УДК 51.74

В.А. Афанасьев[1], М.А. Ильин[2], Ю.В. Наталуха[3], В.В. Токарев[4]

[1,2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

[3]ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, y_nataluha@mail.ru

[4] ХНУРЕ, г. Харьков, Украина, tvv.v@mail.ru

РЕСТАВРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ФИНИТНЫХ ДЕКОНВОЛЮЦИОННЫХ ОКОН

Разработан новый класс финитных деконволюционных окон для восстановления изображений в пространственной области на основе атомарных функций.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ФИНИТНЫЕ ДЕКОНВОЛЮЦИОННЫЕ ОКНА, АТОМАРНЫЕ ФУНКЦИИ, СЛУЧАЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПОЛЯ

Введение

Восстановление (реставрация) изображений — это научное направление по разработке методов и средств компенсации искажений, вносимых в изображения в процессе их формирования, регистрации или передачи.

Во многих случаях искажение можно приближенно считать следствием линейного преобразования исходного сигнала. Это происходит, например, в результате турбулентности атмосферы, движения или аберраций оптической системы.

Другая особенность наблюдаемого изображения — наличие в нем аддитивных случайных помех (шумов).

Шумы возникают в трактах формирования, передачи и приема сигналов. В последнее время широкое распространение получили линейные методы восстановления изображении (ВИ), которые применяются в пространственной или частотной областях [1-5].

При этом для описания двумерных сигналов (полей) используются как детерминистский, так и статистический подходы.

Пусть $g(x,y)$ и $f(\tau,\eta)$ — распределения интенсивностей излучения в плоскости изображения и оригинала соответственно, $h(x,y,\tau,\eta)$ — функция рассеяния точки (ФРТ) в предположении, что система отображения линейна.

Общее уравнение для описания $g(x,y)$ имеет вид:

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau,\eta)h(x,y,\tau,\eta)d\tau d\eta+\varepsilon(x,y)\,, \qquad (1)$$

где $\varepsilon(x,y)$ — аддитивный случайный шум [1-4].

Для пространственно-инвариантной функции рассеяния точки $h(x,y,\tau,\eta)=h(x-\tau,y-\eta)$, и интеграл в правой части (1) приводит к двумерной свертке, т.е.:

$$g(x,y)=\iint_{R^2} f(\tau,\eta)h(x-\tau,y-\eta)d\tau d\eta+\varepsilon(x,y)\,. \qquad (2)$$

Принимая форму искажений, описываемую выражениями (1) или (2), задачу восстановления $f(\tau,\eta)$ можно сформулировать так: при известной $g(x,y)$ найти хорошую оценку f, обозначаемую $\hat{f}(x,y)$, имея в распоряжении априорную информацию о величинах f,h,ε. Применяемые методы реставрации изображений используют разное количество известной априорной информации и различные критерии качества оценки $\hat{f}$.

Для получения оценки $\hat{f}$ можно применять как непрерывную, так и дискретную модель восстановления.

В первой модели весь процесс реставрации изображений согласно (1), (2) рассматривается как непрерывный. Функции $g(x,y)$, $f(\tau,\eta)$, $h(x,y)$, $\varepsilon(x,y)$ полагаются кусочно-непрерывными. Примерами такого подхода могут служить методы инверсной, винеровской фильтрации, управляемой линейной фильтрации. В этих методах восстановление изображений осуществляется путем применения соответствующих реставрирующих фильтров в частотной области.

Известны также и другие методы линейной фильтрации, действующие в частотной области [1,3]. В дискретной модели предполагается, что все компоненты преобразований (1), (2) представлены в виде отсчетов функций f,h,g,ε. Для реставрации при этом используются численный анализ и аппарат линейной алгебры [3, 5].

Атомарные функции — это финитные решения функционально-дифференциальных уравнений вида [6]:

$$Ly(x)=\lambda\sum_{K=1}^{M} C_k y(ax-b_k),$$

где $a>0$, L — линейный обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Одна из наиболее часто применяемых атомарных функций в теории приближений — это функция:

$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(t\alpha^{-j})}{t\alpha^{-j}}dt\,,$$

обозначаемая через $h_\alpha(x), a>1$.

Пусть $\tilde{h}_\alpha(t)$ — преобразование Фурье функции $h_\alpha(x)$. Тогда:

$$\tilde{h}_\alpha(t)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(t\alpha^{-j})}{t\alpha^{-j}}dt\,.$$

Носителем $h_\alpha(x)$ является отрезок $[-b,b]$, где $b=1(a-1)$.

1. Цель статьи

Представить новый класс финитных деконволюционных окон (ФДО) для восстановления изображений в пространственной области на основе атомарных функций. При этом используется статистический подход для описания двумерных сигналов.

Применение финитных деконволюционных окон позволяет построить эффективные алгоритмы восстановления изображений, требующие небольшого количества арифметических операций по сравнению с алгоритмами, основанными на преобразовании Фурье.

2. Постановка задачи и метод решения

Пусть $T(x,y)$ — случайное однородное поле, определенное на R^2. Рассмотрим интегральные преобразования случайных интегральных полей. Пусть $K(x,y)\in L_1(R^2)$. Тогда функция:

$$J(x,y)=\iint\limits_{R^2} K(x-\tau,y-\eta)T(\tau,\eta)d\tau d\eta$$

будет также случайным однородным полем [9]. Отметим, что последнее соотношение можно рассматривать как зависимость между входным сигналом $T(x,y)$ и выходным сигналом $J(x,y)$ пространственно-инвариантной линейной системы, $K(x,y)$ — весовая функция системы [1]. Обозначим через $B_{TT}(\tau_1,\tau_2)$и $B_{TJ}(\tau_1,\tau_2)$ автокорреляционную функцию поля $T(x,y)$ и взаимно корреляционную функцию полей $J(x,y)$, $T(x,y)$. Предположим, что спектральная плотность $f_{TT}(\lambda_1,\lambda_2)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, принадлежащие $L_1(R^2)$. При этих условиях $B_{TT}(\tau_1,\tau_2)\in L_1(R^2)$.

Тогда

$$B_{TJ}(\tau_1,\tau_2)=K(\tau_1,\tau_2)*B_{TT}(\tau_1,\tau_2), \tag{3}$$

здесь символ «*» означает операцию свертки. Аналогично:

$$B_{JJ}(\tau_1,\tau_2)=K(\tau_1,\tau_2)*B_{JT}(\tau_1,\tau_2) \tag{4}$$

Поскольку $B_{TT}\in L_1(R^2)$ и $K(x,y)\in L_1(R^2)$, то из соотношений (3), (4) следует, что функции $B_{TJ}(\tau_1,\tau_2)$, $B_{JJ}(\tau_1,\tau_2)$ принадлежит $L_1(R^2)$. Предположим, что функция $K(x,y)$ является четной по x и y. Обозначим через $K(\lambda_1,\lambda_2)$ ее преобразование Фурье. Отметим, что $K(\lambda_1,\lambda_2)$ вещественна и четна по λ_1 и λ_2. Используя свойства преобразования Фурье для свертки двух функций, получим:

$$f_{TJ}(\lambda_1,\lambda_2)=2\pi\ K_1(\lambda_1,\lambda_2)f_{TT}(\lambda_1,\lambda_2),$$

$$f_{JJ}(\lambda_1,\lambda_2)=4\pi^2\ K_1^2(\lambda_1,\lambda_2)f_{TT}(\lambda_1,\lambda_2).$$

Задачу восстановления изображений можно представить в следующей форме. Пусть $J(x,y)$, $\varepsilon_1(x,y)$, $\varepsilon_2(x,y)$ — независимые случайные однородные поля (СОП) с нулевым средним значением, у которых спектральные плотности $S(\lambda_1,\lambda_2)$, $S_1(\lambda_1,\lambda_2)$, $S_2(\lambda_1,\lambda_2)$ соответственно предполагаются известными. Истинное изображение $J_и(x,y)$ имеет вид:

$$J_и(x,y)=J(x,y)+A,\ A>0.$$

Наблюдаемое изображение $J_н(x,y)$ представим в форме:

$$J_н(x,y)= \\ =\iint\limits_{R^2} K(x-\tau,y-\eta)[J_и(\tau,\eta)+\varepsilon_1(\tau,\eta)]d\tau d\eta+\varepsilon_2(x,y), \tag{5}$$

где $K(x,y)$ — функция рассеяния точки, $K(x,y)\in L_1(R^2)$, $\varepsilon_1(x,y)$ и $\varepsilon_2(x,y)$ — шумы на входе и выходе приемника изображений соответственно. Равенство (3) представим в виде:

$$J_н(x,y)=K(x,y)*[J(x,y)+\varepsilon_1(x,y)]+\varepsilon_2(x,y)+D_1.$$

где $D_1=K(x,y)*A=M\left[J_н(x,y)\right]$, $M\delta$ — математическое ожидание случайной величины δ. Рассмотрим случайное однородное поле $J_{но}(x,y)=J_н(x,y)-D_1$, для которого $M\left[J_{но}(x,y)\right]=0$. Оценку $J_в(x,y)$ изображения $J_и(x,y)$ получим таким образом.

Первоначально найдем оценку $J_{во}(x,y)$ сигнала $J(x,y)$ в виде:

$$J_{во}(x,y)=W(x,y)*J_{но}(x,y).$$

где $W(x,y)$ — финитное деконволюционное окно.

Далее, положим $J_в(x,y)=J_{во}(x,y)+A$. Функция $W(x,y)$ определяется так:

$$W(x,y)=\sum_{k=1}^{m} C_k\ h_{\alpha_1}[\beta_1(x-d_{k_1})]\,h_{\alpha_2}[\beta_2(y-d_{k_2})], \tag{6}$$

d_{k_1}, d_{k_2} — параметры сдвига, β_1, β_2 — коэффициенты растяжения-сжатия.

Неизвестные коэффициенты C_k в (4) найдем из условия минимума функционала:

$$\Phi(W)=M[J_{во}(x,y)-J(x,y)]^2.$$

Набор чисел d_{k_1}, d_{k_2}, β_1, β_2 позволяет задать форму носителя $W(x,y)$. Предполагая функцию $K(x,y)$ четной по x и y, естественно считать, что и $W(x,y)$ является четной по x и y. Обозначим через $K_1(\lambda_1,\lambda_2),W_1(\lambda_1,\lambda_2)$ преобразования Фурье функций (x,y) и $W(x,y)$. Пусть:

$$F(\lambda_1,\lambda_2)=S(\lambda_1,\lambda_2)\left[1-4\pi^2K_1(\lambda_1,\lambda_2)\times\right. \\ \times W_1(\lambda_1,\lambda_2)\,]^2+4\pi^2W_1^2(\lambda_1,\lambda_2)\,[S_2(\lambda_1,\lambda_2)+ \\ \left.+4\pi^2K_1^2(\lambda_1,\lambda_2)\,S_1(\lambda_1,\lambda_2)\right].$$

Тогда:

$$\Phi(W)=\iint\limits_{R^2} F(\lambda_1,\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2. \tag{7}$$

Отметим, что:

$$W_1(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{2\pi\beta_1\beta_2}\tilde{h}_{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_1}{\beta_1}\right)\tilde{h}_{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_2}{\beta_2}\right)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{m}C_k\cos(d_{k_1}\lambda_1+d_{k_2}\lambda_2),$$

где $\tilde{h}_\alpha(\lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(\alpha^{-j}\lambda)}{\alpha^{-j}\lambda}$.

Введем вспомогательные функции:

$$\Psi_k(\lambda_1,\lambda_2)=\cos(d_{k_1}\lambda_1+d_{k_2}\lambda_2);$$
$$g(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{\beta_1\beta_2}\tilde{h}_{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_1}{\beta_1}\right)\tilde{h}_{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_2}{\beta_2}\right);$$
$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2)=2\pi g(\lambda_1,\lambda_2)\,K_1(\lambda_1,\lambda_2).$$

Из условия минимума $\Phi(W)$ следует, что $\partial\Phi/\partial C_e=0$. Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно C_k:

$$\sum_{k=1}^{m}A_{ek}C_k=B_e;\ \ e=1,2,...,m,$$

где:

$$A_{ek}=\iint_{R^2}\langle\{[S(\lambda_1,\lambda_2)+S_1(\lambda_1,\lambda_2)]\varphi^2(\lambda_1,\lambda_2)+$$
$$+S_2(\lambda_1,\lambda_2)g^2(\lambda_1,\lambda_2)\}\times\Psi_e(\lambda_1,\lambda_2)\,\Psi_k(\lambda_1,\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2\rangle.$$
$$B_e=\iint_{R^2}S(\lambda_1,\lambda_2)\,\varphi(\lambda_1,\lambda_2)\Psi_e(\lambda_1,\lambda_2)\,d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Заметим, что приближенное вычисление атомарной функции $h_\alpha(x)$, используемой в равенстве (4), в произвольной точке ее носителе можно осуществить с помощью применения теории рядов Фурье.

Поскольку функция $h_\alpha(x)$ бесконечно дифференцируема, четна и $SUPP\,h_\alpha(x)=[-b,b]$, $b=1/(\alpha-1)$, то на отрезке $[-b,b]$ она представима в виде ряда Фурье по косинусам, т.е.:

$$h_\alpha(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos\left(\frac{m\pi x}{b}\right). \quad (8)$$

Здесь:

$$a_m=\frac{1}{b}\int_{-b}^{b}h_\alpha(x)\cos\frac{m\pi x}{b}dx. \quad (9)$$

Далее:

$$h_\alpha(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}h_\alpha(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos(t_x)\,h_\alpha(x)dx=$$
$$=\int_{-b}^{b}\cos(t_x)\,h_\alpha(x)dx. \quad (10)$$

Сравнивая соотношение (8) и (7), получим, что $a_m=\tilde{h}_\alpha(\pi m/b)/b$. Поскольку функция $\tilde{h}_\alpha(t)$ на действительной оси при $t\to\infty$ убывает быстрее любой степени t^{-n}, $n>0$, то коэффициенты ряда (6) быстро убывают при $m\to\infty$.

Приведем схему взаимодействия подпрограмм для вычисления атомарной функции.

Рис. 1. Схема взаимодействия подпрограмм для вычисления атомарной функции.

Подпрограмма SIY вычисляет отношение $\sin t/t$ для любого вещественного t с заданной точностью. Подпрограмма FI вычисляет бесконечное произведение $\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\sin(t\alpha^{-j})}{t\alpha^{-j}}$ с заданной точностью. Подпрограмма ATOM реализует приближенное вычисление $h_\alpha(x)$, исходя из представления (8). На рис. 2–4 представлены графики функций $h_\alpha(x)$ при α = 1,5; 1,7; 2,2.

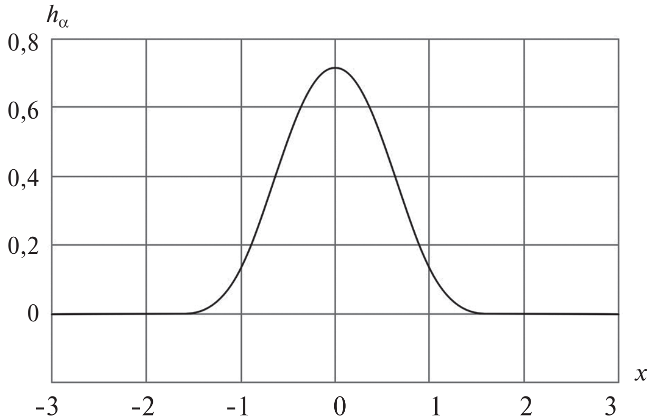

Рис. 2. График функции $h_\alpha(x)$ при $\alpha = 1{,}5$

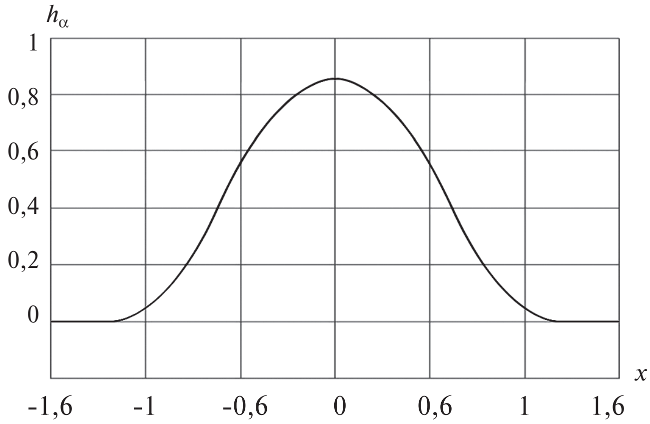

Рис. 3. График функции $h_\alpha(x)$ при $\alpha = 1{,}7$

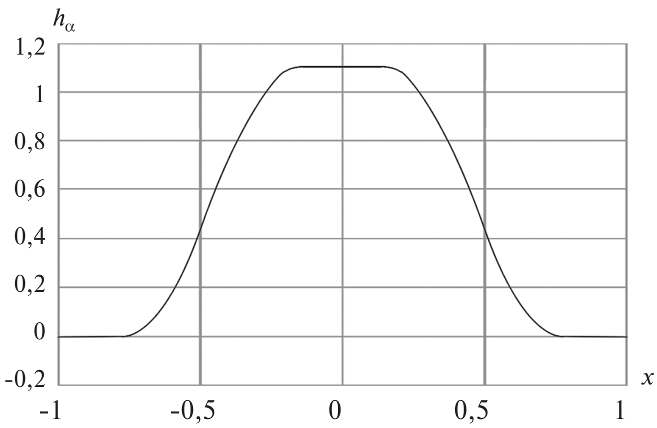

Рис. 4. График функции $h_\alpha(x)$ при $\alpha = 2{,}2$

3. Выводы

В результате исследований получен новый класс финитных деконволюционных окон в виде линейной комбинации произведений сдвигов атомарных функций для восстановления изображений, имеющих структуру случайных однородных полей непрерывного аргумента.

Отметим, что в работе [7] изучались финитные деконволюционные окна, построенные на основе атомарных функций, но при иных предположениях относительно шума в наблюдаемом изображении.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что применение финитных деконволюционных окон позволяет создать алгоритмы восстановления изображении, которые требуют небольшого количества арифметических операций по сравнению с алгоритмами, основанными на преобразовании Фурье.

Эти алгоритмы могут применяться с целью создания эффективных аппаратно-программных средств обработки изображений, которые имеют простоту в реализации и являются быстродействующими.

Использование атомарных функций в представлении (4) оправдано их хорошими аппроксимационными свойствами, тем, что они являются финитными, а также тем, что их преобразования Фурье достаточно быстро убывают на бесконечности.

Отметим преимущества описанного линейного метода реставрации изображений в пространственной области.

1. Его можно применять не только к искаженным и зашумленным случайным однородным полям, которые можно сегментировать на участки, имеющие структуру таких полей.

При этом различным участкам соответствуют различные функции спектральной плотности и функции рассеяния точки $K(x,y)$.

2. Небольшой оббьем вычислений при вычислении сверток:

$$W(x,y) * J_{\text{но}}(x,y).$$

3. Высокая устойчивость относительно экстрамодельных шумов, которые возникают в дальней зоне для восстанавливаемого участка.

Положительных эффектов, отмеченных в п.п. 1-3, нельзя достигнуть при использовании, например, инверсной, тихоновской или винеровской фильтрации изображений, т.к., в этих методах реставрация изображений происходит в частотной области.

Дополнительно укажем, что возможно рассмотрение функций $K(x,y)$ достаточно общего вида, без предположения их четности по x и y. Как следствие, изменится вид функции $F(\lambda_1,\lambda_2)$ в [5].

Список литературы: 1. *Василенко, Г.И.* Восстановление изображений [Текст] / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. — М.: Радио и связь, 1986. — 302 с. **2.** *Даджион, Д.* Цифровая обработка многомерных сигналов [Текст] / Д. Даджион, Р. Мерсеро. — М.: Мир, 1988. — 486 с. **3.** Обработка изображений и цифровая фильтрация [Текст] / Под ред. Т. Хуанга. — М.: Мир, 1979. — 319 с. **4.** Прэтт У. Цифровая обработка изображений [Текст]. — Т. 2. — М.: Мир, 1982. — 742 с. **5.** *Ярославский, Л.П.* Введение в цифровую обработку изображений [Текст] / Л.П. Ярославский. — М.: Сов. радио, 1979. — 312 с. **6.** *Рвачев, В.Л.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах [Текст] / В.Л.Рвачев, В.А. Рвачев. — Киев: Наукова думка, 1979. — 194 с. **7.** *Афанасьев, В.А.* Восстановление изображений с помощью деконволюционных окон, построенных на основе атомарных функций [Текст] / В.А. Афанасьев, В.Ф. Кравченко, В.А. Рвачев, В.Л. Рвачев // Докл. АН СССР. 1991. — Т. 321, № 5. — С. 938-940. **8.** *Кравченко, В.Ф.* Реставрация изображений с помощью деконволюционных окон [Текст] / В.Ф. Кравченко, В.А. Афанасьев // Измерительная техника. — 1992. № 3. — С. 9-10. **9.** *Королюк, В.С.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороходов, А.Ф. Турбин. — М.: Наука, 1986. — 640 с.

Поступила в редколлегию 22.08.2012

УДК 51.74

Реставрація зображень на основі фінітних деконволюційних вікон / В.А. Афанасьєв, М.А. Ільїн, Ю.В. Наталуха, В.В. Токарєв // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2012. – № 2 (79). – С. 80-83.

У статті розглядаються перспективні напрямки, пов'язані з використанням фінітних деконволюціонних вікон для відновлення зображень.

Бібліогр.: 8 найм.

UDK 51.74

The promising directions using finite deconvolution windows for restoration of images are considered in the article / V.A. Afanasiev, M.A. Ilyin, Y.V. Natalukha, V.V. Tokarev // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2012. – № 2 (79). – P. 80-83.

In the article the promising directions of using a statistical approach for describing two-dimensional signals.

Ref.: 8 items.