УДК 621.385.69

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ЕЛЕКТРОННОГО КІЛЬЦЯ, ЩО РУХАЄТЬСЯ УЗДОВЖ НЕОДНОРІДНОЇ ХВИЛЕВОДНОЇ СТРУКТУРИ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Пропонується новий аналітичний метод, заснований на підсумовуванні рядів за вибірковими значеннями у гільбертовому просторі з відтворюючим ядром, який дозволяє спростити відомі методи розв'язання граничних електродинамічних задач і знизити вартість чисельних розрахунків, що є актуальним і практично доцільним.

1. Вступ

Фізичним і технічним застосуванням неоднорідних хвилеводних структур, збуджуваних електронами, що рухаються, присвячені, зокрема, роботи [1,2]. Більшість методів, використовуваних при дослідженні та моделюванні електродинамічних структур, грунтується на класичній теорії, аналітичних розрахунках, чисельних і експериментальних результатах. Розв'язання багатьох граничних задач математичної фізики пов'язано з рядами. Вони виникають у процесі рішення різних задач, наприклад, у теорії дифракції електромагнітних хвиль на періодичних структурах [3], у задачах дифракційної електроніки [4], при вивченні дифракції хвиль на періодичних структурах з похилих напівплощин [5]. У задачах теорії антен також застосовуються ряди певного типу [6, 7]. Дослідження збіжності, чисельний експеримент і альтернативні зображення для рядів типу Шльомильха з функціями Беселя при рішенні двовимірних дифракційних задач наведено у [8]. Іноді вдається здобути суму ряду. У цьому випадку результати розв'язку граничної задачі можна представити аналітично.

2. Постановка задачі

Розглянемо неоднорідну хвилеводну структуру, що являє собою два круглих хвилеводи радіусів a, b (a<b), з'єднаних коаксиально між собою фланцем у площині $z = 0$, як в [1]. У цій структурі рухається джерело електромагнітного випромінювання у вигляді електронного кільця, вісь якого збігається з віссю хвилеводів. У круглому однорідному хвилеводі джерело не випромінює. Електромагнітне поле зарядженого кільця, що рухається в хвилеводі, у власній системі координат являє собою електро- або магнітостатичне поле кільця в трубі. Математично це означає відсутність хвилеводних гармонік, що поширюються, у розкладанні поля джерела, яке рухається, за власними хвилями однорідного хвилеводу. Наявність неоднорідностей приводить до збудження гармонік, які вільно поширюються, тобто до випромінювання.

Відомо, що в круглому хвилеводі можуть поширюватися власні хвилі Е- і Н-типів. Вони існують незалежно, і їхнє порушення визначається видом джерела поля. При дослідженні втрат енергії на випромінювання електронними кільцями, що рухаються, варто розглядати поле випромінювання обох поляризацій. Заряджене кільце, яке рівномірно рухається уздовж осі структури й обертається навколо неї, можна описати вектором щільності струму $\vec{j}$ з двома компонентами: подовжнім $\vec{j}_z$, що пов'язаний з поступальним рухом кільця й описує подовжні електричні хвилі (Е-хвилі); поперечним $\vec{j}_\varphi$, що обумовлений обертанням кільця й описує подовжні магнітні хвилі (Н-хвилі).

Для кільця, що рівномірно рухається уздовж осі z зі швидкістю $v_z = v$ й обертається зі швидкістю v_φ, з радіусом ρ і повним зарядом Q, рівномірно розподіленим за його довжиною, щільність струму дорівнює

$$\vec{j} = vQ\frac{\delta(r-\rho)}{2\pi\rho}\delta(z - vt). \qquad (1)$$

Повне поле в структурі представляється у вигляді суми поля джерела $\vec{E}^0(\vec{r},t)$, $\vec{H}^0(\vec{r},t)$ і суперпозиції власних хвиль $\vec{E}^j$, $\vec{H}^j$, $j = 1,2$, яку слід додати до поля джерела для того, щоб задовольнити крайовим умовам. Для хвиль Е- і Н-типів складові електромагнітного поля відмінні від нуля. Усі поля представляються у вигляді розкладань в інтеграл Фур'є за частотою. Розгляд проводиться на прикладі подовжніх Е-хвиль.

Електромагнітне поле зарядженого кільця в однорідному хвилеводі радіуса R на частоті ω має вигляд

$$E^0_{z\omega}(r,z) = \left\{\begin{bmatrix} I_0(\Gamma r)K_0(\Gamma\rho) \\ K_0(\Gamma r)I_0(\Gamma\rho)\end{bmatrix} - I_0(\Gamma r)\frac{K_0(\Gamma R)}{I_0(\Gamma R)}\right\}\times$$

$$\times\frac{ikQ}{\pi c\beta^2\gamma^2}\exp(i\omega z/v), \quad \begin{matrix} r \le \rho \\ r \ge \rho \end{matrix} \qquad (2)$$

$$E^0_{r\omega}(r,z) = \left\{\begin{bmatrix} -I_1(\Gamma r)K_0(\Gamma\rho) \\ K_1(\Gamma r)I_0(\Gamma\rho)\end{bmatrix} + I_1(\Gamma r)\frac{K_0(\Gamma R)}{I_0(\Gamma R)}\right\}\times$$

$$\times\frac{Q\Gamma}{\pi v}\exp(i\omega z/v), \quad \begin{matrix} r \le \rho \\ r \ge \rho \end{matrix} \qquad (3)$$

$$H^0_{\varphi\omega}(r,z) = \beta E^0_{r\omega}(r,z), \qquad (4)$$

де $k = \omega/c$ — хвильове число; $\beta = v/c$; $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ — кінетична енергія зарядженого кільця, віднесена до енергії спокою; $\Gamma = |k/\gamma\beta|$. Верхній рядок у квадратних дужках варто брати при $r \le \rho$; нижній — при $r \ge \rho$.

Потрібно знайти електромагнітне поле розглянутої структури, а саме визначити аналітично коефіцієнти збудження власних хвиль, що є *метою* цієї роботи.

3. Метод рішення

Сформульована задача вирішується методом часткових областей із застосуванням методу підсумовування рядів за вибірковими значеннями у гільбертовому просторі з відтворюючим ядром. Як відомо, метод часткових областей застосовується для дослідження складних структур, які можна розподілити на більш прості суміжні підобласті. Для кожної з них можна одержати рішення шляхом розподілу змінних. Невідомі поля для кожної часткової області представляються у вигляді розкладання за власними функціями. У циліндричній системі координат компоненти електромагнітного поля є рішеннями рівняння Гельмгольца у відповідній області. Отже, задача зводиться до визначення амплітудних коефіцієнтів при власних функціях у розкладанні поля для кожної часткової області. Для цієї мети слід задовольнити граничні умови поля. У результаті виникає нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) щодо невідомих амплітуд хвиль. У загальному випадку можна знайти тільки наближене рішення цієї нескінченної системи методами редукції або послідовних наближень. Іноді вдається одержати рішення модифікованим методом відрахувань або методом Вінера-Хопфа. Звичайно, після цього для рішення системи застосовуються чисельні методи, як у [1].

Існує клас граничних задач, для яких нескінченна СЛАР допускає точний розв'язок. Розширити його дозволяє метод розкладання функцій у ряд за вибірковими значеннями у гільбертовому просторі з відтворюючим ядром.

Для цього використовуються така теорема і наслідок з неї.

Теорема. *Нехай є абстрактний гільбертовий простір* H *з відтворюючим ядром* $K(s,t)$*, визначеним на множині* T. *Нехай* $\{\varphi_i(s,t_i)\}$, $t_i \in T$ *– повна ортонормована система в* H. *Якщо існують ненульові дійсні постійні* c_i *такі, що*

$$\varphi_i(s,t_i) = c_i K(s,t_i), \ |K(t,t)| \le c_i < \infty, \ t \in T, \quad (5)$$

то розкладання за повною ортонормованою системою для кожної $f \in A$*, що має вигляд*

$$f(s) = \sum a_i \varphi_i(s,t_i), \ s \in T, \ a_i = (f, \varphi_i), \quad (6)$$

є ряд за вибірковими значеннями.

Наслідок. У гільбертовому просторі з відтворюючим ядром H будь-яка функція $F \in H$ розкладається в ряд за вибірковими значеннями:

$$F(x) = \sum_{s=1}^{\infty} F(t_s) \frac{2(xt_s)^{1/2}}{\pi J_{\nu+1}(\pi t_s)} \frac{J_\nu(\pi x)}{(t_s^2 - x^2)}, \ 0 \le x < \infty, \quad (7)$$

де πt_s – позитивні нулі функції Беселя.

4. Рішення задачі

Рішення однорідних рівнянь Максвелла в кожній з областей має вигляд [1]:

$$E^{(1)}_{z\omega}(r,z) = -i\sum_n A_n \frac{\nu_n}{a} J_0(\frac{\nu_n}{a} r) \exp(-ih_n z), z \le 0; \quad (8)$$

$$E^{(1)}_{r\omega}(r,z) = \sum_n A_n h_n J_1(\frac{\nu_n}{a} r) \exp(-ih_n z), \ z \le 0; \quad (9)$$

$$H^{(1)}_{\varphi\omega}(r,z) = -k\sum_n A_n J_1(\frac{\nu_n}{a} r) \exp(-ih_n z), \ z \le 0; \quad (10)$$

$$E^{(2)}_{z\omega}(r,z) = i\sum_n B_n \frac{\nu_n}{b} J_0(\frac{\nu_n}{b} r) \exp(i\chi_n z), \ z \ge 0; \quad (11)$$

$$E^{(2)}_{r\omega}(r,z) = \sum_n B_n \chi_n J_1(\frac{\nu_n}{b} r) \exp(i\chi_n z), \ z \ge 0; \quad (12)$$

$$H^{(2)}_{\varphi\omega}(r,z) = k\sum_n B_n J_1(\frac{\nu_n}{b} r) \exp(i\chi_n z), \ z \ge 0, \quad (13)$$

де $h_n = \sqrt{k^2 - (\nu_n / a)^2}$, $\chi_n = \sqrt{k^2 - (\nu_n / b)^2}$ – постійні поширення хвиль у хвилеводі радіуса a і b відповідно; $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функції Беселя; ν_n – корені рівняння $J_0(x) = 0$. В обох областях розсіяне поле зображується у вигляді набору хвиль, що розходяться від місця стику хвилеводів.

Підпорядковуючи компоненти поля граничним умовам на стику хвилеводів, тобто прирівнюючи нулю дотичні складового електричного поля E_r при $z = 0$, $a \le r \le b$ і забезпечуючи безперервність E_r, H_φ при $z = 0$, $r \le a$, одержуємо систему рівнянь для коефіцієнтів збудження власних хвиль. Шукані коефіцієнти B_n повинні задовольняти такій нескінченній системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$B_n \chi_n + \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_{ns} B_s = f_n, \ n = 1,2,\ldots, \quad (14)$$

де

$$\alpha_{ns} = 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_n J_0(y_n) y_s J_0(y_s)}{J_1^2(\nu_n)} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{(\nu_m^2 - y_n^2)(\nu_m^2 - y_s^2)}, \quad (15)$$

$$y_n = \nu_n a / b, \ \Phi = \frac{K_0(\Gamma b)}{I_0(\Gamma b)} - \frac{K_0(\Gamma a)}{I_0(\Gamma a)}, \quad (16)$$

$$f_n = -\frac{2Q\Gamma I_0(\Gamma\rho)}{\pi v} \frac{y_n J_0(y_n)}{J_1^2(\nu_n)} \times$$
$$\times \left\{ \frac{2\beta}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Gamma I_0(\Gamma a) \Phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{(\nu_m^2 - y_n^2)(\Gamma^2 a^2 + \nu_m^2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Gamma I_0(\Gamma a)(\Gamma^2 b^2 + \nu_n^2)} \right\}. \quad (17)$$

Коефіцієнти A_m виражаються при цьому через B_n:

$$A_m = -\frac{2}{J_1(\nu_m)} \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{y_s J_0(y_s)}{\nu_m^2 - y_s^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{Q\Gamma a I_0(\Gamma\rho) I_0(\Gamma a) \Phi}{\pi v \gamma (\Gamma^2 a^2 + \nu_m^2)} \right\}. \quad (18)$$

Підставимо (15) у (14):

$$B_n\chi_n + \sum_{s=1}^{\infty} B_s 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_n J_0(y_n) y_s J_0(y_s)}{J_1^2(\nu_n)} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{(\nu_m^2 - y_n^2)(\nu_m^2 - y_s^2)} = f_n, \; n = 1,2,...,$$

або

$$B_n\chi_n + 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_n J_0(y_n)}{J_1^2(\nu_n)} \sum_{s=1}^{\infty} B_s y_s J_0(y_s) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{(\nu_m^2 - y_n^2)(\nu_m^2 - y_s^2)} = f_n, \; n = 1,2,... . \quad (19)$$

У (19) змінюємо порядок підсумовування:

$$B_n\chi_n + C_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{\nu_m^2 - y_n^2} \times$$

$$\times \sum_{s=1}^{\infty} B_s y_s J_0(y_s) \frac{1}{\nu_m^2 - y_s^2} = f_n, \; n = 1,2,..., \quad (20)$$

де $C_n = 4\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{y_n J_0(y_n)}{J_1^2(\nu_n)}$. У (20) розглянемо ряд за індексом s:

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{y_s J_0(y_s)}{\nu_m^2 - y_s^2} = -\sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{y_s J_0(y_s)}{y_s^2 - \nu_m^2}, \; m = 1,2,... . (21)$$

Знайдемо його суму, використовуючи (7). З цією метою коефіцієнт $B_s \equiv B_s(m)$ виразимо через нову невідому допоміжну константу D_m таким чином:

$$B_s \equiv B_s(m) = D_m J_0(\pi\nu_m) \frac{2(\nu_m y_s)^{1/2}}{\pi J_1(\pi y_s)}, m = 1,2,... \quad (22)$$

Приводимо ряд (22) до вигляду (7) і знаходимо його суму:

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{y_s J_0(y_s)}{y_s^2 - \nu_m^2} =$$

$$= D_m \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\pi\nu_m) \frac{2(\nu_m y_s)^{1/2}}{\pi J_1(\pi y_s)} \frac{y_s J_0(y_s)}{y_s^2 - \nu_m^2} =$$

$$= D_m \sum_{s=1}^{\infty} y_s J_0(y_s) \frac{2(\nu_m y_s)^{1/2}}{\pi J_1(\pi y_s)} \frac{J_0(\pi\nu_m)}{y_s^2 - \nu_m^2} =$$

$$= D_m y_s J_0(y_s)\big|_{y_s = \nu_m} = D_m \nu_m J_0(\nu_m). \quad (23)$$

Оскільки ν_m – нулі функції $J_0(x)$, тобто корені рівняння $J_0(\nu_m) = 0$, сума ряду (23) дорівнює нулеві:

$$\sum_{s=1}^{\infty} B_s \frac{y_s J_0(y_s)}{y_s^2 - \nu_m^2} = 0. \quad (24)$$

Таким чином, рівняння (20), а отже, і (14) з урахуванням (24) набуває вигляду:

$$B_n \chi_n = f_n, \quad n = 1,2,.. . \quad (25)$$

З останнього рівняння випливає пряма формула для обчислення коефіцієнтів B_n:

$$B_n = \frac{f_n}{\chi_n}, \quad n = 1,2,.. . \quad (26)$$

З урахуванням (24) коефіцієнти A_m, що визначаються формулою (18), розраховуються як:

$$A_m = -\frac{2Q\Gamma a I_0(\Gamma\rho) I_0(\Gamma a)\Phi}{J_1(\nu_m)\pi\nu\gamma(\Gamma^2 a^2 - \nu_m^2)}. \quad (27)$$

5. Висновки

Таким чином, проведено аналітичний розрахунок електромагнітного поля, що виникає при прольоті електронного кільця повз елементарну неоднорідність у круглому хвилеводі. Коефіцієнти розкладання поля в ряди здобуті в явному вигляді в термінах відомих функцій. Для їхнього визначення використано новий аналітичний метод, заснований на підсумовуванні рядів за вибірковими значеннями у гільбертовому просторі з відтворюючим ядром. Це дало можливість уникнути рішення нескінченної СЛАР щодо невідомих амплітудних множників і одержати для них формули в явному вигляді. Очевидно, що запропонований підхід дозволяє спростити відомі методи розв'язання граничних електродинамічних задач. У [1] нескінченна система (14) вирішувалася чисельно за допомогою ЕОМ. Таке рішення є наближеним, оскільки для його одержання утримувалося кінцеве число рівнянь у системі. При цьому у виразі (15) для α_{ns} в сумі враховувалося також лише кінцеве число доданків. Практичні застосування здобутих результатів визначаються можливістю їхнього використання при розрахунку інтенсивності електромагнітного випромінювання, поляризації, втрат на збудження хвиль.

Література: 1. *Воскресенский Г.В., Курдюмов В.Н.* Излучение электронного кольца при пролете возле стыка двух круглых волноводов // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. Т.XIV, №5. С. 778-787. **2.** *Гандель Ю.В., Загинайлов Г.И., Турбин П.В., Мищенко Е.А.* Численный анализ электродинамических свойств волноводов с прямоугольными нерегулярностями методом дискретных особенностей / Труды VIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Украина, Крым. 1-5 июня 1999. С. 17-19. **3.** *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288с. **4.** *Шестопалов В.П.* Дифракционная электроника. Харьков: Выща шк., 1976. 232 с. **5.** *Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А.* Матричные уравнения типа свертки в теории дифракции. К.: Наук. думка, 1984. 296с. **6.** *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 328с. **7.** *Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч.* Теория и анализ фазированных антенных решеток: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 455с. **8.** *Veliev E.I., Oksasoglu A.* Bessel functions series in two dimensional diffraction problems / J. of Electromagnetic and Applications. 1996. Vol. 10, N4. P. 493-507.

Надійшла до редколегії 15.04.2003

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руженцев І.В.

Чумаченко Світлана Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри АПОТ, докторант ХНУРЕ. Наукові інтереси: математична фізика. Адреса: Україна, 61166, Харків, пр. Леніна, 14, тел. 70-21-326.