УДК 621.371.3

А. И. КОЗАРЬ, канд. физ.-мат. наук

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН СИСТЕМОЙ ПЛОСКИХ ОДНО-СЛОЙНЫХ РЕШЕТОК РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн системой плоских однослойных решеток, построенных из малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер, находящихся в свободном пространстве [1]. Длина рассеиваемой волны в данной задаче может быть соизмерима с постоянными решетки. Это решение можно использовать для изучения влияния решеточных структурных резонансов электромагнитного взаимодействия сфер на внутренние резонансы сфер решетки, разработки электромагнитных методов исследования динамических свойств кристаллических решеток, а также изучения влияния различных дефектов решеток на рассеяние электромагнитных волн. Оно может быть полезно для создания композиционных материалов с сильной дисперсией и разработки различных устройств по управлению полем излучения электромагнитных излучателей.

Рассмотрим в декартовой системе координат порождающее пространственную систему простых плоских однослойных решеток координатное представление вида:

$$
\begin{aligned}
x_{p,s} &= [s-\{(-1)^s-1\}0.5]d-(-1)^{s-1}x_{p,s=0} \qquad (s=0,\pm1,\pm2,\ldots),\\
y_{p,t} &= [t-\{(-1)^t-1\}0.5]h-(-1)^{t-1}y_{p,t=0} \qquad (t=0,\pm1,\pm2,\ldots),\\
z_p &= z_0+l_p=z_0+pl \qquad (p=0,\pm1,\pm2,\ldots),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где величины d,h определяются условиями $x=0, x=d; y=0, y=h$, а $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_p$ – координаты узлов, порождающих решетку и находящихся внутри области

$$
\begin{aligned}
&0\le x_{p,s=0}\le d,\\
&0\le y_{p,t=0}\le h,\\
&-z<z_p<z.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Координаты $x_{p,s}, y_{p,t}, z_p$ определяют положение узлов вне пределов области (2) и являются функциями значений координат $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_p$. В координатное представление (1) можно ввести зависимость от времени, если координаты узлов $x_{p,s=0}, y_{p,t=0}, z_p$ внутри области (2) считать некоторыми функциями времени. Каждому узлу решеток (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $c=(p,s,t)$, выделенный узел решеток будем обозначать $c'=(p',s',t')$.

Значение индекса p определяет номер простой плоской решетки (рис.1), а значения индексов s,t задают положение узла p-ой простой плоской решетки. Нужный тип элементарной ячейки сложной плоской однослойной решетки формируют из p порождающих простые плоские решетки узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде определенной сложной плоской однослойной решетки.

Задавая максимальные значения чисел p,s,t, можно рассматривать конечные и бесконечные решетки.

На рис. 1 представлена система простых плоских однослойных решеток, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2), для случая – p=0,1,2,3,4.

Когда координаты узлов решеток для области (2) удовлетворяют условиям $x_{p,s=0}=\dfrac{d}{2}$,

$y_{p,t=0} = \frac{h}{2}$, $z_p = z_0 + pl$, то возникает правильная ортогональная решетка, для которой d, h, l – постоянные решетки.

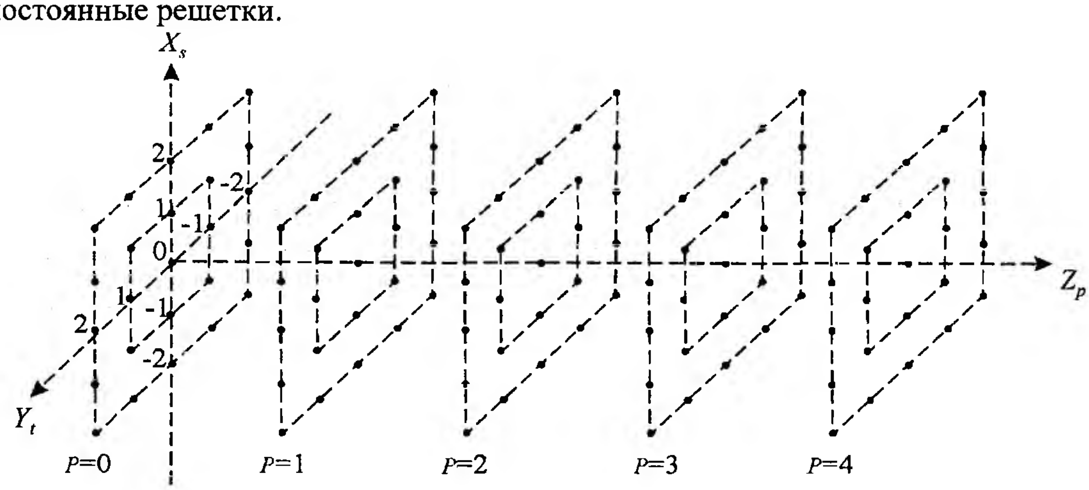

Рис. 1

Если изменять координаты узлов, находящихся в пределах области (2), то, в соответствии с координатным представлением (1), положения узлов решеток вне области (2) будут также соответствующим образом смещаться, что позволяет перестраивать пространственную конфигурацию решеток.

Полагаем, что в узлы решеток (1) помещаются центры $N=\sum\limits_p N_p$ малых однородных резонансных магнитодиэлектрических сфер с проницаемостями ε_c, μ_c и радиусами $a_c (c \in N)$, где N_p – число сфер p-й плоской решетки. Проницаемости заполнения свободного пространства – ε_0, μ_0.

Поля будем записывать в виде $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Расстояние между центрами сфер c и c' представим как

$$r_{cc'} = \sqrt{(x_{p',s'} - x_{p,s})^2 + (y_{p',t'} - y_{p,t})^2 + (z_{p'} - z_p)^2}. \tag{3}$$

Считаем, что вне сфер $a/\lambda \ll 1$, но внутри сфер, возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ – длина волны в свободном пространстве, а λ_g – длина волны в сфере.

Для решения задачи используем интегральные уравнения [2] и решать ее будем в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором находим поле, рассеянное пространственной решеткой сфер.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^э$ и магнитный $\vec{\Pi}^м$ потенциалы Герца пространственной решетки:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{расс} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^э - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}^м], \\ \vec{H}_{расс} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^м + ik\varepsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}^э]. \end{aligned} \tag{4}$$

Потенциалы Герца рассеянного поля отдельными сферами имеют вид:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_c^э &= \frac{1}{4\pi}\int_{V_c}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}_c^0(\vec{r}')f_c(|\vec{r} - \vec{r}'|)dV, \\ \vec{\Pi}_c^м &= \frac{1}{4\pi}\int_{V_c}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}_c^0(\vec{r}')f_c(|\vec{r} - \vec{r}'|)dV, \end{aligned} \tag{5}$$

где $f_c\left(\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right)$является решением уравнения

$$\Delta f\left(\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right)+k^2\varepsilon_0\mu_0 f\left(\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right)=-4\pi\delta\left(\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности и имеет вид:

$$f\left(\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|\right)=\frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}, \tag{6}$$

а $\vec{E}_c^0(\vec{r}'),\vec{H}_c^0(\vec{r}')$ – внутренние поля рассеивателей, V_c – объем рассеивателей. Вначале внутреннее поле найдем для случая, когда отношение $a/\lambda_g \ll 1$ внутри и $a/\lambda \ll 1$ вне сферы, а потом результаты вычислений обобщим на резонансный случай, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сферы.

Если учесть, что для внешних точек сферы $(r>r')$ интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (6) имеет вид:

$$W(\vec{r})=\int\limits_V\frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV=\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1a-k_1a\cos k_1a)\frac{e^{-ik_1r}}{r}, \tag{7}$$

где $k_1=k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; $k=2\pi/\lambda$, а r – расстояние от центра до внешних точек сферы, то можно построить квазистационарные уравнения для внутренних полей c' сферы в виде:

$$\begin{gathered}
\vec{E}_{0(p',s',t')}(\vec{r}',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec{E}^0_{(p',s',t')}(\vec{r}',t)-\\
-\sum_{\substack{p\ s\ t\\(p,s,t)\neq(p',s',t')}}\sum\sum\left\{(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{cc'}(\vec{r})\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)-\right.\\
\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{cc'}(\vec{r})\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\},\\
\vec{H}_{0(p',s',t')}(\vec{r}',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^0_{(p',s',t')}(\vec{r}',t)-\\
-\sum_{\substack{p\ s\ t\\(p,s,t)\neq(p',s',t')}}\sum\sum\left\{(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{cc'}(\vec{r})\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)+\right.\\
\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{cc'}(\vec{r})\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\},
\end{gathered} \tag{8}$$

где $\vec{E}_{0(p',s',t')}(\vec{r}',t)$; $\vec{H}_{0(p',s',t')}(\vec{r}',t)$ и $\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)$; $\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)$– поле падающей волны в сфере и внутреннее поле сферы соответственно.

Величины $W^{э}_{cc'}(\vec{r}),W^{м}_{cc'}(\vec{r})$ имеют вид (3,7,8):

$$W^{э}_{cc'}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c)\frac{e^{-ik_1 r_{cc'}}}{r_{cc'}},$$
$$W^{м}_{cc'}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c)\frac{e^{-ik_1 r_{cc'}}}{r_{cc'}}. \qquad (9)$$

Первые слагаемые справа в уравнениях (8) связаны с внутренним полем выделенной сферы, а вторые слагаемые учитывают влияние на выделенную сферу всех остальных сфер.

В результате, для определения внутреннего поля, мы имеем систему $2N$ векторных неоднородных уравнений или же для $x-, y-, z-$составляющих $6N$ уравнений с $6N$ неизвестными.

Для сферы c' решение системы уравнений (8) имеет вид:

$$\vec{E}^{0}_{(p',s',t')}(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c}(\hat{g}^{эc'}_{c}\vec{E}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}^{эc'}_{c}\vec{H}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t)),$$
$$\vec{H}^{0}_{(p',s',t')}(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c}(\hat{\beta}^{мc'}_{c}\vec{H}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{g}^{мc'}_{c}\vec{E}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t)), \qquad (10)$$

где

$$\hat{g}^{эc'}_{c} = \begin{bmatrix} g^{эc'}_{xxc} & g^{эc'}_{xyc} & g^{эc'}_{xzc} \\ g^{эc'}_{yxc} & g^{эc'}_{yyc} & g^{эc'}_{yzc} \\ g^{эc'}_{zxc} & g^{эc'}_{zyc} & g^{эc'}_{zzc} \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta}^{эc'}_{c} = \begin{bmatrix} \beta^{эc'}_{xxc} & \beta^{эc'}_{xyc} & \beta^{эc'}_{xzc} \\ \beta^{эc'}_{yxc} & \beta^{эc'}_{yyc} & \beta^{эc'}_{yzc} \\ \beta^{эc'}_{zxc} & \beta^{эc'}_{zyc} & \beta^{эc'}_{zzc} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\beta}^{мc'}_{c} = \begin{bmatrix} \beta^{мc'}_{xxc} & \beta^{мc'}_{xyc} & \beta^{мc'}_{xzc} \\ \beta^{мc'}_{yxc} & \beta^{мc'}_{yyc} & \beta^{мc'}_{yzc} \\ \beta^{мc'}_{zxc} & \beta^{мc'}_{zyc} & \beta^{мc'}_{zzc} \end{bmatrix}; \quad \hat{g}^{мc'}_{c} = \begin{bmatrix} g^{мc'}_{xxc} & g^{мc'}_{xyc} & g^{мc'}_{xzc} \\ g^{мc'}_{yxc} & g^{мc'}_{yyc} & g^{мc'}_{yzc} \\ g^{мc'}_{zxc} & g^{мc'}_{zyc} & g^{мc'}_{zzc} \end{bmatrix},$$

а $\Delta^{эм}$ – детерминант основной матрицы системы уравнений (8). Компоненты внутреннего поля сферы (10) представим в виде:

$$\vec{E}^{0}_{xc'}(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c}\Big[g^{эc'}_{xxc}E_{oxc}(\vec{r}',t) + g^{эc'}_{xyc}E_{oyc}(\vec{r}',t) + g^{эc'}_{xzc}E_{ozc}(\vec{r}',t) + $$
$$+ \beta^{эc'}_{xxc}H_{oxc}(\vec{r}',t) + \beta^{эc'}_{xyc}H_{oyc}(\vec{r}',t) + \beta^{эc'}_{xzc}H_{ozc}(\vec{r}',t)\Big],$$
$$\vec{E}^{0}_{yc'}(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c}\Big[g^{эc'}_{yxc}E_{oxc}(\vec{r}',t) + g^{эc'}_{yyc}E_{oyc}(\vec{r}',t) + g^{эc'}_{yzc}E_{ozc}(\vec{r}',t) + $$
$$+ \beta^{эc'}_{yxc}H_{oxc}(\vec{r}',t) + \beta^{эc'}_{yyc}H_{oyc}(\vec{r}',t) + \beta^{эc'}_{yzc}H_{ozc}(\vec{r}',t)\Big],$$
$$\vec{E}^{0}_{zc'}(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c}\Big[g^{эc'}_{zxc}E_{oxc}(\vec{r}',t) + g^{эc'}_{zyc}E_{oyc}(\vec{r}',t) + g^{эc'}_{zzc}E_{ozc}(\vec{r}',t) + $$
$$+ \beta^{эc'}_{zxc}H_{oxc}(\vec{r}',t) + \beta^{эc'}_{zyc}H_{oyc}(\vec{r}',t) + \beta^{эc'}_{zzc}H_{ozc}(\vec{r}',t)\Big], \qquad (11)$$
$$H^{0}_{xc'}(\vec{r}',t) = \frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_{c}\Big[\beta^{мc'}_{xxc}H_{oxc}(\vec{r}',t) + \beta^{мc'}_{xyc}H_{oyc}(\vec{r}',t) + \beta^{мc'}_{xzc}H_{ozc}(\vec{r}',t) + $$
$$+ g^{мc'}_{xxc}E_{oxc}(\vec{r}',t) + g^{мc'}_{xyc}E_{oyc}(\vec{r}',t) + g^{мc'}_{xzc}E_{ozc}(\vec{r}',t)\Big],$$

$$H^0_{yc'}(\vec r',t)=\frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_c\Big[\beta^{мc'}_{yxc}H_{oxc}(\vec r',t)+\beta^{мc'}_{yyc}H_{oyc}(\vec r',t)+\beta^{мc'}_{yzc}H_{ozc}(\vec r',t)+$$
$$+g^{мc'}_{yxc}E_{oxc}(\vec r',t)+g^{мc'}_{yyc}E_{oyc}(\vec r',t)+g^{мc'}_{yzc}E_{ozc}(\vec r',t)\Big],$$
$$H^0_{zc'}(\vec r',t)=\frac{1}{\Delta^{эм}}\sum_c\Big[\beta^{мc'}_{zxc}H_{oxc}(\vec r',t)+\beta^{мc'}_{zyc}H_{oyc}(\vec r',t)+\beta^{мc'}_{zzc}H_{ozc}(\vec r',t)+$$
$$+g^{мc'}_{zxc}E_{oxc}(\vec r',t)+g^{мc'}_{zyc}E_{oyc}(\vec r',t)+g^{мc'}_{zzc}E_{ozc}(\vec r',t)\Big].$$

Если предположить, что у всех сфер с одинаковым индексом p внутреннее поле равно внутреннему полю сферы $(p,s,=0,t=0)$, то систему уравнений (8) можно свести к системе $2p$ уравнений. Входящие в эту систему уравнения для произвольной сферы, представим в виде:

$$\vec E_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec E^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)-$$
$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)}}\sum\sum\left\{(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^э_{cc'}(\vec r)\vec E^0_{(p,s=0,t=0)}(\vec r',t)-\right. \tag{12}$$
$$\left.-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^м_{cc'}(\vec r)\vec H^0_{(p,s=0,t=0)}(\vec r',t)\right]\right\},$$
$$\vec H_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec H^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)-$$
$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)}}\sum\sum\left\{(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^м_{cc'}(\vec r)\vec H^0_{(p,s=0,t=0)}(\vec r',t)+\right.$$
$$\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^э_{cc'}(\vec r)\vec E^0_{(p,s=0,t=0)}(\vec r',t)\right]\right\}.$$

В случае, когда все сферы решетки одинаковы и можно предположить, что и внутренние поля сфер одинаковы, систему уравнений (8) можно свести к двум векторным неоднородным уравнениям вида:

$$\vec E_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0}-1\right)\right\}\vec E^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)-$$
$$-\sum_{\substack{p\ s\ t\\(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)}}\sum\sum\left\{(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^э_{cc'}(\vec r)\vec E^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec r',t)-\right.$$

$$-ik\mu_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{cc'}(\vec{r})\vec{H}^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)\right]\Bigg\},$$

$$\vec{H}_{0(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)=\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0}-1\right)\right\}\vec{H}^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)- \tag{13}$$

$$-\sum_{p}\sum_{s}\sum_{t}\left\{(\nabla\nabla+k^2\varepsilon_0\mu_0)\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\mu_c}{\mu_0}-1\right)W^{м}_{cc'}(\vec{r})\vec{H}^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)+\right.$$
$$(p,s,t)\neq(p',s'=0,t'=0)$$

$$\left.+ik\varepsilon_0\left[\nabla,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}-1\right)W^{э}_{cc'}(\vec{r})\vec{E}^0_{(p',s'=0,t'=0)}(\vec{r}',t)\right]\right\}.$$

Систему уравнений (8) для ортогональной решетки для случая, когда падающая волна распространяется вдоль оси z, можно представить через пространственные гармоники. Для этого разложим по собственным функциям постоянных d,h (1,2) ортогональной решетки выражение [2]

$$\frac{e^{-ik_1 r_{cc'}}}{r_{cc'}}=\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}(x_{p',s'}-x_{p,s})+\frac{n\pi}{h}(y_{p',t'}-y_{p,t})+\beta_{mn}\left|z_{p'}-z_p\right|\right]}, \tag{14}$$

где

$$\chi_{mn}=\begin{cases}2, \textit{если } m=0 \textit{ или } n=0,\\ 1, \textit{если } m,n>0,\end{cases}$$

$$\beta_{mn}=\sqrt{k^2\varepsilon_0\mu_0-\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}\qquad (m,n=0,1,2,...).$$

Тогда величины $W^{э}_{cc'}(\vec{r})$ и $W^{м}_{cc'}(\vec{r})$ (9) можно записать в виде:

$$W^{э}_{cc'}(\vec{r})=\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c -$$
$$-k_1 a_c\cos k_1 a_c)\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}(x_{p',s'}-x_{p,s})+\frac{n\pi}{h}(y_{p',t'}-y_{p,t})+\beta_{mn}\left|z_{p'}-z_p\right|\right]}, \tag{15}$$

$$W^{м}_{cc'}(\vec{r})=-\frac{4\pi}{k_1^3}(\sin k_1 a_c -$$
$$-k_1 a_c\cos k_1 a_c)\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}(x_{p',s'}-x_{p,s})+\frac{n\pi}{h}(y_{p',t'}-y_{p,t})+\beta_{mn}\left|z_{p'}-z_p\right|\right]}.$$

Поле падающей волны относительно рассеивающей сферы представим в виде бесконечной суммы пространственных гармоник:

$$\vec{E}_{0(s,t,p)}(\vec{r}',t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{E}^{mn}_{0(s,t,p)}(\vec{r}',t),$$
$$\vec{H}_{0(s,t,p)}(\vec{r}',t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{H}^{mn}_{0(s,t,p)}(\vec{r}',t). \tag{16}$$

Внутреннее поле сферы также запишем в виде разложения:

$$\vec{E}^{0}_{(s,t,p)}(\vec{r}',t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{E}^{0mn}_{(s,t,p)}(\vec{r}',t),$$
$$\vec{H}^{0}_{(s,t,p)}(\vec{r}',t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \vec{H}^{0mn}_{(s,t,p)}(\vec{r}',t), \tag{17}$$

которое нельзя рассматривать как разложение Фурье.

В результате уравнения для компонент внутренних полей $\vec{E}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t), \vec{H}^{0}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)$ (17) произвольной сферы представим в виде (14,15,16):

$$\vec{E}^{mn}_{0(p',s',t')}(\vec{r}',t) = \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1\right)\right\}\vec{E}^{0mn}_{(p',s',t')}(\vec{r}',t) -$$
$$-\sum_{\substack{p\ s\ t \\ (p,s,t)\neq(p',s',t')}}\sum\sum \frac{2\pi}{dhk_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t) -\right.$$
$$\left. - ik\mu_0\left[\nabla, (-1)\left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\} e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}(x_{p',s'} - x_{p,s}) + \frac{\pi n}{h}(y_{p',t'} - y_{p,t}) + \beta_{mn}\left|z_{p'} - z_p\right|\right]},$$
$$\vec{H}^{mn}_{0(p',s',t')}(\vec{r}',t) = \left\{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1\right)\right\}\vec{H}^{0mn}_{(p',s',t')}(\vec{r}',t) - \tag{18}$$
$$-\sum_{\substack{p\ s\ t \\ (p,s,t)\neq(p',s',t')}}\sum\sum \frac{2\pi}{dhk_1^3}(\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c)\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{(\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)(-1)\left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1\right)\vec{H}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t) +\right.$$
$$\left. + ik\varepsilon_0\left[\nabla, \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1\right)\vec{E}^{0mn}_{(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right]\right\} e^{-i\left[\frac{\pi m}{d}(x_{p',s'} - x_{p,s}) + \frac{\pi n}{h}(y_{p',t'} - y_{p,t}) + \beta_{mn}\left|z_{p'} - z_p\right|\right]}.$$

Решение системы уравнений (18) для N сфер имеет вид:

$$\vec{E}^{0}_{(p',s',t')}(\vec{r}',t) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta^{mn}}\sum_c\left(\hat{g}_c^{эc'mn}\vec{E}^{mn}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}_c^{эc'mn}\vec{H}^{mn}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right)\right],$$
$$\vec{H}^{0}_{(p',s',t')}(\vec{r}',t) = \sum_{m,n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\Delta^{mn}}\sum_c\left(\hat{g}_c^{мc'mn}\vec{E}^{mn}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t) + \hat{\beta}_c^{мc'mn}\vec{H}^{mn}_{0(p,s,t)}(\vec{r}',t)\right)\right], \tag{19}$$

где Δ^{mn} – детерминант системы уравнений (18).

Числа $m,n,$ связанные с распространяющимися волнами, определяются условием

$$k^2\varepsilon_0\mu_0 > \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,$$

а с затухающими волнами –

$$k^2\varepsilon_0\mu_0 < \left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 .$$

Полученные решения для внутреннего поля сфер (10, 19) справедливы, когда $a/\lambda << 1$ снаружи и $a/\lambda_g << 1$ внутри сфер. Но их можно обобщить на резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, если вместо проницаемостей ε_c и μ_c ввести эффективные проницаемости [3, 4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c\text{эф}} &= \varepsilon_c F(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}), \\ \mu_{c\text{эф}} &= \mu_c F(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$F(ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}) = \frac{2(\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} - ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c})}{(k^2a_c^2\varepsilon_c\mu_c - 1)\sin ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c} + ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}\cos ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}} .$$

На рис. 2 представлены особенности поведения $\operatorname{Re}F(\theta)$ (сплошная кривая) и $\operatorname{Im}F(\theta)$ (пунктирная кривая) в зависимости от $\operatorname{Re}\theta$ при разных значениях тангенса угла диэлектрических потерь $\operatorname{tg}\delta_\varepsilon$ (1 кривая – $\operatorname{tg}\delta_\varepsilon$=0; 2 кривая – $\operatorname{tg}\delta_\varepsilon$=0,05; 3 кривая – $\operatorname{tg}\delta_\varepsilon$=0,1) и $\mu_c = 1$, здесь $\theta = ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}$.

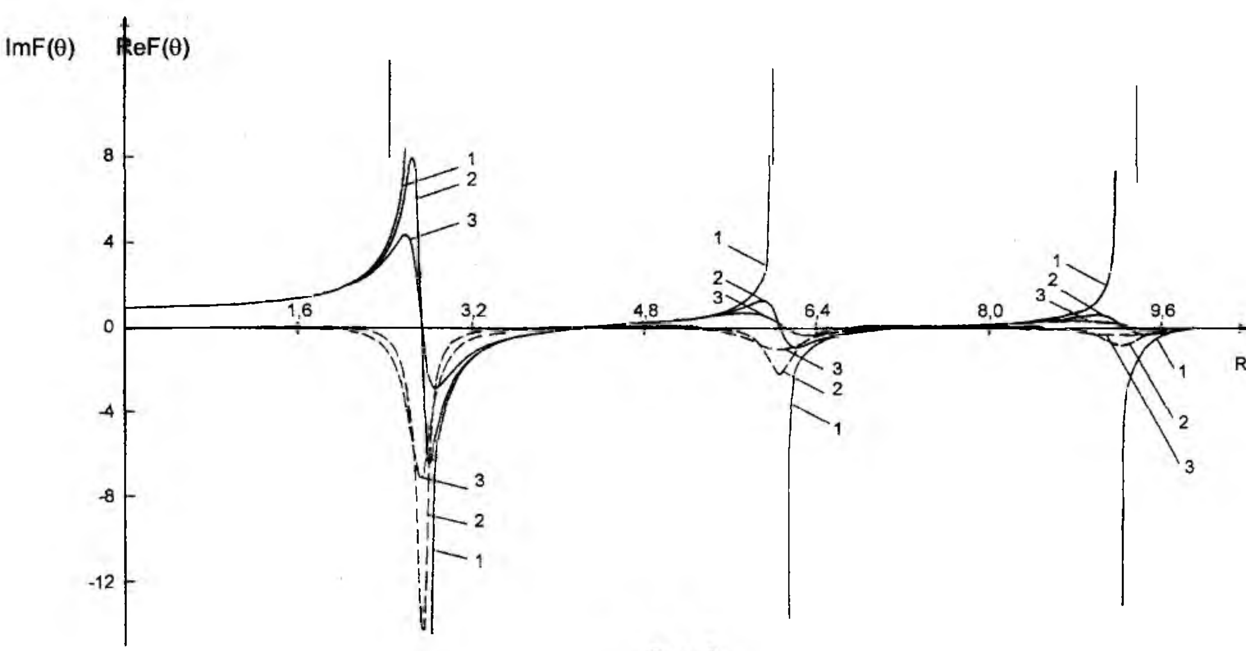

Рис. 2

Для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами решетки можно пренебречь, обобщенные выражения для внутреннего поля сферы c' (10) имеют вид (20):

$$\vec{E}^{\,0}_{c'}(\vec{r}\,',t) = \frac{3\varepsilon_0 e^{i\theta_{1c'}}}{(\varepsilon_{c'\text{эф}} + 2\varepsilon_0) + \theta_{1c'}^2\varepsilon_{c'\text{эф}} + i\theta_{1c'}(\varepsilon_{c'\text{эф}} + 2\varepsilon_0)}\vec{E}_{0c'}(\vec{r}\,',t),$$

$$\vec{H}^{\,0}_{c'}(\vec{r}\,',t) = \frac{3\mu_0 e^{i\theta_{1c'}}}{(\mu_{c'\text{эф}} + 2\mu_0) + \theta_{1c'}^2\mu_{c'\text{эф}} + i\theta_{1c'}(\mu_{c'\text{эф}} + 2\mu_0)}\vec{H}_{0c'}(\vec{r}\,',t),$$

где $\theta_{1c'}^2 = k^2a_{c'}^2\varepsilon_0\mu_0$.

Потенциалы Герца $\vec{\Pi}^{э}$ и $\vec{\Pi}^{м}$, рассеянного системой плоских решеток поля по известному внутреннему полю (10,19) отдельных рассеивателей, представим в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер решеток (5), учитывая (20), как

$$\vec{\Pi}^{э}(\vec{r},t)=\sum_p\sum_s\sum_t\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\vec{E}_c^0(\vec{r}',t)\frac{e^{-ik_1r_{(p,s,t)}}}{r_{(p,s,t)}},$$
$$\vec{\Pi}^{м}(\vec{r},t)=-\sum_p\sum_s\sum_t\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)\vec{H}_c^0(\vec{r}',t)\frac{e^{-ik_1r_{(p,s,t)}}}{r_{(p,s,t)}}. \quad (21)$$

В выражениях (21)

$$r_{(p,s,t)}=\sqrt{(x-x_{p,s})^2+(y-y_{p,t})^2+(z-z_p)^2}, \quad (22)$$

где координаты (x,y,z) определяют вне сфер точку наблюдения поля, рассеянного системой плоских решеток, а координаты $(x_{p,s},y_{p,t},z_p)$ – точку нахождения центра рассеивающей сферы решетки.

В соотношениях для потенциалов Герца (21) выражение с экспонентой можно представить в виде разложения по собственным функциям постоянных *d, h* ортогональной решетки (14):

$$\frac{e^{-ik_1r_{(p,s,t)}}}{r_{(p,s,t)}}=\frac{2\pi}{dh}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}e^{-i\left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{p,s})+\frac{n\pi}{h}(y-y_{p,t})+\beta_{mn}\left|z-z_p\right|\right]}. \quad (23)$$

Тогда для случая (8), учитывая (21, 20), из (4) найдем рассеянное системой плоских решеток поле:

$$\vec{E}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_c\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\left\{\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c\vec{E}_c^0(\vec{r}')-\right.$$
$$\left.-ik\mu_0\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{P}_c\vec{H}_c^0(\vec{r}')\right\}e^{i(\omega t-k_1r_c)},$$
$$\vec{H}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_c\frac{1}{k_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\left\{\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{L}_c\vec{H}_c^0(\vec{r}')+\right.$$
$$\left.+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c\vec{E}_c^0(\vec{r}')\right\}e^{i(\omega t-k_1r_c)}, \quad (24)$$

где $\hat{L}_c$ и $\hat{P}_c$ – функциональные матрицы, которые имеют вид

$$\hat{L}_c=\begin{bmatrix}\Psi_{xxc}\Psi_{xyc}\Psi_{xzc}\\ \Psi_{yxc}\Psi_{yyc}\Psi_{yzc}\\ \Psi_{zxc}\Psi_{zyc}\Psi_{zzc}\end{bmatrix};\ \hat{P}_c=\begin{bmatrix}0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0\\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc}\\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0\end{bmatrix}. \quad (25)$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (25), запишем в виде (1):

$$\Psi_{xxc}=\frac{1}{r_{(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(x-x_{p,s})^2-r_{(p,s,t)}^2\right|}{r_{(p,s,t)}^5}-k_1^2\frac{(x-x_{p,s})^2}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{\left|3(x-x_{p,s})^2-r_{(p,s,t)}^2\right|}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{yyc}=\frac{1}{r_{(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(y-y_{p,t})^2-r_{(p,s,t)}^2\right|}{r_{(p,s,t)}^5}-k_1^2\frac{(y-y_{p,t})^2}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{\left|3(y-y_{p,t})^2-r_{(p,s,t)}^2\right|}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{zzc}=\frac{1}{r_{(p,s,t)}}k^2\varepsilon_0\mu_0+\frac{\left|3(z-z_p)^2-r_{(p,s,t)}^2\right|}{r_{(p,s,t)}^5}-k_1^2\frac{(z-z_p)^2}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{\left|3(z-z_p)^2-r_{(p,s,t)}^2\right|}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xyc}=\Psi_{yxc}=\frac{3(x-x_{p,s})(y-y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^5}-k_1^2\frac{(x-x_{p,s})(y-y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{3(x-x_{p,s})(y-y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xzc}=\Psi_{zxc}=\frac{3(x-x_{p,s})(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^5}-k_1^2\frac{(x-x_{p,s})(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{3(x-x_{p,s})(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{yzc}=\Psi_{zyc}=\frac{3(y-y_{p,t})(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^5}-k_1^2\frac{(y-y_{p,t})(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{3(y-y_{p,t})(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^4},$$

$$\Psi_{xc}=\frac{(x-x_{p,s})}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{(x-x_{p,s})}{r_{(p,s,t)}^2},\Psi_{xc}^0=-\Psi_{xc},$$

$$\Psi_{yc}=\frac{(y-y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{(y-y_{p,t})}{r_{(p,s,t)}^2},\Psi_{yc}^0=-\Psi_{yc},$$

$$\Psi_{zc}=\frac{(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^3}+ik_1\frac{(z-z_p)}{r_{(p,s,t)}^2},\Psi_{zc}^0=-\Psi_{zc}.$$

Для случая (23), рассеянное решеткой поле представим в виде:

$$\hat{E}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_c\frac{2\pi}{dhk_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\chi_{mn}}{\beta_{mn}}\left\{\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{L}_c^{mn}\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}\,')-\right.$$

$$\left.-ik\mu_0\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{P}_c^{mn}\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}\,')\right\}e^{i\left(\omega t-\left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{p,s})+\frac{n\pi}{h}(y-y_{p,t})+\beta_{m,n}|z-z_p|\right]\right)},$$

$$\hat{H}_{расс}(\vec{r},t)=\sum_c\frac{2\pi}{dhk_1^3}(\sin k_1a_c-k_1a_c\cos k_1a_c)\sum_{m,n=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\mu_{сэф}}{\mu_0}-1\right)(-1)\hat{L}_c^{mn}\vec{H}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}\,')+\right.$$

$$\left.+ik\varepsilon_0\left(\frac{\varepsilon_{сэф}}{\varepsilon_0}-1\right)\hat{P}_c^{mn}\vec{E}^0_{(p,s,t)}(\vec{r}\,')\right\}e^{i\left(\omega t-\left[\frac{m\pi}{d}(x-x_{p,s})+\frac{n\pi}{h}(y-y_{p,t})+\beta_{m,n}|z-z_p|\right]\right)},$$

где $\hat{L}_c^{mn},\hat{P}_c^{mn}$ – функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c^{mn} = \begin{bmatrix} \left(k^2\varepsilon_0\mu_0 - \dfrac{m^2\pi^2}{d^2}\right) & -\dfrac{m\pi}{d}\dfrac{n\pi}{h} & -\beta_{mn}\dfrac{m\pi}{d} \\ -\dfrac{m\pi}{d}\dfrac{n\pi}{h} & \left(k^2\varepsilon_0\mu_0 - \dfrac{n^2\pi^2}{h^2}\right) & -\beta_{mn}\dfrac{n\pi}{h} \\ -\beta_{mn}\dfrac{m\pi}{d} & -\beta_{mn}\dfrac{n\pi}{h} & \left(k^2\varepsilon_0\mu_0 - \beta_{mn}^2\right) \end{bmatrix},$$

$$\hat{P}_c^{mn} = \begin{bmatrix} 0 & i\beta_{mn} & -i\dfrac{n\pi}{h} \\ -i\beta_{mn} & 0 & i\dfrac{m\pi}{d} \\ i\dfrac{n\pi}{h} & -i\dfrac{m\pi}{d} & 0 \end{bmatrix}.$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер решеток, определим в виде

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r},t) + \vec{E}_{расс}(\vec{r},t),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r},t)$ – невозмущенное поле падающей волны.

Из детерминантов уравнений (8,12,13,18) находятся резонансные условия для случая, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сфер. Если ε_c, μ_c сфер решеток действительны, то резонансные условия находим из выражения

$$\det \mathrm{Re}\left\|\alpha_{ij}\right\| = 0, \tag{26}$$

где $\left\|\alpha_{ij}\right\|$ – основная матрица системы уравнений (8).

Разрешая выражение (26) относительно функции $F(\theta_c)$ (20) [5] для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами можно пренебречь, получим условия для электрического и магнитного резонансов c-ой сферы решетки в виде (рис. 2)

$$F(\theta_c) = -\frac{2\varepsilon_0(\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c})}{\varepsilon_c(\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}^2\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c})}, \quad F(\theta_c) = -\frac{2\mu_0(\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c})}{\mu_c(\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}^2\cos\theta_{1c} + \theta_{1c}\sin\theta_{1c})},$$

где $\theta_c = ka_c\sqrt{\varepsilon_c\mu_c}$, $\theta_{1c} = ka_c\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Сопоставляя данное решение с решением задачи о рассеянии волн на сферах в волноводе [6], можно предложить замену некоторых экспериментальных измерений для свободного пространства волноводными измерениями [7], [8], [9].

Список литературы: 1. *Козарь А.И., Хижняк Н. А.* Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т. 15. С. 847 – 849. 2. *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. С. 279. 3. *Левин Л.* Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит, 1954. С. 216. 4. *Козарь А.И., Хижняк Н.А.* К вопросу о точном измерении больших значений диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков. Радиотехника. 1970. Вып. 14. С. 118 – 128. 5. *Козарь А.И.* Рассеяние электромагнитных волн в волноводе с однородными магнитодиэлектрическими сферами // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электроники НАН Украины. – 2002. 7. Спец. вып. – С. 183 – 189. 6. *Козарь А.И.* Рассеяние электромагнитных волн в прямоугольном волноводе с резонансными магнитодиэлектрическими сферами // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 125. С. 78 – 86. 7. *Козарь А.И.* Прямоугольный электромагнитный резонатор с резонансными магнитодиэлектрическими сферами // Вісник Харк. нац. ун-ту. Радіофізика та електроніка. 2002. Вип. 1. № 544. С. 199 – 205. 8. *Козарь А.И.* Треугольник чисел Паскаля и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 127. С. 67 – 76. 9. *Козарь А.И.* Полигональные числа и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитодиэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 129. С. 5 – 13.

Харьковский национальный

университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 07.07.2002