

**УСЛОВИЯ ФОКУСИРОВКИ.  
РАСЩЕПЛЕНИЕ МАРКОВСКОГО  
ПРОЦЕССА НА НЕСВЯЗНЫЕ  
ФРАГМЕНТЫ**

ДИКАРЕВ В.А.

Формулируются условия фокусировки вероятностей состояний марковского процесса с дискретным множеством состояний на заданное распределение. Устанавливается возможность фокусировки диффузионного процесса. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании нейронных и компьютерных сетей, а также в экологии, экономике и технике.

В [1-3] сформулированы условия, которым должна удовлетворять инфинитезимальная матрица  $\Lambda(t)$  ( $s_0 \leq t < t_0$ ) неоднородного марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний, при выполнении которых имеет место точная фокусировка или  $\sigma$ -фокусировка. В этой статье также приводятся условия, обеспечивающие фокусировку указанных типов. Они более общие, чем соответствующие условия из [1-3], и поэтому приложимы к более широкому кругу прикладных задач. Основными условиями, которые приводят к формированию фокусирующего эффекта, являются быстро изменяющиеся во времени факторы, вызывающие сильные возмущения элементов матрицы  $\Lambda$ . Сформулируем условия фокусировки.

1. Пусть существует такая последовательность попарно непересекающихся интервалов

$$\left\{ [s_k, t_k] \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad s_k < t_k \leq s_{k+1}, \quad s_k \uparrow t_0, \quad t_0 \leq \infty$$

и такая последовательность индексов  $j_k$  ( $k=1, 2, \dots$ ), для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_i \left| \int_{s_k}^{t_k} \lambda_{ij_k}(s) ds \right| = \infty. \quad (1)$$

На множестве

$$[s_0, t_0] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [s_k, t_k] \quad (2)$$

норма матрицы  $\Lambda(s)$  ограничена одной и той же константой:  $\|\Lambda\| < C$ .

2. Предположим также, что  $\Lambda(t)$  непрерывна на отрезках  $[s_k, t_k]$  и существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{P}(\tau_k) = \hat{P}, \quad (3)$$

где  $\tau_k \in [s_k, t_k]$ ,  $\hat{P}(\tau_k)$  - нулевой собственный вектор матрицы  $\Lambda^*(\tau_k)$ .

Тогда для любого  $j$  (индекс  $j$  нумерует состояния) и любого начального распределения вероятностей, заданного в точке  $s_0 < s_1$ ,

$$\lim_{s \uparrow t_0} P_j(s_0, s) = p_j. \quad (4)$$

Здесь  $p_j$  -  $j$ -я компонента вектора  $\hat{P}$  из (3).

Если ряд (1) сходится, но его сумма достаточно велика и, начиная с  $k_0$ , все распределения  $\hat{P}(\tau_k)$  из (3), на которые фокусирует процесс в точках  $t_k$ , содержатся в  $\sigma^*$ -окрестности распределения  $\hat{P}$ , то  $t_0$  является точкой  $\sigma$ -фокусировки. Здесь  $\sigma = \inf \sigma^*$ , где  $\sigma^*$  - любая окрестность распределения  $\hat{P}$ , в которой, начиная с  $k_0$ , содержатся все  $\hat{P}(\tau_k)$ .

Рассмотрим марковский процесс с конечным числом состояний  $n$  и инфинитезимальной матрицей  $\Lambda(t)$  ( $s_0 \leq t < t_0$ ), распадающийся при  $t \uparrow t_0$  на несвязанные фрагменты, что означает следующее. Пусть левый верхний блок  $\Lambda_{11}$  матрицы  $\Lambda$ , имеющий размерность  $m \times m$ , и ее нижний правый блок  $\Lambda_{22}$  размерности  $(n-m) \times (n-m)$  удовлетворяют на  $[s_0, t_0]$  условиям 1, 2. Обозначим через  $\Lambda_{12}(t)$ ,  $\Lambda_{21}(t)$  правый верхний и левый нижний блоки матрицы  $\Lambda(t)$  (внедиагональные блоки) размерностей  $m \times (n-m)$  и  $(n-m) \times m$  соответственно. Предположим, что элементы этих блоков стремятся к нулю при  $t \uparrow t_0$ . Будем говорить, что при  $t \uparrow t_0$  процесс распадается на несвязанные фрагменты. Представляет интерес случай, когда в момент распада  $t = t_0$  происходит и фокусировка распределений процессов, отвечающих матрицам  $\Lambda_{11}$  и  $\Lambda_{22}$ , или фокусировка хотя бы одного из них. Приведем условия, при выполнении которых эти фокусировки будут иметь место.

Пусть матрицы  $\Lambda_{11}$ ,  $\Lambda_{22}$  удовлетворяют условиям 1, 2. Считаем, что последовательности интервалов  $\left\{ [s_k, t_k] \right\}_{k=1}^{\infty}$  из условия 1 являются общими для  $\Lambda_{11}$  и  $\Lambda_{22}$ . Выполнение этого условия можно добиться всегда.

Известно [4], что "близким" в смысле нормы матрицам двух линейных систем дифференциальных уравнений отвечают мало отличающиеся друг от друга решения этих систем. Считаем, что

$$\|X_k(t) - \hat{X}_k(t)\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (5)$$

Здесь  $X_k(t)$  - матрицант распадающейся системы уравнений Колмогорова с матрицей  $\Lambda(t)$ , отвечающий интервалу  $[t_k, t_{k+1}]$ ;  $\hat{X}_k(t)$  - матрицант системы Колмогорова для этого же интервала с матрицей  $\hat{\Lambda}(t)$ , полученной из  $\Lambda(t)$  заменой нулями элементов блоков  $\Lambda_{12}$ ,  $\Lambda_{21}$  с последующей коррекцией блоков  $\Lambda_{11}$ ,  $\Lambda_{22}$ . Эта коррекция состоит в замене элементов  $\lambda_{ii}(t)$  данных блоков величинами  $\hat{\lambda}_{ii}(t)$ :

$$\hat{\lambda}_{ii}(t) = \lambda_{ii}(t) + \Delta_i(t),$$

где

$$\Delta_i(t) = \sum_{j=m+1}^n \lambda_{ij}(t), \quad i=1, \dots, m,$$

$$\Delta_i(t) = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}(t), \quad i=m+1, \dots, n.$$

Условие (5) будет выполняться, если убывание к нулю элементов блоков  $\Lambda_{12}$ ,  $\Lambda_{21}$  достаточно быстрое

[4]. Матрица  $\hat{\Lambda}(t)$  блочно-диагональная. Ее блоки  $\hat{\Lambda}_{11}(t)$ ,  $\hat{\Lambda}_{22}(t)$  являются инфинитезимальными матрицами, точка  $t_0$  – их общая точка фокусировки.

**Теорема.** Пусть матрица  $\Lambda(t)$  распадающегося процесса удовлетворяет перечисленным выше условиям. Тогда для произвольного распределения вероятностей, заданного в любой точке  $s \in [s_0, t_0)$  вероятности состояний  $p_j(s, t)$  распадающегося процесса, имеют пределы при  $t \uparrow t_0$ :

$$\lim_{t \uparrow t_0} p_j(s, t) = p_j^* \quad (6)$$

Вектор  $\hat{p}^*$  с компонентами  $p_j^*$  имеет вид

$$\hat{p}^* = (\alpha \hat{p}_1^*, (1-\alpha) \hat{p}_2^*) \quad (7)$$

Здесь  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\hat{p}_1^*$ ,  $\hat{p}_2^*$  – распределения, на которые фокусируются при  $t \uparrow t_0$  блоки  $\hat{\Lambda}_{11}$ ,  $\hat{\Lambda}_{22}$ .

Если лишь один из диагональных блоков (для определенности блок  $\Lambda_{11}$ ) удовлетворяет условиям 1, 2, но (5) по-прежнему выполняется, то формулировка теоремы несколько изменится. Теперь (6) будет иметь место только для  $j = 1, \dots, m$ . Равенство (7) сохраняется лишь частично:  $\alpha$  и  $\hat{p}_1^*$  те же, что и в (7), но  $\hat{p}_2^*$  не есть вектор, на который фокусирует блок  $\hat{\Lambda}_{22}$ .

Если (5) имеет место и каждый из блоков  $\hat{\Lambda}_{11}$ ,  $\hat{\Lambda}_{22}$   $\sigma$ -фокусирует при  $t \uparrow t_0$  на векторы распределений  $\hat{p}_1^*$ ,  $\hat{p}_2^*$  соответственно, то распадающийся процесс  $\sigma$ -фокусирует на  $\hat{p}^* = (\alpha \hat{p}_1^*, (1-\alpha) \hat{p}_2^*)$ .

Если при  $t \uparrow t_0$  один из диагональных блоков, например,  $\Lambda_{11}$  фокусирует на  $\hat{p}_1^*$ , а  $\Lambda_{22}$   $\sigma$ -фокусирует на  $\hat{p}_2^*$  и (5) имеет место, то распадающийся процесс осуществляет точную фокусировку первых  $m$  компонент на  $\alpha \hat{p}_1^*$  и  $\sigma$ -фокусирует последние  $n-m$  компонент на  $(1-\alpha) \hat{p}_2^*$ .

Во всех перечисленных случаях скалярный множитель  $\alpha$  в (7) зависит от начального распределения вероятностей, точки  $s$ , в которой оно задается, и быстроты убывания к нулю элементов блоков  $\Lambda_{12}$ ,  $\Lambda_{21}$ .

Рассмотрим вопрос о фокусировке распределений неоднородного диффузионного процесса. Считаем, что диффундирующая частица в начальный момент  $t=0$  находится в начале координат и что процесс диффузии происходит на плоскости (случай большей размерности рассматривается аналогично). Обозначим через  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  координаты частицы в момент  $t$ . Предположим, что смещение частицы в направлениях ортогональных осей  $OX_1$  и  $OX_2$  происходит независимо. Это означает, что при любом  $t$  случайные величины  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  независимы. Тогда

каждая из них имеет нормальную плотность вероятности.

Для определенности рассмотрим случайную величину  $\xi_1(t)$ . На непересекающихся интервалах  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$  смещение частицы представляется независимыми величинами  $\xi(t_1)$ ,  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ , ...,  $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ , ... . Значит, при  $\xi(s) = y$ ,  $\xi(t) = x$ ,  $s < t$  условное распределение в момент  $t$  имеет вид

$$p(s, y, t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Здесь  $\sigma^2 = \sigma^2(s, t, y, x)$  определяет суммарный диффузионный эффект при смещении частицы из  $y$  в  $x$  за промежуток  $(s, t)$ .

Разобьем всю числовую прямую  $-\infty < x < \infty$  на  $n$  частей точками деления  $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$ . Если  $\xi(t) \in (x_{i-1}, x_i)$  ( $x_0 = -\infty$ ,  $x_n = \infty$ ), считаем, что частица находится в состоянии  $A_i$ . Вероятность перехода из  $A_i$  в  $A_j$  за промежуток  $(t, t + \Delta t)$  равна

$$\begin{aligned} P(\xi(t + \Delta t) \in A_j | \xi(t) \in A_i) &= \\ &= \int_{A_i} \left[ \int_{A_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}} dx \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_0^2}} dy, \\ \sigma &= \sigma(t, t + \Delta t, y, x), \quad \sigma_0 = \sigma(0, t, 0, y). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что для любого  $t$  при соответствующем изменении  $\sigma^2(s, t, y, x)$  приближенная фокусировка будет иметь место. Точная фокусировка невозможна, так как для ее реализации необходимо, чтобы  $\sigma^2(s, t, y, x)$  принимала сколь угодно большие значения. Однако многократным повторением фокусирующего фактора можно добиться фокусировки с любой наперед заданной точностью.

**Литература:** 1. Дикарев В. А. Точки фокусировки и теоремы о существовании предельных вероятностей. Харьков. 1995. 11с. Рук. деп. в ГТНБ Украины 28.02.95. №526 – Ук. 95. 2. Дикарев В. А. Точки фокусировки и стабилизация неоднородных марковских процессов. Харьков. 1995. 9с. Рук. деп. в ГТНБ Украины 28.02.95. №533 – Ук. 95. 3. Герасин С. Н., Дикарев В. А., Числин Н. И. Существование предельных вероятностей для конечных процессов Маркова с убывающими к нулю временными промежутками переходов // Докл. национальной академии наук Украины, №7. 1998. 4. Якубович В. Я., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328с.

Поступила в редколлегию 06.09.98

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук Руткас А.Г.

**Дикарев Вадим Анатольевич**, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: функциональный анализ, дифференциальные уравнения, случайный анализ и его применения. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 33-57-03, 40-94-36.