Проблемы бионики
1998. Вып. 49. С. 3—13

ХТУРЭ

УДК 519.7

З.В. ДУДАРЬ, Н.С. КРАВЕЦ, Ю.П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ*

Предикатные операции используются в тех случаях, когда возникает необходимость производить действия над предикатами [1] или описывать связи между ними [2]. Таблицы, содержащиеся в базах данных, удобно формально понимать как некоторые предикаты, а действия над ними - как предикатные операции. Связи между таблицами можно понимать как предикаты второго порядка, т. е. как специальные предикатные операции, значениями которых служат предикаты 0 и 1. Алгебры предикатных операций полезно использовать при проектировании систем обработки информации, различных информационных структур и их электронных схем. При изучении механизмов интеллекта человека алгебры предикатных операций целесообразно использовать для формульной записи свойств (законов) интеллектуального поведения испытуемого. Само же это поведение удачно описывается на языке алгебры предикатов. С помощью формул алгебр предикатных операций изящно и просто выражается смысловая структура предложений и текстов естественного языка [3]. Мысли можно формально представлять в виде предикатов, а для выражения действий над ними использовать предикатные операции.

Учение о предикатных операциях соотносится с учением о предикатах примерно так же, как математический анализ - со школьной алгеброй. В школьной алгебре изучаются числовые функции, а в математическом анализе - операции над ними. Алгебра предикатных операций представляет собой как бы второй этаж, надстройку над алгеброй предикатов, ее расширение. Алгебра предикатов охватывается алгеброй предикатных операций. Школьная алгебра и математический анализ относятся к области числовой математики, которая развивалась преимущественно применительно к потребностям описания объектов и процессов, наблюдаемых во внешнем (объективном, физическом) мире. Алгебра же предикатов и алгебра предикатных операций относятся к области *логической математики*, которая возникла в связи с необходимостью формального описания объектов и процессов, наблюдаемых во внутреннем (субъективном, психологическом) мире

* Статья публикуется в авторской редакции.

человека и машины. Основная сфера приложения логической математики - формальное описание информационных объектов и процессов. Мы ожидаем, что со временем учение о предикатных операциях станет главным математическим инструментом информатики.

Пусть U - универсум предметов; $x_1, x_2, ..., x_m$ - предметные переменные; M - множество всех предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ на предметном пространстве U^m [1]. Множество M называется *универсумом предикатов*. Переменные $X_1, X_2, ..., X_m$, определенные на множестве M, называются *предикатными переменными*. Их значениями служат предикаты, заданные на U^m. Множество M^n называется *предикатным пространством размерности n* над предметным пространством U^m. Элементы множества M^n (наборы предикатов) называются *предикатными векторами*. Предикатное пространство представляет собой двухэтажную конструкцию: на первом этаже находятся предметы, на втором - предикаты. Любая функция $F(X_1, X_2, ..., X_n)=Y$, отображающая множество M^n в множество M, называется *предикатной операцией*. Образуем множество R всех предикатных операций. *Алгеброй предикатных операций* над R называется любая алгебра, заданная на носителе R. В классическом математическом анализе предметам алгебры предикатных операций соответствуют числа, предикатам - функции, предикатным операциям - операторы, отношениям второго порядка, связывающим предикаты, - функциональные уравнения (в частности, дифференциальные и интегральные).

Пусть $F(X_1, X_2, ..., X_n)=Y$ - предикатная операция, отображающая множество M^n в множество M. Здесь $X_1, X_2, ..., X_n$ - предикатные переменные, выступающие в роли аргументов операции F; Y - предикатная переменная, являющаяся значением операции F. *Отрицанием* $\neg F=\bar{F}$ *предикатной операции* F называется такая предикатная операция, значения которой определяются по правилу

$$(\neg F)(X_1, X_2, ..., X_n)=\neg F(X_1, X_2, ..., X_n) \quad (1)$$

для любых $X_1, X_2, ..., X_n \in M$. Пусть F и G - предикатные операции, отображающие M^n в M. *Дизъюнкцией* $F\vee G$ *предикатных операций* F и G называется предикатная операция, значения которой определяются по правилу

$$F\vee G)(X_1, X_2, ..., X_n)=F(X_1, X_2, ..., X_n)\vee G(X_1, X_2, ..., X_n) \quad (2)$$

для любых $X_1, X_2, ..., X_n \in M$. *Конъюнкцией* $F\wedge G$ *предикатных операций* F и G называется предикатная операция, значения которой определяются по правилу

$$(F\wedge G)(X_1, X_2, ..., X_n)=F(X_1, X_2, ..., X_n)\wedge G(X_1, X_2, ..., X_n) \quad (3)$$

для любых $X_1, X_2, ..., X_n \in$ M. В равенствах (1)-(3) слева от знака равенства фигурируют операции $\neg$, $\vee$, $\wedge$ над предикатными операциями, справа знаки $\neg$, $\vee$, $\wedge$ обозначают операции над предикатами.

Булевой алгеброй предикатных операций называется любая алгебра предикатных операций с базисом операций, состоящим из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Обратим внимание на то, что базисные операции булевой алгебры предикатных операций не являются предикатными операциями, они представляют собой операции над предикатными операциями, т.е. операции следующего, более высокого уровня. Аналогом этих операций в числовой математике может служить, к примеру, операция сложения линейных операторов, рассматриваемая в курсе функционального анализа. Имеется много различных булевых алгебр предикатных операций. Это обусловлено тем, что в определении данного понятия не указываются конкретные базисные элементы, которые в булевой алгебре могут быть выбраны по-разному. Их выбор и определяет конкретную булеву алгебру предикатных операций. В роли базисных элементов в булевой алгебре предикатных операций выступают некоторые фиксированные предикатные операции.

Тождественной предикатной операцией по переменной X_i ($i=\overline{1,n}$) называется операция со значениями

$$\mathrm{F}(X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n)=X_i \tag{4}$$

при любых $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_n \in$ M. Будем обозначать ее символом X_i. Каждой предикатной переменной взаимно однозначно соответствует своя тождественная предикатная операция. Тем не менее тождественные предикатные операции следует отличать от соответствующих предикатных переменных. Всего имеется n различных тождественных предикатных операций. *Константной предикатной операцией* называется любая операция со значением

$$\mathrm{F}(X_1, X_2, ..., X_n)=P \tag{5}$$

при любых $X_1, X_2, ..., X_n \in$ M. Здесь P - фиксированный предикат из M. Обозначим эту операцию символом P. Каждому предикату $P \in$ M соответствует своя константная предикатная операция P. Всего имеется $|\mathrm{M}|$ константных предикатных операций, где $|\mathrm{M}|$ - мощность множества M.

Алгеброй предикатных операций с константами и переменными называется булева алгебра предикатных операций, у которой базисными элементами являются всевозможные тождественные и константные предикатные операции. Тождественные предикатные операции называются *переменными алгебры предикатных операций*. Предикатные же переменные - это просто необходимый строительный материал, используемый для получения тех или иных предикатных операций, в частности, - предикатных операций вида X_i и X_i^P ($i=\overline{1,n}$, $P\in$M) (об операциях вида X_i^P речь пойдет ниже). Константные предикатные операции называются *константами алгебры предикатных операций*. Константные же предикаты - это, строго говоря, нечто иное, они используются в алгебре предикатов.

Приведем пример формулы алгебры предикатных операций с, константами и переменными, имеющей предметные переменные x, y, предикатные переменные X, Y и универсум предметов $U=\{a, b, c\}$:

$$(x^a \vee x^b)X \vee \overline{x^a y^c}\,Y. \tag{a}$$

Фигурирующие в ней подформулы $x^a \vee y^b$ и $x^a y^c$ выражают константы данной алгебры. Формула (а), взятая в целом, выражает некоторую предикатную операцию F(X, Y)=Z, преобразующую произвольные предикаты X и Y в предикат Z. Возьмем, к примеру, в роли X - предикат $x^a y^b$, а в роли Y - предикат $x^a \vee y^b$ и отыщем предикат Z=F(X, Y). По формуле (а) находим:, $Z=(x^a \vee x^b)x^a x^b \vee \overline{x^a y^c (x^a \vee y^b)} = x^a y^b \vee \overline{x^a y^c} =$ $=x^a y^b \vee \overline{x^a} \vee y^c = x^a y^b \vee y^b \vee y^c \vee y^a \vee y^b = x^b \vee x^c \vee y^a \vee y^b = x^a \vee y^c = \overline{x^a y^c}$. Итак, операция F($X$, Y)=Z, характеризуемая формулой (а), ставит в соответствие предикатам $X=x^a y^b$ и $Y=x^a \vee y^b$ предикат $Z=\overline{x^a y^c}$.

Теорема о неполноте алгебры предикатных операций с константами и переменными. *При любых т и п алгебра предикатных операций с константами и переменными, в универсуме предметов U которой содержится более одного элемента, неполна.*

Этой теоремой устанавливается удивительный факт. Казалось бы, алгебра предикатных операций с константами и переменными построена самым естественным способом, который обычно используется в классической математике: ввели константы, переменные, а также все необходимые операции, и тем не менее алгебра получилась неполноценная. Это наводит на мысль, что при конструировании полноценной алгебры предикатных операций надо действовать каким-то иным, нетрадиционным способом.

Доказательство. Рассмотрим предикатную операцию

$$\mathrm{F}(X_1)=\begin{cases}1, \text{ если } X_1=0,\\0, \text{ если } X_1\neq 0.\end{cases} \tag{б}$$

Предположим, что операция F выражается формулой алгебры, указанной в условии теоремы (обозначим для краткости эту алгебру символом А). В этом случае операция F выражается формулой с единственной переменной X_1. Поскольку $X_1 \wedge X_1 = X_1$ и $X_1 \wedge \overline{X_1} = 0$, то любая формула алгебры А с одной переменной X_1 после раскрытия скобок и упрощений приобретает вид $AX_1 \vee B\overline{X_1} \vee C$, где A, B, C - предикатные константы. Следовательно найдутся такие A, B и C, что $F(X_1) = AX_1 \vee B\overline{X_1} \vee C$ (α). Подставляя в (α) вместо X_1 нулевой и единичный предикаты, получаем: $F(0) = A0 \vee B\overline{0} \vee C = B \vee C$ (β), $F(1) = A1 \vee B\overline{1} \vee C = A \vee C$ (γ). Согласно (6), $F(0)=1$ (δ), $F(1)=0$ (ε). Используя (α)-(ε), получаем: $F(X_1) = AX_1 \vee B\overline{X_1} \vee C(X_1 \vee \overline{X_1}) = (A \vee C)X_1 \vee (B \vee C)\overline{X_1} = F(1)X_1 \vee F(0) \wedge \overline{X_1} = 0X_1 \vee 1\overline{X_1} = \overline{X_1}$. Итак, $F(X_1) = \overline{X_1}$. Этот результат противоречит определению (6), т. к. при $|U|>1$ множество всех предикатов содержит не только предикаты 0 и 1. Поэтому найденная операция $F(X_1) = \overline{X_1}$, вопреки определению, принимает не два, а большее число значений. Следовательно, предикатная операция F не выражается формулами алгебры А, иначе говоря, алгебра А неполна. Теорема доказана.

Универсум предикатов М состоит из двух предикатов 0 и 1 только в том случае, если универсум предметов U содержит всего лишь один элемент. Действительно, пусть $U=\{a\}$, тогда имеется всего две возможности: либо $P(a, a, \ldots, a)=0$, либо $P(a, a, \ldots, a)=1$ (в наборе элемент a встречается m раз). В случае, когда $M=\{0, 1\}$, алгебра предикатных операций с константами и переменными называется *алгеброй n-местных булевых функций*. Каждая ее функция имеет вид $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)=Y$, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$, Y - двоичные переменные, определенные на множестве $\{0,1\}$. В этой алгебре имеется n переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и всего две константы - предикаты 0 и 1.

Теорема о полноте алгебры булевых функций. *Алгебра булевых функций при любом n полна. Любая ее функция может быть выражена формулой*

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in \{0,1\}} F(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)\, X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} \ldots X_n^{\sigma_n} \qquad (7)$$

называемой *совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ)* булевой функции. Здесь $X_i^1 = X_i$, $X_i^0 = \overline{X_i}$.

Доказательство очевидно. Если эту теорему вырвать из контекста данного параграфа, то ее вполне можно было бы отождествить с известной теоремой о полноте алгебры булевых функций. На самом же деле отличие имеется, и оно состоит в том, что теперь речь идет не об алгебре двоичных знаков, рассматриваемой изолированно от других алгебр, а об особом случае алгебры предикатных операций с константами и переменными. Только в этом случае имеет место полнота алгебры. Именно наличием свойства полноты мы можем объяснить тот факт, что из всевозможных алгебр предикатных операций с константами и переменными только алгебра булевых функций получила широкое применение на практике.

Мы попытались построить полноценную алгебру предикатных операций, используя тождественные предикатные операции в качестве ее базисных элементов, но из этого пока ничего путного не вышло. Теперь мы пойдем другим, нестандартным, путем и попытаемся построить алгебру предикатных операций по образу и подобию дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов [1]. *Предикатной операцией узнавания предиката P* по переменной X_i ($i = \overline{1,n}$) называется операция

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, \text{ если } X_i = P, \\ 0, \text{ если } X_i \neq P. \end{cases} \tag{8}$$

Зависимостью (8) мы ввели как раз те предикатные операции (среди них находится и операция (6)), которых нам не хватало в базисе алгебры предикатных операций с константами и переменными для обретения ею свойства полноты. Будем обозначать операцию (8) символом X_i^P. Все аргументы этой операции, кроме X_i, несущественны. Каждой паре - предикату $P \in$ M и переменной X_i ($i = \overline{1,n}$) взаимно однозначно соответствует своя операция: предикат узнавания предиката X_i^P. *Дизъюнктивно-коньюктивной алгеброй предикатных операций* называется такая алгебра предикатных операций, у которой базисными операциями служат дизъюнкция и коньюнкция, а базисными элементами всевозможные константы $P \in$ M и предикаты узнавания предиката X_i^P ($i = \overline{1,n}$, $P \in$ M).

Важно подчеркнуть, что в числе базисных элементов дизъюнктивно-коньюнктивной алгебры предикатных операций нет тождественных предикатных операций, несмотря на то, что символ X_i фигурирует в выражении X_i^P. Этот символ является одним из двух элементов (наряду с символом P), образующих имя X_i^P базисного элемента алгебры предикатных операций. В составе предикатной операции X_i^P переменная X_i представляет собой лишь предикатную переменную, но не тождественную предикатную операцию. Поэтому дизъюнктивно-коньюнктивная алгебра предикатных операций не может быть отнесена к классу алгебр, которые строятся традиционным способом с использованием переменных алгебры в качестве ее базисных элементов.

Если бы операции X_i^P ($i = \overline{1,n}$, $P \in M$) были переведены из разряда предикатных операций в разряд базисных операций алгебры, тогда появилась бы возможность рассматривать переменные X_i как тождественные предикатные операции. Но мы этим (третьим) путем сейчас не можем пойти, поскольку нашей целью, в данном случае, является получение такой алгебры предикатных операций, которая могла бы служить надстройкой (расширением) дизъюнктивно-коньюктивной алгебры предикатов [1], а этого можно достичь, только двигаясь по второму пути (т.е. используя операции X_i^P не в роли базисных операций, а только в роли ее базисных элементов).

Приведем пример формулы дизъюнктивно-коньюктивной алгебры предикатных операций:

$$X^{x^a} y^b \vee x^a, \tag{б}$$

полагая, что $U=\{a, b\}$, $m=n=1$. Выражение x^a, входящее в состав имени предиката узнавания предиката X^{x^a}, не является константой алгебры, оно выражает фиксированный предикат, выполняющий роль показателя в имени базисной предикатной операции. Этот предикат мы будем записывать в виде формулы дизъюнктивно-коньюктивной алгебры предикатов. Напротив, входящие далее в формулу (б) подформулы y^b и x^a представляют из себя константы алгебры, выражающие некоторые из базисных предикатных операций. Эти константы также записываются формулами дизъюнктивно-коньюктивной алгебры предикатов. Формула (б) выражает вполне определенную предикатную операцию $F(X)=Y$, преобразующую произвольно взятый предикат X в предикат Y. Возьмем, к примеру, в роли X предикат x^b и отыщем предикат $Y=F(X)$. По формуле (б) находим: $Y=(x^b)^{(x^a)} y^b \vee x^a = 0y^b \vee x^a = x^a$. Итак, операция $F(X)=Y$, характеризуемая формулой (б), ставит в соответствие предикату $X=x^b$ предикат $Y=x^a$. По результатам подобных вычислений построена таблица, характеризующая предикатную операцию $Y=F(X)$.

X	0	x^a	x^b	1
Y	x^a	1	x^a	x^a

Заметим, что табличное представление предикатных операций практически возможно только в очень простых случаях, подобных тому, который рассмотрен здесь. В более сложных случаях таблица предикатных операций становится необозримо большой, поэтому остается лишь один эффективный способ представления предикатных операций - формулами.

Теорема о полноте дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатных операций. *При любых U, т и п дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатных операций полна. Любая предикатная операция в ней выражается формулой*

$$F(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bigvee_{P_1, P_2, \ldots, P_n \in M} F(P_1, P_2, \ldots, P_n) X_1^{P_1} X_2^{P_2}, \ldots, X_n^{P_n}, \qquad (9)$$

называемой *СДНФ* предикатной операции F.

Доказательство очевидно. Логическое суммирование в СДНФ ведется по всем предикатным векторам $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in M^n$. Символом $F(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ обозначена константа, являющаяся значением функции F от вектора $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Обратим внимание на то, что в (9) символы $X_1, X_2, \ldots, X_n$ употреблены лишь как предикатные переменные, но не как предикатные операции, а символ F обозначает фиксированную предикатную операцию. Запишем, в виде примера, СДНФ предикатной операции, представленной таблицей:

$$x^a X^0 \vee 1\, X^{x^a} \vee x^a X^{x^b} \vee x^a X^1. \qquad (в)$$

В дизъюнктивно-конъюнктивной алгебре предикатных операций не обязательно иметь в качестве базисных элементов все константы. В базисе элементов достаточно сохранить из числа констант лишь предикат 0 и все предикаты узнавания предмета x_i^a ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$). Все остальные предикаты выражаются средствами дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов [1]. Предикаты 0 и x_i^a здесь рассматриваются в роли константных предикатных операций, а операции дизъюнкции и конъюнкции - в роли операций, действующих на предикатные операции. *Фундаментальной алгеброй* называется алгебра предикатных операций, у которой базисными операциями служат дизъюнкция и конъюнкция, а базисными элементами - предикат 0 и всевозможные предикаты узнавания предметов x_i^a ($i = \overline{1, m}$, $a \in U$) и предикаты узнавания предикатов X_j^P ($j = \overline{1, n}$, $P \in M$). Фундаментальную алгебру можно рассматривать как сокращенный (но тем не менее полный) вариант дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатных операций.

Теорема о полноте фундаментальной алгебры. *Фундаментальная алгебра при любых U, т и п полна.*

Доказательство очевидно. В качестве примера формулы фундаментальной алгебры может служить формула (б).

Любое подмножество *В* носителя *А* алгебры А называется *замкнутым* в алгебре А, если результат каждой базисной операции алгебры

А, выполненной над произвольными элементами множества B, снова принадлежит множеству B. В этом случае будем говорить, что множество *B замкнуто* относительно каждой из базисных операций алгебры А. Если множество B замкнуто, то оно, вместе с базисными операциями (действие которых теперь ограничено только множеством B) и базисными элементами (только теми, которые содержатся в множестве B) алгебры А, тоже образуют алгебру. Обозначим эту алгебру буквой В. Так построенная алгебра В называется *подалгеброй* алгебры А. Выделим в множестве A всех предикатных операций подмножество B всех константных предикатных операций. Все их можно рассматривать просто как предикаты. Из базисных элементов фундаментальной алгебры в множестве B остались только предикаты узнавания предмета x_i^a ($i=\overline{1,m}$, $a\in U$). Сохраняем операции $\vee$ и $\wedge$. Ясно , что результатом этих операций, примененных к предикатам, снова будут предикаты. Получили дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов. Следовательно, дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов является подалгеброй фундаментальной алгебры. Дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов получаем из фундаментальной алгебры, если из ее базиса исключим все предикаты узнавания предикатов X_j^P ($j=\overline{1,n}$, $P\in$ M).

Дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов, рассматриваемая как алгебра предикатных операций, неполна. На ее языке можно выразить только все константные предикатные операции. С этой точки зрения дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов можно рассматривать как фрагмент фундаментальной алгебры. Любопытно, что возможна и другая точка зрения, при которой фундаментальную алгебру можно рассматривать как *усеченный вариант* дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов [4], определенной на расширенном универсуме предметов. В этом случае предикатные переменные переводятся в ранг предметных переменных, определенных на специальных множествах элементов с булевой структурой. В роли значений этих предметных переменных теперь выступают имена предикатов. При таком подходе алгебра предикатных операций *редуцируется* в алгебру предикатов. Проблема редукции алгебры предикатных операций в алгебру предикатов порождает много интересных задач, еще ждущих своего решения.

Консервативно расширим фундаментальную алгебру, вводя в ней базисную операцию отрицания и базисный элемент 1. Перечисляемые ниже законы называются *основными тождествами фундаментальной алгебры: законы идемпотентности* $X\vee X=X$, $X\wedge X=X$; *коммутативности* $X\vee Y=$ $=Y\vee X$, $X\wedge Y=Y\wedge X$; *ассоциативности* $(X\vee Y)\vee Z=X\vee(Y\vee Z)$, $(XY)Z=X(YZ)$; *дистрибутивности* $(X\vee Y)Z=$

$=XZ\vee YZ$, $XY\vee Z=(X\vee Z)(Y\vee Z)$; *элиминации* $X\vee XY=X$, $X(X\vee Y)=X$; *свертывания* $X\vee Y\bar{Y}=X$, $X(Y\vee\bar{Y})=X$; *Моргана* $\overline{X\vee Y}=\bar{X}\bar{Y}$, $\overline{XY}=\bar{X}\vee\bar{Y}$; *закон двойного отрицания* $\bar{\bar{X}}=X$; *противоречия* $X\bar{X}=0$; *исключенного третьего* $X\vee\bar{X}=1$; *законы для предикатных операций* 0 *и* 1 $X\vee 0=X$, $X0=0$, $X\vee 1=1$, $X1=X$. Символами X, Y, Z здесь обозначены произвольные предикатные операции на множестве R.

Нижеследующие законы связывают предметные и предикатные переменные: *законы отрицания для предиката узнавания предмета*

$$\overline{x_i^a}=\bigvee_{\substack{b\in U\\ b\neq a}} x_i^b,\ (i=\overline{1,m}); \tag{10}$$

для предикатов узнавания предиката

$$\overline{X_j^P}=\bigvee_{\substack{Q\in M\\ Q\neq P}} X_j^Q,\ (j=\overline{1,n}) \tag{11}$$

законы истинности для предикатов узнавания предмета

$$\bigvee_{a\in U} x_i^a=1,\ (i=\overline{1,m}); \tag{12}$$

для предикатов узнавания предиката

$$\bigvee_{P\in M} \overline{X_j^P}=1,\ (j=\overline{1,n}); \tag{13}$$

законы ложности для предикатов узнавания предмета

$$x_i^a x_i^b=0, \tag{14}$$

если $a\neq b$ ($a,\ b\in U$); *для предикатов узнавания предиката*

$$X_j^P X_j^Q=0, \tag{15}$$

если $P\neq Q$ ($P,\ Q\in$ M). Базисную операцию отрицания можно выразить явно (т.е. с помощью прямого определения) в базисе фундаментальной алгебры с помощью законов отрицания и Моргана [1], а базисный элемент 1 - с помощью закона истинности. Операцию отрицания можно, кроме того, задать неявно (т.е. с помощью косвенного определения) законами противоречия и исключенного третьего.

Теорема о полноте системы основных тождеств фундаментальной алгебры. *Система основных тождеств фундаментальной алгебры полна при любых U, m и n.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы о полноте системы основных тождеств дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов [4]. Система основных тождеств фундаментальной алгебры сократима: более половины законов из нее можно исключить без потери ею свойства полноты. Установим, для примера, тождественность формул (б) и (в) фундаментальной алгебры с универсумом $U=\{a, b\}$. Согласно законам истинности для предикатов узнавания предмета и предиката имеем:

$$x^a X^0 \vee (x^a \vee x^b) X^{x^a} \vee x^a X^{x^b} \vee x^a X^1 = x^b X^{x^a} \vee x^a (x^0 \vee X^{x^a} \vee$$
$$\vee X^{x^b} \vee X^1) = x^b X^{x^a} \vee x^a 1 = x^b X^{x^a} \vee x^a.$$

Список литературы: 1. *Дударь З.В., Мельникова Р.В., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Отношения как объекты формульного описания // АСУ и приборы автоматики. 1998. Вып. 107. С. 68-77. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х.: Выща шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. 159 с. 3. *Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О математическом описании смысла текстов естественного языка // Проблемы бионики. 1998. Вып 48. С. 141-149. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. Х.: Выща шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1984. 143 с.

Поступила в редколлегию 10.03.98