

ПОСТАНОВКА ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ТЕПЛОВИМИ ПРОЦЕСАМИ

Кожин А.Ю.

email: andrii.kozhyn@nure.ua

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Гибкіна Н.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки,
кафедра прикладної математики
м. Харків, Україна

The optimal control of thermal processes is modeled using quasilinear parabolic partial differential equations. Due to strict phase and control constraints, we apply indirect sequential unconstrained minimization methods utilizing penalty or barrier functions. The synthesis of optimal control is formulated as the iterative minimization of a combined target functional using gradient and conjugate direction algorithms. To address complex geometric domains, an analytical-numerical approach based on R-function theory can be used. This framework enables the exact satisfaction of boundary conditions at the analytical level, significantly reducing discretization errors and ensuring high computational accuracy for complex nonlinear thermal control tasks.

Задачі оптимального керування системами з розподіленими параметрами, динаміка яких описується диференціальними рівняннями параболічного типу [1], відіграють ключову роль у математичному моделюванні складних фізичних, хімічних та інженерних процесів. Сучасні технологічні вимоги часто диктують необхідність підтримання суворих температурних режимів, що зумовлює актуальність розробки ефективних та точних алгоритмів керування тепловими процесами у неоднорідних середовищах. Фундаментальною проблемою при синтезі таких систем є наявність строгих обмежень на фазові координати або керуючі впливи. У контексті керування тепловими процесами ці обмеження мають чітке фізичне та технологічне підґрунтя. З одного боку, існують апаратні ліміти на потужність джерел тепла (керуючі впливи), які не можуть генерувати нескінченну енергію або охолоджувати середовище нижче певних фізичних меж. З іншого боку, накладаються жорсткі обмеження на фазові координати (температурне поле), оскільки перевищення критичних температур може призвести до фазових переходів, плавлення, деградації матеріалу або виникнення незворотних термічних напружень. Ця особливість унеможливорює пряме застосування класичних алгоритмів безумовної оптимізації, вимагаючи залучення спеціалізованого математичного апарату.

Особливу ефективність демонструють методи послідовної безумовної мінімізації, які апроксимують вихідну задачу умовної оптимізації шляхом введення спеціальних штрафних або бар'єрних функцій. Концептуальна ідея методу полягає у модифікації цільового функціонала таким чином, щоб

штучно погіршувати його значення при кожному виході системи за межі допустимої області керувань або станів. Це реалізується через додавання невід'ємного штрафного доданку, який дорівнює нулю всередині дозволеної технологічної зони, але стрімко зростає при порушенні встановлених меж. У процесі ітераційного пошуку ваговий коефіцієнт штрафу поступово збільшується, що змушує послідовність наближень збігатися до оптимального розв'язку.

Розглядається задача оптимального керування динамічною системою, що описується у області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \{1, 2, 3\}$) з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$ протягом заданого фіксованого часового інтервалу $[t_0, t_1]$. Нехай $\mathcal{X}$ – гільбертів простір станів (зокрема $L^2(\Omega)$). Фазова траєкторія системи $y(x, t) \in \mathcal{X}$ описується квазілінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними параболічного типу [2]:

$$c(x) \frac{\partial y}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda(x) \nabla y) + \mathcal{B}u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (t_0, t_1],$$

де $c(x)$ та $\lambda(x)$ – просторово-залежні коефіцієнти питомої теплоємності та теплопровідності відповідно, які у випадку неоднорідних або композитних середовищ можуть мати розриви.

Керуючий вплив $u(x, t) \in \mathcal{U}$ обмежений технологічними рамками $u_{\min} \leq u(x, t) \leq u_{\max}$.

Оператор $\mathcal{B}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{X}$ є лінійним обмеженим оператором, що формалізує просторовий розподіл керуючого впливу.

Початкові та граничні умови задаються у вигляді:

$$y(x, t_0) = y_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\alpha y(x, t) + \lambda(x) \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [t_0, t_1].$$

Синтез оптимального керування $u^*(x, t)$ зводиться до задачі мінімізації цільового функціонала $J(u)$, який має комбіновану структуру і включає термінальну вартість (оцінку фінального стану) та інтегральну вартість (оцінку траєкторії та витрат):

$$J(u) = \Phi(y(x, t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(y(x, t), u(x, t), t) dt \rightarrow \min_{u \in \mathcal{U}}.$$

У задачах керування тепловими процесами цей функціонал зазвичай виражає компроміс між точністю досягнення бажаного температурного профілю $z_d(x)$ та квадратичним штрафом за витрачену на керування енергію:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y(x, t_1) - z_d(x)|^2 dx + \frac{\gamma}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx dt.$$

Оскільки отримання точного аналітичного розв'язку для квазілінійних систем із розподіленими параметрами за наявності строгих обмежень на керування є дуже складним, виникає необхідність переходу до чисельних методів. Відповідно, знаходження оптимального керування вимагає застосування процедур ітераційної мінімізації таких як:

- градієнтні методи першого порядку;
- методи спряжених напрямків;
- аналітико-чисельні методи.

Градієнтні методи першого порядку характеризуються тим, що оновлення керування відбувається в напрямку антиградієнта, а метод забезпечує лінійну збіжність, проте для жорстких параболічних систем характеризується ефектом осциляцій поблизу мінімуму.

Методи спряжених напрямків використовують інформацію про попередні кроки пошуку для побудови ортогональної системи векторів в просторі керувань $\mathcal{H}$. Значно прискорюють збіжність (сублінійна швидкість) без необхідності обчислення других похідних;

Переваги аналітико-чисельних методів полягають у наступному. У випадках складних геометричних областей Ω стандартна дискретизація простору генерує значну обчислювальну похибку. Теорія R-функцій дозволяє точно задовольняти граничні умови на аналітичному рівні, що зводить задачу до мінімізації функціонала нев'язки на внутрішній множині та радикально підвищує точність розрахунку спряженої змінної $p(x, t)$.

У роботі здійснено постановку задачі оптимального керування тепловими процесами, що описуються рівняннями параболічного типу. Оскільки пряме застосування класичних алгоритмів оптимізації ускладнене наявністю строгих обмежень на фазові координати та керування, обґрунтовано перехід до методів послідовної безумовної мінімізації із застосуванням штрафних або бар'єрних функцій. Здійснено огляд та підбір чисельних ітераційних методів, які можуть бути використані для пошуку оптимального керування та мінімізації цільового функціонала. Серед них виділено градієнтні методи першого порядку, які забезпечують лінійну збіжність. Також для подальшого використання підібрано методи спряжених напрямків, що дозволяють прискорити збіжність без необхідності обчислення других похідних. Строге математичне формулювання задачі створює надійну основу для застосування відібраних ітераційних методів.

Список використаних джерел:

1. Guliyev H. F., Jabbarova K. Sh. On an optimal control problem for weakly nonlinear hyperbolic equations. *Acta Mathematica Hungarica*. № 3. С. 197–207. DOI:10.1007/s10474-011-0074-6.
2. Liberzon D. *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. 1st ed. Princeton University Press, 2012. ISBN 978-0-691-15187-8.