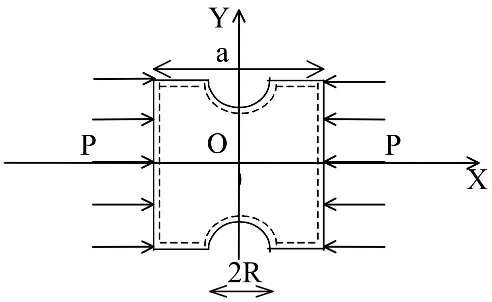

Рис. 4. Пластина с врезами

Таблица 2

	α						
	6,1	6,3	6,5	7	7,5	8	8,5
w_0	0	0,523	0,781	1,25	1,62	1,96	2,27

Таблица 3

	α						
	4,9	5	5,5	6	6,5	7	7,5
w_0	0	0,120	0,889	1,29	1,63	1,94	2,23

Из приведенных выше результатов следует, что при увеличении радиусов врезов пластина становится более устойчивой.

Преимущество предложенного подхода состоит в том, что решение задачи находится в аналитическом виде. Изменение формы пластины, способов ее нагружения и закрепления не требуют существенных изменений в алгоритме.

Литература: 1.*ВольмирА.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с. 2.*Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 3.*Шевченко А.Н.* Программирование структур решения краевых задач на языке RL-1. Харьков: Ин-т пробл. машиностр., 1979. 23 с. 4. *Корнишин М.С., ФайзулинаМ.А.* Геометрически нелинейные задачи изгиба и устойчивости пластин сложной формы // Исследования по теории пластин и оболочек. 1984. Вып. 17, ч.1. С. 20-31.

Поступила в редколлегию 29.02.2000

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Курпа Л.В.

Линник Анна Борисовна, аспирант кафедры прикладной математики ХГПУ. Адрес: Украина, 61142, Харьков, ул.Блюхера, 38а, кв.249, тел.40-09-41. E-mail: linik@kpi.kharkov.ua

УДК 519.713

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

ЛАРИОНОВ Ю.И., ХАЖМУРАДОВ М.А.

Для уменьшения ошибок, связанных с использованием округлений при решении задач линейного программирования, предлагается модификация известного алгоритма симплекс-метода, обеспечивающая текущее решение в целых числах.

Линейное программирование (ЛП) с точки зрения уровня теоретических разработок, сферы приложения и реализации вычислительных методов является одним из наиболее развитых направлений в области решения оптимизационных задач.

Успехи, достигнутые в использовании методов ЛП при решении конкретных задач, во многом обусловлены значительным увеличением быстродействия и объёмом памяти ЭВМ. Об этом свидетельствует множество разнообразных стандартных пакетов программ, нашедших широкое распространение у пользователей, в которых предусмотрена возможность осуществления вычислительных процедур с многократно увеличенной точностью, что позволяет значительно уменьшить эффект ошибок округления.

Основу большинства таких пакетов составляет симплекс-метод, предложенный Дж. Данцигом, хотя создано множество весьма изощренных алгоритмов метода, направленных на сокращение времени решения, на повышение вычислительной устойчивости и разработку алгоритмов, позволяющих решать задачи больших размеров. Симплекс-метод и его разновидности остаются преобладающими при решении задач линейного программирования [1].

Число симплекс-итераций при решении задач ЛП зависит в основном от числа ограничений, а не от количества переменных. В грубом приближении число необходимых итераций лежит в пределах от 1,5 до 2m, где m – количество ограничений – уравнений в начальной симплекс-таблице.

Тем, кому приходилось искать ручным способом решение для систем, содержащих относительно небольшое число линейных уравнений, хорошо известно, что вычислительные погрешности, возникающие в процессе округления тех или иных чисел, могут накапливаться весьма быстро. Действительно, если при вычислениях сохранять только две или три значащие цифры, окончательный ответ может оказаться “слишком неточным” и поэтому не пригодным для использования. В случае, когда число уравнений в системе велико (а именно с этой ситуацией мы сталкиваемся при практическом применении методов ЛП), опасность “потери точности” оказывается особенно серьезной.

Хотя теоретическая основа симплекс-метода гарантирует сходимость к оптимальному решению за конечное число шагов, трудности вычислительного характера, возникающие вследствие ошибок округления в процессе машинных расчетов, в этом методе не учитываются. Такие трудности встречаются прежде всего тогда, когда искусственные переменные являются частью начального базисного решения. Использование “больших штрафов” в целевой функции может привести к ошибке округления, обусловленной операциями над группой чисел, включающих очень большие и относительно малые числа. С учетом этих обстоятельств во многие машинные программы, предназначенные для реализации симплексного метода, вводят специальные процедуры контроля за погрешностями, появляющимися вследствие округления. Однако даже в этом случае требуемая точность не всегда обеспечивается. Поэтому при нахождении решения для той или иной линейной оптимизационной модели следует принимать надлежащие меры предосторожности [2].

Наиболее широко распространенный способ контроля роста ошибок округления заключаются в том, чтобы рассмотреть равенство Ах=в.

Левая часть этого равенства вычисляется последовательно строка за строкой, при этом используется сохраняемое в памяти ЭВМ значение текущего х, и если для какой-либо строки разница между вычисленной величиной и соответствующим элементом вектора ограничений выйдет за пределы некоторого допуска, то это указывает на чрезмерную ошибку округления – так называемая невязка строки. Подобным образом проверяются и невязки столбцов, которые при отсутствии ошибок округления должны быть равны нулю. Большинство коммерческих систем ЛП использует несколько способов автоматического масштабирования перед выполнением итераций симплекс-метода. Например, уравновешивание, когда все элементы матрицы А делаются близкими по величине, либо если исходные данные заданы в виде десятичных чисел, то их переводят в целочисленные умножением всех исходных данных на 10^K. Это все, что может быть априори, а затем последовательность операций исключения, связанных с итерациями симплекс-метода, определяет рост ошибок округления в соответствии с тем, как выполняется алгоритм. При этом устанавливаются допуски на ошибку вместо точной проверки на ноль. Их различные значения отражают относительную величину допустимой ошибки.

Точно решить линейные задачи можно только в целых числах. Поэтому полезна разработка алгоритмов точного анализа (без округления) задач линейного программирования, особенно при решении плохо обусловленных задач, когда обычные методы решения (с округлениями) ведут к недопустимо большим погрешностям [3].

Задачу ЛП в общем случае можно записать в каноническом виде:

максимизировать (или минимизировать)

$$Z = C_I x_I + C_{II} x_{II}$$

при ограничениях $A x_I + I x_{II} = в \geq 0,$

$$x_I,\ x_{II} \geq 0.$$

Такая форма представления задачи предполагает разделение переменных на x_I и x_{II}, при котором коэффициенты, стоящие при переменных в ограí è÷åí èÿõ, ñâÿçàí í ûõ ñ $õ_{II}$, образуют единичную матрицу I. Указанная структура модели может быть также получена путем введения искусственных переменных, которые добавляются в левую часть ограничений только тогда, когда необходимо дополнить единичную матрицу I. Рассматриваемая форма модели обеспечивает автоматическое получение начального допустимого базисного решения, а именно x_{II} = в.

Введем следующее понятие. Столбцы канонической задачи, соответствующие переменным x_{II}, будем называть правильными, если они содержат единственный ненулевой элемент, который к тому же является положительным числом. В рассматриваемой модели все столбцы, образующие единичную матрицу I, правильные. Таким образом, их масштабирование, т.е. умножение на ненулевое действительное число, согласно введенному понятию, дает также правильные столбцы.

Идея симплекс-метода состоит в том, чтобы, исходя из текущего допустимого базисного решения, найти новое допустимое базисное решение, исключая для этого некоторый вектор из пробного базиса и заменяя его одним из небазисных векторов. Вектор, включаемый при этом в базис, должен, по крайней мере, не ухудшать значение целевой функции, а удаление вектора обеспечивает получение нового допустимого базисного решения.

Преобразование задачи линейного программирования к новому базису является симплексным. Для получения решения в целых числах будем осуществлять его по следующим правилам (которые отличны от традиционных [4]) при переходе к очередной симплекс-таблице:

1. Выбирается отличный от нуля разрешающий элемент $x_{l\,k}^{(r)} > 0$ некоторой r-й таблицы.

2. Разрешающая l-я строка выбирается из условия $\theta_i = \min\limits_{1 \leq\ i \leq m} \left\{ \frac{в_i}{a_{lk}} \right\} = \frac{в_l^{(r)}}{a_{lk}^{(r)}}, \quad a^{(r)}{}_{lk} > 0$. Все элементы разрешающей строки в последующей таблице определяются соотношением $a_{lj}^{(r+1)} = a_{lj}^{(r)}, \quad j = \overline{1, n};$.

3. Все элементы разрешающего (к-го) столбца заменяются нулями, кроме разрешающего элемента. Таким образом, к-й столбец становится правильным столбцом, а $a_{lk}^{(r+1)} = a_{lk}^{(r)};$.

4. Все остальные элементы (r+1)–й таблицы вычисляются из соотношений

$$a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} \cdot a_{lk}^{(r)} - a_{lj}^{(r)} \cdot a_{ik}^{(r)}, \quad i \neq l, \quad j \neq k,$$

$$в_i^{(r+1)} = в_i^{(r)} \cdot a_{lk}^{(r)} - в_l^{(r)} \cdot a_{ik}^{(r)}, \quad i \neq l,$$

$$Z^{(r+1)} = Z^{(r)} \cdot a_{lk}^{(r)} - a_l^{(r)} \cdot \Delta_k^{(r)},$$

$$\Delta_j^{(r+1)} = \Delta_j^{(r)} \cdot a_{lk}^{(r)} - a_{lj}^{(r)} \cdot \Delta_k^{(r)}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, завершается итерация метода последовательного улучшения плана. Если (r+1)-я таблица итоговая, то ненулевые компоненты оптимального плана получаются делением элементов столбца x симплекс-таблицы на ненулевые элементы правильных столбцов этой же таблицы, а значение целевой функции определяется соотношением

$$Z(x^*) = \frac{Z^{(r+1)}}{\prod_{t=1}^{r} x_{lk}^{t}}.$$

Рассмотрим следующую задачу. Найти $Z=3x_3 \to \max$ при условии $2x_1 + 4x_2 - x_4 = 9$,

$$-3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3,$$

$$x_1 - 12x_2 + x_3 + 2x_4 = 4,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}.$$

Решение задачи методом искусственного базиса приведено в таблице.

Ненулевые компоненты искомого оптимального плана x^* получим делением элементов столбца x на 3-й итерации на ненулевые элементы правильных столбцов, т.е. $x_1^* = 6/16;\quad x_2^* = 66/32;\quad x_3^* = 908/32$.

Окончательно имеем

$$x^* = (3/8;\quad 33/16;\quad 227/8;\quad 0).$$

Значение целевой функции определим по формуле

$$Z(x^*) = \frac{2724}{2 \cdot 16} = 681/8.$$

№ итерации	iБ	c	x	0	0	3	0
				P_1	P_2	P_3	P_4
1-я итерация	1 P_5	-M	9	2	4	0	-1
	2 P_6	-M	3	-3	$\boxed{2}$	0	3
	3 P_3	3	4	1	-12	1	2
	m+1		12	3	-36	0	6
	m+2		-12	1	-6	0	-2
2-я итерация	1 P_5	-M	6	$\boxed{16}$	0	0	-14
	2 P_2	0	3	-3	2	0	3
	3 P_3	3	44	-34	0	2	40
	m+1		132	-102	0	0	120
	m+2		-6	-16	0	0	14
3-я итерация	1 P_1	0	6	16	0	0	-14
	2 P_2	0	66	0	32	0	6
	3 P_3	3	908	0	0	32	164
	m+1		2724	0	0	0	492

Литература: 1. *Таха Х.* Линейное программирование. В кн. Исследование операций/ Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. М.:Мир, 1981. Т.1. С.81-121. 2. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. М.: Мир, 1984. 224с. 3. *Ганшин Г.С.* Методы оптимизации и решение уравнений. М.: Наука, 1987. 128с. 4. *Кузнецов А.В., Холод Н.И.* Математическое программирование. Минск: Высш. шк., 1984. 221с.

Поступила в редколлегию 12.02.2000

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Путятин Е.П.

Ларионов Юрий Иванович, канд. техн. наук, доцент ХТУРЭ. Научные интересы: исследование операций. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-98-07.

Хажмурадов Манап Ахмадович, д-р техн. наук, профессор, начальник отдела ННЦ ХФТИ. Научные интересы: математическое моделирование физических процессов, технических систем и сетей. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 35-65-94.