

# ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ТОЧКОВИМИ ДЖЕРЕЛАМИ МЕТОДОМ ГАЛЬОРКІНА

Чернов О.Г.

Науковий керівник – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки  
(61166, Харків, пр. Леніна, 14, каф. Прикладної математики,  
тел. (057) 702-14-36)

e-mail: Alekcander.Chernov@gmail.com, тел. (063) 212-45-75

The given work is devoted to the one-dimensional heat conduction problem with point sources of heat. For its solution was used Galerkin method for unsteady problems. Obtained results were compared with a numerical solution.

Розглядається одновимірна задача теплопровідності з точковими джерелами тепловиділення. Опис таких джерел відбувається за допомогою дельта-функції Дірака і застосування до чисельного аналізу задачі, наприклад, сіткових методів призводить до необхідності апроксимувати дельта-функцію якоюсь послідовністю звичайних функцій, що призводить до зайвих похибок у наближеному розв'язку. Вільними від цього недоліку є наближено-аналітичні методи, наприклад, метод Гальоркіна для нестационарних задач, у якому за рахунок використання апарату гільбертових просторів можна точно врахувати властивості точкових джерел. Отже, вдосконалення методів чисельного аналізу процесів теплопровідності з точковими джерелами тепла на основі методу Гальоркіна є актуальною науковою проблемою.

По стрижню  $0 \leq x \leq l$ , на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем (температура якого дорівнює нулеві), рухається піч з постійною швидкістю  $v_0$ . Потік тепла від печі до стрижня дорівнює  $q(t) = Ae^{-ht}$ , де  $h$  – коефіцієнт теплообміну, що входить в рівняння теплопровідності для стрижня  $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}$ . Треба знайти температуру  $u(x, t)$  стрижня, якщо його початкова температура дорівнює нулю і температура кінців весь час підтримується рівною нулеві.

Математична модель має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu + \frac{A}{c\rho\sigma} e^{-ht} \delta(x - v_0 t) \quad \forall x \in (0, l), \quad t \in \left(0, \frac{l}{v_0}\right), \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \in \left(0, \frac{l}{v_0}\right), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, l). \quad (3)$$

Точний розв'язок задачі (1) – (3), отриманий методом Фур'є має вигляд:

$$u(x,t) = \frac{2A}{c\rho l\sigma} e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n x}{l}}{\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} + \frac{v_0^2}{a^2}} \left[ \frac{lv_0}{a^2 \pi n} e^{-a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} - \frac{lv_0}{a^2 \pi n} \cos \frac{\pi n t v_0}{l} + \sin \frac{\pi n t v_0}{l} \right].$$

Обчислювальний експеримент було проведено для задачі (1) – (2) при значеннях параметрів  $l=1$ ,  $a=1$ ,  $h=2$ ,  $v_0=1$ ,  $A=1$ ,  $c=1$ ,  $\sigma=1$ ,  $\rho=1$ . Для побудови наближеного розв'язку задачі (1) – (3) використано метод Гальоркіна. Наближений розв'язок задачі (1) – (3) знаходився у вигляді

$$u_n(x,t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(x),$$

де  $\varphi_k(x)$  – координатні функції.

Для визначення  $c_k(t)$  маємо систему диференціальних рівнянь

$$\sum_{i=1}^n \dot{c}_i(t) b_{ij} + \sum_{i=1}^n c_i(t) a_{ij} = l_j(t), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n c_i(0) s_{ij} = 0, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

де  $b_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$ ,  $a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]$ ,  $l_j(t) = (f, \varphi_j)$ ,  $s_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$ .

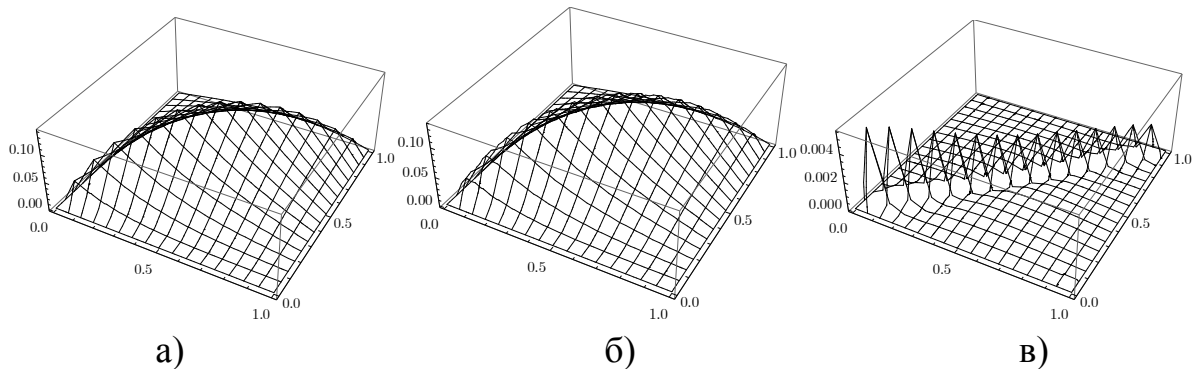


Рисунок 1 – Графіки точного розв'язку  $u^*(x,t)$  (а),  
наближеного розв'язку  $u_{15}(x,t)$  (б)  
та похибки наближеного розв'язку  $u_{15}(x,t)$  (в)