УДК 62.506.2

САРНАВСКИЙ Н. Г., ШАБАНОВА-КУШНАРЕНКО З. Ю.

О ПРЕДИКАТАХ НА МНОЖЕСТВАХ

СООБЩЕНИЕ II

В этом сообщении используются терминология, обозначения и нумерация формул сообщения I.

Произведем теперь дальнейшее исследование предикатов $T(x, y)$, которые задаются формулой (1) при дополнительных предположениях относительно функций f_1 и f_2 и множества E. Предположим, что множество E наделено структурой абелевой группы относительно операции сложения.

Будем рассматривать предикаты $T(x, y)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1 и следующему дополнительному свойству:

$$1') \text{ Если } T(x_1, y_1) = 1, \ T(x_2, y_2) = 1, \tag{C)}$$

то $T(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2) = 1$.

2′) Существуют такие векторы $x, y \in E$, что $T(x, y) = 1$.

Теорема 3. *Пусть предикат $T(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и условиям С). Тогда*

$$T(x, y) = D(f_1(x), f_2(y)), \tag{10}$$

где f_1, f_2 — эпиморфизмы группы E на некоторую группу F во всех случаях, кроме того, когда некоторые из разложений (8) и (9) содержат точно один ненулевой и точно один нулевой класс. Наоборот, если имеет место формула (10), то выполняются условия теоремы 1 и условия С).

Доказательство. Пусть выполняется разложение (10), где f_1 и f_2 — эпиморфизмы группы E на некоторую группу F. Так как $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, то $T(0, 0) = D(0, 0) = 1$. Следовательно, имеет место второе условие С). Пусть, далее, $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1$. Тогда $f(x_1) = f(y_1)$, $f(x_2) = f(y_2)$ и $f_1(x_1) - f_1(x_2) = f_2(y_1) - f_2(y_2)$ или $f(x_1 - x_2) = f(y_1 - y_2)$. Значит,

$$T(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = D(f_1(x_1 - x_2), f_2(y_1 - y_2)) = 1.$$

Этим доказано второе утверждение теоремы.

Пусть теперь предикат $T(x, y)$ удовлетворяет условию теоремы 1 и условию С). Согласно условию В) существуют элементы $x, y \in E$, такие, что $T(x, y) = 1$.

Тогда в силу этого же условия

$$T(x - x, y - y) = T(0, 0) = 1. \tag{11}$$

Рассмотрим разложения 8) и 9) множества E согласно эквивалентностям а) и б).

Пусть $E_1\left(E_1'\right)$ — классы, содержащие нуль группы. Покажем, что $E_1\left(E_1'\right)$ — подгруппы группы E, а остальные классы $E_i\left(E_i'\right)$ являются смежными классами группы E по подгруппе $E\left(E_1'\right)$.

Пусть $x_1 \sim 0$, $x_2 \sim 0$ (эквивалентность а). Тогда в силу (11) $T(x_1, 0) = 1$, $T(x_2, 0) = 1$ и $T(x_1 - x_2, 0) = 1$, т. е. $x_1 - x_2 \in E_1$. Следовательно, E_1 — подгруппа группы E.
Пусть, далее, E_i — ненулевой класс и $x_1, x_2 \in E_i$. Тогда для некоторого $y \in E$ $T(x_1, y) = T(x_2, y) = 1$, откуда $T(x_1 - x_2, 0) = 1$; значит, $x_1 - x_2 \in E_1$ и x_1, x_2 принадлежат смежному классу $x_1 + E_1$ группы E по подгруппе E_1. Наоборот, если $x_2 \in x_1 + E_1$, то $x_2 - x_1 \in E_1$ и, значит, $T(x_2 - x_1, 0) = 1$. Так как $T(x_1, y) = 1$ (x_1 по условию лежит в ненулевом классе), то $T(x_2 - x_1 + x_1, 0 + y) = 1$ или $T(x_2, y) = 1$, т. е. $x_2 \sim x_1$. Аналогично показывается, что все ненулевые классы E_i' являются смежными классами по подгруппе E_1'.

Каждое из разложений (8) и (9) содержит не более одного ненулевого класса, а каждый ненулевой класс в (8) и (9) по доказанному является смежным классом по E_1 (E'_1), поэтому нулевые классы в (8) и (9) суть такие смежные классы соответственно по E_1 (E'_1).

Из условия C) вытекает, что объединение $E (\hat{E}')$ всех ненулевых классов $E_i (E'_j)$ является подгруппой группы E. Действительно, если $x_1, x_2 \in E$, то $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1$ (для некоторых $y_1, y_2 \in E$) и $T(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 1$, т. е. $x_1 - x_2 \in \hat{E}$, и, следовательно, E — подгруппа группы E. Точно так же устанавливается, что $\hat{E}'$ — подгруппа в E'.

Подгруппа $\hat{E}$ содержит подгруппу E_1 (см. предыдущие обозначения), а нулевой класс E_0 (если он существует) записывается в виде $E - \hat{E}$ и по доказанному является смежным классом по подгруппе E_1. С другой стороны, $E - \hat{E}$ есть объединение смежных классов по $\hat{E}$. Отсюда следует, что если подгруппа $\hat{E}$ собственным образом содержит подгруппу E_1, то нулевой класс $E - \hat{E}$ есть пустое множество. Далее заметим, что собственное включение $\hat{E} \supset E_1$ имеет место тогда и только тогда, когда число ненулевых классов E_i больше единицы. Отсюда получаем, если число ненулевых классов E_i больше, чем 1, то в разложении отсутствует нулевой класс. Такой же результат имеет место и для разложения (9). (В сообщении I мы показали, что множество ненулевых классов E_i и множество ненулевых классов E'_j имеют одинаковые мощности).

Рассмотрим случай, когда в разложениях (8) и (9) число ненулевых классов больше единицы. Тогда $\hat{E} = \hat{E}' = E$. Образуем фактор-группы $E/E_1 = F$, $E/E'_1 = F'$. Поставим в соответствие каждому смежному классу $x + E_1$ такой смежный класс $y + E'_1$, что $T(x, y) = 1$:

$$\varphi(x + E_1) = y + E_1 \quad (T(x, y) = 1). \tag{12}$$

Покажем, что φ есть отображение E/E_1 на E/E'_1, действительно, если $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) = 1$, то, как показано ранее, элементы y_1 и y_2 лежат в одном классе эквивалентности E'_j, а последний есть смежный класс по подгруппе E'_1. Следовательно, $y_1 + E'_1 = y_2 + E'_1$. Кроме того, для любого $y \in E$ существует такой элемент $x \in E$, что $T(x, y) = 1$ (это вытекает из равенства $\hat{E}' = E$). Следовательно, φ-взаимно однозначное отображение F на F'. Пусть $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1$.

Теперь из равенства $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 1$ (условие C) следует, что $\varphi((x_1 + E) + (x_2 + E_1)) = y_1 + y_2 + E'_1 = (y_1 + E'_1) + (y_2 + E'_1)$, откуда заключаем, что φ — изоморфизм F на F'. Если имеет место формула (12), то класс $x + E_1$ условимся обозначать через $\varphi^{-1}(y+$

$+E_1'$). Построим далее естественные гомоморфизмы Θ и Θ' группы E соответственно на фактор-группы $F = E/E_1$, $F' = E/E_1'$. Тогда произведение $\varphi^{-1}\Theta'$ является эпиморфизмом группы E на E/E_1. Покажем теперь, что имеет место формула

$$T(x,\ y) = D(\Theta x,\ \varphi^{-1}\Theta' y). \tag{13}$$

Действительно, пусть $T(x,\ y) = 1$. Тогда $\Theta'(y) = y + E_1'$, $\Theta(x) = x + E_1$; согласно формуле (12) $\varphi(x + E_1) = y + E_1'$ и $\varphi^{-1}(y + E_1') = x + E_1$. Следовательно, $D(\Theta(x),\ \varphi^{-1}\Theta'(y)) = 1$. Если же $T(x,\ y) = 0$, то класс $\Theta'(y) = y + E_1'$ не является образом $\Theta(x) = x + E_1$ при отображении φ, т. е. $\varphi^{-1}\Theta(y) \neq \Theta(x)$, и тогда $D(\Theta(x),\ \varphi\Theta'(y)) = 0$. Формула (13) доказывает достаточность утверждения теоремы в предположении, что число ненулевых классов $E_i\,(E_j)$ соответственно в (8), (9) больше единицы. Предположим, что в (8) входит точно один ненулевой класс. Тогда этот класс совпадает с подгруппой E_1 (мы употребляем уже введенные обозначения). По доказанному выше разложение (9) также содержит точно один ненулевой класс — подгруппу E_1'. Могут представиться два случая.

1) В разложение (8) не входит нулевой класс, т. е. $E = E_1$. Тогда, очевидно, $E = E_1'$. В этом случае $T(x,\ y) \equiv 1$ $(\forall x,\ y \in E)$ и $T(x,\ y) = D(\Theta x,\ \Theta y)$, где Θ — естественный гомоморфизм E на E/E_1.

2) Разложение (8) имеет вид $E = E_1 \cup E_2$, где E_2 — нулевой класс. Тогда разложение (9) выглядит так: $E = E_1' \cup E_2'$ где E_2' — нулевой класс. Предикат $T(x,\ y)$ задается формулой:

$$T(x,\ y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E_1,\ y \in E_1'; \\ 0, & \text{если } x \mathrel{\bar{\in}} E_1 \text{ или } y \mathrel{\bar{\in}} E_1'. \end{cases} \tag{14}$$

Покажем, что предикат (14) не представим в виде

$$T(x,\ y) = D(f_1(x),\ f_2(y)), \tag{15}$$

где $f_1 : E \to F$ — эпиморфизм E на некоторую группу F. В самом деле, пусть имеет место (15). Докажем сначала, что подгруппа E_1 содержится в ядре гомоморфизма f_1. Как было показано выше, $T(x,\ 0) = 1$, если $x \in E_1$. Предположим, что $x \in E_1$ и $f_1(x) \neq 0$. Имеем, согласно (15), $T(x,\ 0) = D(f_1(x),\ f_2(0)) = D(f_1(x),\ 0) = 0$, что ведет к противоречию. Итак, подгруппа E_1 содержится в ядре N гомоморфизма f_1. Так как $(E : E_1) = 2$, то $N = E$, если $N \supset E_1$ (строгое включение). Но это невозможно, так как тогда для элементов $x \in E_2$ и $0 \in E$ по формуле (15) имеем $T(x,\ 0) = D(0,\ 0) = 1$, а по формуле (4) $T(x,\ 0) = 0$. Значит, E_1 — ядро гомоморфизма f_1, точно так же покажем, что E_1' — ядро гомоморфизма f_2. Так как E_1 и E_1' имеют индекс 2 в E, то E/E_1 (и E/E_1') изоморфны циклической группе F второго порядка, которую можно записать в виде $F = \{0,\ 1\}$ $(1 + 1 = 0)$. Возьмем теперь элементы $x \in E_2$, $y \in E_2$. Тогда $f_1(x) = 1$, $f_2(y) = 1$ и, следовательно, $T(x,\ y) =$

$= D(f_1(x), f_2(y)) = 1$. С другой стороны, согласно (14) $T(x, y) = 0$. Тем самым установлена противоречивость формулы (15). Теорема доказана.

Следствие. Формула (10) для предиката $T(x, y)$ имеет место тогда и только тогда, когда $T(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и условиям:

1) Из $T(x_1, y_1) = 1$, $T(x_2, y_2) = 1 \to T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 1$ (первое условие С)).

2) Для каждого $x \in E$ ($y \in E$) существует такой элемент $y \in E \times$ $\times$ ($x \in E$), что $T(x, y) = 1$.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда условие 2) исключает тот случай, когда каждое из разложений (8) и (9) содержат точно один ненулевой класс. Во всех остальных случаях, как показано в предыдущей теореме, имеет место формула (10). Наоборот, пусть имеет место (10), где f_1 и f_2 — эпиморфизмы E на группу F. Возьмем произвольный элемент $x \in E$ и пусть $f_1(x) = z \in F$. Так как f_2 — эпиморфизм E на F, существует такой элемент $y \in E$, что $f_2(y) = z$. Тогда $T(x, y) = D(f_1(x), f_2(y)) = D(z, z) = 1$. Аналогично доказывается, что для любого элемента $y \in E$ существует такой элемент $x \in E$, что $T(x, y) = 1$. Утверждение доказано.

III. Предположим теперь, что множество E наделено структурой линейного пространства над полем K. Будем по-прежнему рассматривать предикаты $T(x, y)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1 и следующим дополнительным условиям. 1) Если $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2)$, то $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 1$. 2) Если $T(x, y) = 1$, то для любого $\lambda \in K$ $T(\lambda x, \lambda y) = 1$. 3) Для любого $x \in E$ ($y \in E$) существует такой элемент $y \in E$ ($x \in E$), что $T(x, y) = 1$. В этом случае имеют место результаты, аналогичные теореме 2 и следствию из нее.

Будем употреблять обозначения, встречавшиеся при доказательстве предыдущих теорем (в частности теоремы 2). Из 1) и 2) вытекает, что $T(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 1$, если $T(x_1, y_1) = 1$. $T(x_2, y_2) = 1$. Поэтому, как и выше, получаем, что $T(0, 0) = 1$ и

$$E_1 = \{x \in E,\ T(x, 0) = 1\},\ E_1' = \{y \in E,\ T(0, y) = 1\}$$

— подгруппы группы E, а остальные подмножества E_i (E_j') соответственно в (8) и (9) суть смежные классы по этим подгруппам. Более того, E_1 и E_1' — подпространства пространства E, так как из $T(x, 0) = 1$ в силу 2) следует, что $T(\lambda x, 0) = 1$. Поскольку мы находимся в условиях следствия из теоремы 3, то и в рассматриваемом случае имеет место формула (10). Отображения f_1 и f_2 в этой формуле окажутся линейными операторами, отображающими пространство E на фактор-пространство $F = E/E_1$. Итак, имеет место

Теорема 4. *Пусть E — линейное пространство над полем K. Предикат $T(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и условиям 1), 2), 3) тогда и только тогда, когда существует такое линейное* *пространство F над полем K и такие линейные операторы A_1 и A_2, отображающие E на F, что*

$$T(x, y) = D(A_1 x, A_2 y). \tag{10'}$$

Рассмотрим другую возможность, связанную с теоремой 3. В приложениях часто возникает ситуация, когда E — топологическая абелева группа. В этом случае естественным является следующее дополнительное условие для предиката $T(x, y)$ (помимо условий следствия из теоремы 3).

Если $T(x_п, y_п) = 1$ и $x_п \to x$, $y_п \to y$, то $T(x, y) = 1$. В этом случае подгруппы E_1 и E_1' (обозначения те же) — замкнутые подгруппы группы E, $F = E/E_1$ — фактор-группы топологической группы E, а f_1, f_2 в формуле (10) — гомоморфизмами топологической группы E на топологическую группу F (т. е. алгебраическими эпиморфизмами, являющимися непрерывными отображениями E на F).

Список литературы: 1. *Курош А. Г.* Теория групп. М., «Наука», 1967. 220 с. 2. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М., «Наука», 1973. 130 с.