

УДК 517.927:519.6

## **ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО МОДЕЛЮВАННЯ МЕМС-АКТЮАТОРА З ВІЛЬНИМ КІНЦЕМ ТА ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ШАРОМ**

Савченко А.В.

e-mail: anton.savchenko@nure.ua

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

The aim of this study is to apply the method of two-sided approximations to solve a nonlinear boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation. The considered mathematical model arises in the process of studying the static deflection of a cantilever beam. In particular, this problem has found wide application in microelectromechanical systems (MEMS). Thus, the current task is to develop reliable numerical-analytical methods to solve it. In this study, we suggest applying the two-sided approximation method based on the use of the Green's function.

Активний розвиток мікроелектромеханічних систем (МЕМС), зокрема електростатичних мікроконсольних актюаторів та перемикачів, вимагає точного математичного моделювання їхньої механічної поведінки. Математичною моделлю задачі про статичний прогин балки є напівлінійна крайова задача для звичайного диференціального рівняння четвертого порядку. У безрозмірних змінних рівняння рівноваги набуває вигляду [1, 2]:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{\lambda}{(\mu + 1 - u(x))^2}, \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

де  $u(x)$  – функція прогину балки,  $\lambda$  – коефіцієнт, що пропорційний прикладеній напрузі до системи,  $\mu$  – параметр діелектричного шару.

Розглянемо випадок, коли балка закріплена консольно, тобто лівий кінець жорстко закріплений, а правий – вільний. У такому випадку отримуємо крайові умови вигляду:

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u''(1) = u'''(1) = 0. \quad (2)$$

До розв'язання задачі (1), (2) застосуємо метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна, який полягає в заміні крайової задачі еквівалентним інтегральним рівнянням Гаммерштейна та знаходженні його чисельного розв'язку методами нелінійного аналізу в напівупорядкованих банахових просторах [3].

Функція Гріна крайової задачі (1), (2) має вигляд

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{2} x \cdot \xi^2 - \frac{1}{6} \cdot \xi^3, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Безпосередньо перевіряється, що функції Гріна (3)  $G(x, \xi) \geq 0$  для всіх  $0 \leq x, \xi \leq 1$ .

Якщо  $G(x, s)$  – функція Гріна крайової задачі (1), (2), то еквівалентне інтегральне рівняння Гаммерштейна має вигляд

$$u(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(\mu + 1 - u(s))^2} ds. \quad (4)$$

Сенс еквівалентності крайової задачі (1), (2) та інтегрального рівняння (4) полягає у тому, що класичний розв’язок задачі (1), (2) також задовольняє рівняння (4), а узагальненим розв’язком крайової задачі (1), (2) буде функція  $u^* \in C[0, 1]$ , що є розв’язком інтегрального рівняння (4).

У конусі  $K_+$  невід’ємних функцій з  $C[0, 1]$  виділимо інваріантний конусний відрізок  $\langle v_0, w_0 \rangle$ . Оскільки  $f(x, 0) = \frac{\lambda}{(\mu + 1)^2} > 0$ , то шукатимемо його

у вигляді  $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle 0, \beta \rangle$ , де  $0 < \beta < 1$ . Можна показати, що для швидшої збіжності ітераційного процесу за  $\beta$  слід обрати найменший корінь рівняння

$$\lambda M = \beta(\mu + 1 - \beta)^2, \quad (5)$$

$$\text{де } M = \max_{x \in [0, 1]} \int_0^1 G(x, s) ds.$$

Сформулюємо далі ітераційний процес за схемою:

$$v^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(\mu + 1 - v^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$w^{(k+1)}(x) = \lambda \int_0^1 \frac{G(x, s)}{(\mu + 1 - w^{(k)}(s))^2} ds, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$v^0(x) = v_0(x) = 0, \quad w^0(x) = w_0(x) = \beta. \quad (8)$$

Теорема 1. Якщо рівняння (5) має розв’язок  $\beta \in (0; 1)$  і  $\frac{2\lambda M}{(\mu + 1 - \beta)^3} < 1$ , то крайова задача (1), (2) має єдиний додатний розв’язок  $u^*(x)$ , до якого двобічно збігається ітераційний процес (6) – (8).

Обчислювальний експеримент проведено для наступних значень параметрів

$$\lambda = 10,5, \quad \mu = 1,1. \quad (9)$$

Для функції Гріна (4) маємо, що  $M = \frac{1}{8}$ . Інваріантний конусний відрізок шукаємо у вигляді  $\langle 0, \beta \rangle$ , де  $\beta$  визначається з рівності (5). Обчисливши,

отримуємо, що  $\beta = 0,537821$ . Тоді  $\frac{2\lambda M}{(\mu + 1 - \beta)^3} = 0,6886... < 1$ , а отже, виконана умова збіжності ітераційного процесу відповідно до теореми 1.

Задаємо точність  $\delta = 10^{-4}$  та проводимо ітераційний процес (6) – (8). Процес зійшовся із заданою точністю за сім ітерацій.

Задача (1) – (2) також досліджувалась у [2], де розглядається вплив діелектричного шару на напружено-деформований стан балки перед настанням pull-in нестабільності. У роботі авторами запропоновано застосувати модифікований метод декомпозиції Адомяна (MADM), суть якого полягає у розкладанні нелінійної частини диференціального рівняння в ряд за спеціальними поліномами Адомяна, що дозволяє шукати розв’язок у вигляді нескінченного степеневого ряду. Для проведення практичних розрахунків автори обмежуються частковою сумою цього ряду, невідомі коефіцієнти якого визначаються з крайових умов.

Для тестових параметрів (9) у точці найбільшого відхилення (на вільному кінці балки при  $x = 1$ ) розраховане нами значення прогину становить  $u^*(1) = 0,388014$ . Для порівняння, підстановка цих же параметрів у функцію, отриману методом MADM, дає значення прогину  $u_{MADM}(1) = 0,382858$ . Найявна розбіжність результатів пояснюється методологічними особливостями алгоритмів. Точність розв’язку в методі MADM суттєво залежить від кількості утриманих членів ряду. Хоча розв’язок можна асимптотично уточнювати додаванням вищих степенів, сам метод не надає строгої внутрішньої оцінки похибки. Натомість метод двобічних наближень завдяки доведеній монотонності інтегрального оператора при реалізації ітераційного процесу на кожному кроці генерує гарантовану двобічну оцінку абсолютної похибки, уникаючи необхідності застосування сторонніх чисельних процедур перевірки.

#### Список використаних джерел:

1. Koочи A., Abadyan M. Nonlinear differential equations in micro/nano mechanics : Application in micro/nanostructures and electromechanical systems. Amsterdam : Elsevier, 2020. 270 p.
2. Yazdanpanahi E., Noghrehabadi A., Ghalambaz M. Effect of dielectric-layer on the stress field of micro cantilever beams at the onset of pull-in instability. *Journal of Mechanics*. 2014. № 30 (1). P. 49–56.
3. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen : P. Noordhoff, 1964. 379 p.