

УДК 004.942

СИСТЕМА ЛОРЕНЦЯ ЯК МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ МІСТ

Навроцький Д.О.

Наукові керівники: канд. техн. наук, доц. Наумейко І.В.,

канд. фіз.-мат. наук, доц. Сова Г.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ, каф. ВМ
м. Харків, Україна

тел. +38(057) 70-21-436, email: danylo.navrotskyi@nure.ua

The evolution of an urban system can be mathematically described by a vector field in the phase space. An interpretation of the Lorenz equations in the context of problems of urban production and population migration, showing the possibility of their application to explain the phenomenon of urban development is given.

Еволюція міської системи математично можна описати векторним полем у фазовому просторі – абстрактному просторі динамічних змінних систем.

Хаотичні, дивні атрактори відповідають непередбачуваному поведінці систем, які не мають строго періодичної динаміки, – це математичний образ детермінованих неперіодичних процесів. Дивні атрактори структуровані і можуть мати дуже складні та незвичайні конфігурації у тривимірному просторі. Лоренц (Lorenz, 1963) виявив, що навіть проста система із трьох нелінійних диференціальних рівнянь може призвести до хаотичних траєкторій.

Розглянемо у просторі метрополії таку міську систему, яка щодо економічної діяльності дуже «мала», порівняно з метрополією. Це означає, що будь-які зміни економічних умов у міській системі не впливають на весь простір метрополії, що залишається структурно стійким протягом часу спостереження.

Передбачається, що фірми та постійне населення вільні у виборі місцезнаходження і в міському просторі, і у зовнішньому світі.

Оскільки міського простору замало, вибір становища і розподіл фірм і домогосподарів у місті неспроможна проводити без розташування інших складових частин метрополії.

Передбачається, що локаційні характеристики міського простору описуються такими трьома змінними:

X – продукція, вироблена міською системою;

Y – чисельність корінного населення;

Z – земельна рента.

Продукція міської промисловості може йти на споживання населення чи експортуватися зовні. Передбачається, що можлива наступна динаміка міста, описана рівняннями з позитивними параметрами:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= a_1(a_2Y - a_3X), \\ \frac{dY}{dt} &= c_1(c_2X - c_3Y) - c_4XZ, \\ \frac{dZ}{dt} &= d_1XY - d_2Z.\end{aligned}$$

Параметр a_2 визначимо як попит на міську продукцію, нормований душу населення. Параметр аз інтерпретується як рівень пропозиції продукції всередині міста. Можна вважати a_2 та a_3 постійними, оскільки ми розглядатимемо лише невеликі відрізки часу. Тоді a_2Y – це загальний попит мешканців міської продукції, а a_3X – загальний потік міської продукції міський ринок. Таким чином, рівняння означає, що темп зміни міської продукції пропорційний надлишку попиту. Якщо попит більший за пропозицію, виробництво має тенденцію до розширення, і навпаки. Параметр a_1 – коефіцієнт, що має сенс швидкості встановлення. Для простоти припустимо, що земельна рента впливає виробництво, тобто. темп зміни залежить лише від надлишку попиту на міську продукцію.

Припускаємо, що зміна чисельності міського населення визначається двома членами $c_1(c_2X - c_3Y)$ і c_4XZ . Величину c_2 ми інтерпретуємо як попит на працю з боку фірм виробництва одиниці виробленої продукції. Отже, c_2X – це загальний попит на працю на міському ринку праці. Параметр c_3 визначається як відношення чисельності міських жителів, які обирають роботу у місті, до загальної чисельності міського населення. Величина c_3Y задає загальну величину пропозиції праці міському ринку праці. Член $(c_2X - c_3Y)$ – надлишок попиту працю у місті. Він впливає напрямок міграції. На міграцію впливає також величина земельної ренти, оскільки люди обирають для проживання місцевості з низькою ціною землю. Член c_4XZ враховує цей чинник. Ми припускали, що зміна величини земельної ренти негативно впливає її поточний рівень. Член d_1XY означає, що зміни земельної ренти позитивно впливають X та Y .

Щоб показати, що побудована система ідентична системі Лоренца, проведемо таке перетворення:

$$t = \frac{t^*}{c_1c_3}, \quad \sigma = \frac{a_{1,3}}{c_1c_3}, \quad r = \frac{a_2c_2}{a_3c_3}, \quad b = \frac{d_2}{c_1c_3}, \quad x = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d_1X}{c_1c_3}, \quad y = \left(\frac{c_4}{d_1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d_1a_2Y}{a_3c_1c_3},$$

Таким чином, ми дали інтерпретацію рівнянь Лоренца в контексті проблем міського виробництва та міграції населення, показавши можливість їх застосування для пояснення феномену розвитку міст.