega_0 + \omega)} e^{-i\omega t} d\omega + \\
 &+ e^{i\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0 + \omega) e^{i\omega t} d\omega = e^{-i\omega_0 t} \overline{I(t)} + e^{i\omega_0 t} I(t) = \\
 &= |I(t)| [e^{i(\omega_0 t + \Phi(t))} + e^{-i(\omega_0 t + \Phi(t))}] = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)),
 \end{aligned}$$

где

$$A(t) = 2|I(t)|; \quad \Phi(t) = \arg I(t);$$

$$I(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Delta}^{\Delta} S(\omega_0 + \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Цель статьи — изучение поведения интеграла  $I(t)$ , а следовательно, амплитудной  $A(t)$  и фазовой  $\Phi(t)$  функций при  $|t| \rightarrow \infty$  для сигналов  $u(t)$ , имеющих финитный аналитический спектр. Кроме того, в работе найдено представление асимптотики квадрата амплитудной функции в виде произведения двух целых функций экспоненциального типа, нули которых лежат по разные стороны от вещественной оси. Это представление используется при решении задачи о связи фазовой функции с амплитудной для сигналов с финитным спектром на носителе.

**Асимптотика.** Путем непосредственных вычислений нетрудно проверить, что имеют место следующие асимптотические формулы при  $|t| \rightarrow \infty$  для интегралов:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \omega^n \cos \omega t d\omega \cong \Delta^n \frac{2}{t} \sin \Delta t, \quad n — \text{четное}; \quad (3)$$

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} \omega^n \sin \omega t d\omega \cong -\Delta^n \frac{2}{t} \cos \Delta t, \quad n — \text{нечетное}. \quad (4)$$

Если  $f(\omega)$  — аналитическая функция на интервале  $(-\Delta, \Delta)$ , т. е. ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \omega^n$  сходится к  $f(\omega)$  при  $\forall \omega \in (-\Delta, \Delta)$ , то, используя (3), (4), получаем асимптотические формулы для интегралов:

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \cos \omega t d\omega \cong \frac{2}{t} \sin \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) \Delta^{2k}; \quad (5)$$

$$\int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \sin \omega t d\omega \cong -\frac{2}{t} \cos \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) \Delta^{2k+1}. \quad (6)$$

Теперь можно получить асимптотическое выражение для  $I(t)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} I(t) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} S_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\Delta}^{\Delta} |S_0(\omega)| e^{i(\omega t + \psi(\omega))} d\omega = \\ &= \int_{-\Delta}^{\Delta} |S_0(\omega)| \cos(\omega t + \psi(\omega)) d\omega + i \int_{-\Delta}^{\Delta} |S_0(\omega)| \sin(\omega t + \psi(\omega)) d\omega = \\ &= \int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \cos \omega t d\omega - \int_{-\Delta}^{\Delta} g(\omega) \sin \omega t d\omega + \\ &+ i \int_{-\Delta}^{\Delta} f(\omega) \sin \omega t d\omega + i \int_{-\Delta}^{\Delta} g(\omega) \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(\omega) &= |S_0(\omega)| \cos \psi(\omega); \quad g(\omega) = |S_0(\omega)| \sin \psi(\omega); \\ S_0(\omega) &= S(\omega_0 + \omega), \quad \psi(\omega) = \arg S_0(\omega). \end{aligned}$$

Используя (5), (6), из (7) получаем

$$\begin{aligned} I(t) \cong \frac{2}{t} \{ [F_2(\Delta) \sin \Delta t + G_1(\Delta) \cos \Delta t] + \\ + i [-F_1(\Delta) \cos \Delta t + G_2(\Delta) \sin \Delta t] \}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$F_1(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) \Delta^{2k+1};$$

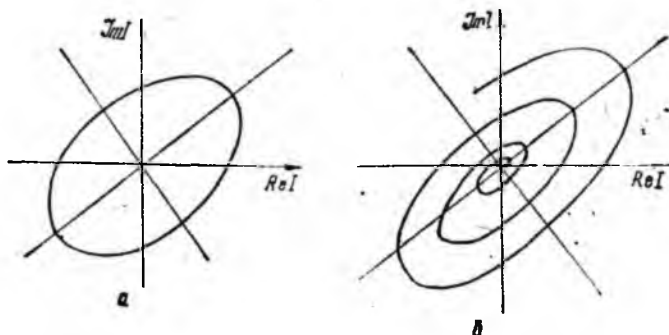
$$F_2(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) \Delta^{2k}.$$

Аналогично определяются  $G_1(\Delta)$ ;  $G_2(\Delta)$ .

Из формулы (8) видно, что при  $|t| \rightarrow \infty$  интеграл  $I(t)$  убывает как  $1/|t|$ . Эта скорость убывания соответствует случаю «общего положения». В случае «вырождения» скорость убывания может иметь более высокий порядок, но тогда асимптотические формулы будут иметь другой вид. Теперь рассмотрим выражение, стоящее в фигурных

скобках формулы (8). Оно представляет собой комплексную функцию вещественной переменной, действительная и мнимая составляющие которой являются периодическими функциями с одним и тем же периодом  $2\pi/\Delta$ . Вследствие этого конец вектора на комплексной плоскости  $S$ , соответствующего фигурной скобке, описывает эллипс (рисунок, позиция *a*), а конец вектора, отвечающего функции  $I(t)$  при  $|t| \rightarrow \infty$ , описывает соответствующую эллиптическую спираль (рисунок, позиция *b*).

Приведенная геометрическая интерпретация показывает, что в общем случае амплитудная функция  $A(t)$ , описывающая поведение модуля упомянутого вектора на комплексной плоскости, при убывании колеблется. В то же время фазовая функция, описывающая аргумент этого вектора, будет монотонно возрастающей или убывающей с колебаниями скорости изменения фазы. Итак, доказано следующее.



**Предложение 1.** Комплексная функция  $I(t)$ , модуль которой равен половине амплитуды  $A(t)$ , а аргумент — фазе  $\Phi(t)$ , при  $|t| \rightarrow \infty$  описывается асимптотической формулой

$$I(t) \cong \frac{2}{t} [(a \cos \Delta t + b \sin \Delta t) + i(c \cos \Delta t + d \sin \Delta t)], \quad (9)$$

где  $a, b, c, d$  — вещественные константы.

**Следствие 1.** При  $|t| \rightarrow \infty$  амплитуда  $A(t) = 2|I(t)|$  убывает до нуля. Из этого вытекает, что сигналы вида  $u(t) = A_0 \cos \times (\omega_0 t + \Phi(t))$ ,  $A_0 = \text{const}$ , для которых  $I(t) = (1/2) A_0 \exp(i\Phi(t))$ , не могут иметь финитный аналитический спектр.

**Следствие 2.** При  $|t| \rightarrow \infty$  фаза  $\Phi(t) = \arg I(t)$  монотонно возрастает или убывает.

Это вытекает из того, что выражение, стоящее в квадратных скобках формулы (9), описывает движение изображающей точки по центрально-симметричному эллипсу. В случае вырождения эллипса в центрально-симметричный отрезок  $\Phi(t)$  вырождается в ступенчатую возрастающую или убывающую функцию при высоте ступеньки  $\pi$ .

Следствие 2 показывает, что сигналы вида  $u(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi_0)$ , где  $\Phi_0 = \text{const}$ , не могут иметь финитный аналитический невырожденный спектр.

Асимптотика функции  $A^2(t)$ . Обозначим через  $\bar{E}(t)$  квадрат модуля выражения, стоящего в фигурных скобках формулы (8). Тогда асимптотику функции  $A^2(t)$  согласно формулам (2), (8) можно записать в виде  $A^2(t) = (4/t^2) \bar{E}(t)$ , где

$$\begin{aligned} \bar{E}(t) &= (a \cos \Delta t + b \sin \Delta t)^2 + (c \cos \Delta t + d \sin \Delta t)^2 = \\ &= c_0 + c_2 \cos(2\Delta t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$a = G_1; \quad b = F_2; \quad c = -F_1; \quad d = G_2; \quad c_0 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 + b^2 + d^2);$$

$$c_2^2 = \frac{1}{4} [(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2)]^2 + (ab + cd)^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{2(ab + cd)}{a^2 + c^2 - (b^2 + d^2)},$$

если  $a^2 + c^2 \neq b^2 + d^2$  и  $c_0 = a^2 + c^2$ ;  $c_2 = ab + cd$ ;  $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$ , если  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ .

Так как равная сумме квадратов функция  $\bar{E}(t) \geq 0$ , то  $c_0 \geq c_2$ . Если функция  $A(t) > 0$ , то  $\bar{E}(t) > 0$  и  $c_0$  строго больше  $c_2$ .

Из формулы (10) видно, что функция  $\bar{E}(t)$  может быть продолжена в комплексную плоскость  $S$  до целой функции экспоненциального типа:

$$\bar{E}(z) = c_0 + c_2 \cos(2\Delta z + \varphi_2).$$

Она имеет бесконечное количество нулей [3], ни один из которых не лежит на вещественной оси, если  $c_0 > c_2$ . В дальнейшем рассматриваем только такой случай.

Чтобы найти нули целой функции  $\bar{E}(z)$ , рассмотрим уравнение:

$$c_0 + c_2 \frac{1}{2} [e^{i(2\Delta z + \varphi_2)} + e^{-i(2\Delta z + \varphi_2)}] = 0. \quad (11)$$

Обозначив  $\lambda = e^{i(2\Delta z + \varphi_2)}$ , приведем его к виду  $2\bar{c} + \lambda + \frac{1}{\lambda} = 0$ , где  $\bar{c} = \frac{c_0}{c_2} > 1$ . Решая это уравнение и учитывая (11), приходим к выводу, что все корни уравнения (11) образуют два множества:  $\{x_n + ih\} \cup \{x_n - ih\}$ , где

$$x_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2\Delta} - \frac{\varphi_2}{2\Delta}; \quad h = \frac{1}{2\Delta} \ln(\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 - 1}).$$

Легко проверить, что функции  $E^\pm(z) = \cos(\Delta z + \frac{1}{2} \varphi_2 \pm i\Delta h)$  имеют нули:  $\{x_n \mp ih\}$  соответственно. Рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} E^+(z) E^-(z) &= \cos\left(\Delta z + \frac{1}{2} \varphi_2 + i\Delta h\right) \cos\left(\Delta z + \frac{1}{2} \varphi_2 - i\Delta h\right) = \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch} 2\Delta h + \cos(2\Delta z + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Так как

$$\operatorname{ch} 2\Delta h = \frac{1}{2} (2^{2\Delta h} + e^{-2\Delta h}) = \frac{1}{2} \left( \bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 - 1} + \frac{1}{\bar{c} + \sqrt{\bar{c}^2 - 1}} \right) = \bar{c} = \frac{c_0}{c_2}.$$

то

$$E^+(z)E^-(z) = (1/2c_2) [c_0 + c_2 \cos(2\Delta z + \varphi_2)].$$

Следовательно,  $\tilde{E}(z) = 2c_2 E^+(z)E^-(z)$ . Здесь функция  $E^+(z)$  имеет нули в нижней полуплоскости, а  $E^-(z)$  — в верхней.

Итак, доказано следующее.

**Предложение 2.** Асимптотика при  $|t| \rightarrow \infty$  квадрата амплитудной функции  $A^2(t) > 0$  сигнала  $u(t)$  с финитным аналитическим спектром имеет вид

$$A^2(t) |_{|t| \rightarrow \infty} = \frac{4}{t^2} \tilde{E}(t),$$

где

$$\tilde{E}(t) = c_0 + c_2 \cos(2\Delta t + \varphi_2), \quad c_0 > c_2 > 0$$

является целой функцией экспоненциального типа и представляется произведением

$$\tilde{E}(z) = 2c_2 E^+(z)E^-(z),$$

где

$$E^\pm(z) = \cos\left(\Delta z + \frac{1}{2}\varphi_2 + i\Delta h\right)$$

—целые функции экспоненциального типа, нули которых лежат соответственно выше и ниже вещественной оси, а  $h$  удовлетворяет уравнению  $\operatorname{ch} 2\Delta h = c_0/c_2$ .

Список литературы: 1. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., 1971. 408 с. 2. Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А. Амплитуда, фаза, частота — основные понятия теории колебаний // Успехи физ. наук. 1977. Т. 123. Вып. 4. С. 657—682. 3. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М. Наука. 1983. 175 с.

Поступила в редколлегию 13.07.88