УДК 621.396 : 621.391

Т. А. СКВОРЦОВ

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ФЛЮКТУАЦИЙ ФАЗЫ СИГНАЛА, ПРОШЕДШЕГО ТУРБУЛЕНТНУЮ ТРОПОСФЕРУ

Известные работы [1; 2] по измерению случайных полей с использованием теории фильтрации марковских процессов выполнены без достаточного радиофизического обоснования марковской модели полей.

В статье предпринята попытка разработки по возможности корректной марковской модели, вытекающей из физики процессов распространения радиоволн в турбулентной тропосфере [3—5].

Пусть положение источника излучения определяется вектором $\vec{r}_0(t)$, а положение точек наблюдения, находящихся на Земле, — векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. Тогда фаза радиоволны в точке наблюдения 1 (2) в приближении геометрической оптики

$$\Phi_{1,2} = k \int\limits_0^{|\vec{r}_{1,2}-\vec{r}_0|} \sqrt{\varepsilon(\sigma, t)}\, d\sigma, \qquad (1)$$

где интегрирование производится вдоль луча; $k=\omega/c$; ω — частота излучения с нулевой начальной фазой $\varepsilon(\vec{r}, t) = \langle\varepsilon(\vec{r})\rangle + \tilde{\varepsilon}(\vec{r}, t)$ — диэлектрическая проницаемость тропосферы, складывающаяся из регулярной $\langle\varepsilon(\vec{r})\rangle$ и флюктуационной составляющих. Для случая малых флюктуаций примем $\langle\varepsilon(\vec{r})\rangle \approx 1$, $\tilde{\varepsilon}(\vec{r}, t) \ll 1$. Тогда можно записать

$$\Phi_{1,2} = \varphi_{1,2}(t) + \psi_{1,2}(t), \qquad (2)$$

где $\varphi_{1,2}(t) = k|\vec{r}_0 - \vec{r}_{1,2}|$ — регулярная составляющая фазы; $\psi_{1,2}(t) = \frac{k}{2} \int\limits_{\sigma_{1,2}}^{|\vec{r}_{1,2}-\vec{r}_0|} \varepsilon(\sigma, t)\, d\sigma$ — флюктуационная составляющая фазы; $\sigma_{1,2}$ — расстояние от источника до точки входа луча 1(2) в тропосферу.

Создание модели флюктуаций фаз $\Psi_{1,2}(t)$ в виде многомерного нормального марковского процесса предполагает их описание стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) вида [6]

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik}\lambda_k + n_i(t); \; i = 1, 2, \dots, N. \tag{3}$$

Здесь α_{ik} — постоянные коэффициенты; $n_i(t)$ — нормальные шумы с корреляционными функциями (КФ)

$$\langle n_i(t)\, n_j(t)\rangle = \beta_{ij}\delta(t_1 - t_2) \tag{4}$$

и нулевыми средними.

Процесс $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ характеризуется коэффициентами сноса

$$\vec{a} = \{a_1, \dots, a_N\}, \quad a_i = -\sum_{k=1}^{N} \alpha_{ik}\lambda_k \tag{5}$$

и матрицей коэффициентов диффузии

$$\vec{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \vec{\beta} \end{Vmatrix}, \quad \vec{\beta} = \|\beta_{ij}\|. \tag{6}$$

Вводя матрицу $\vec{A} = \|da_i/d\lambda_j\| = \|\alpha_{ij}\|$ и пользуясь уравнением $\vec{A}\vec{K} + \vec{K}\vec{A}^T - \vec{B} = 0$ **(7)**, находим элементы матрицы дисперсий $\vec{K} = \|k_{ij}\|$ для стационарного состояния, где $k_{ij} = \langle\lambda_i(t)\,\lambda_j(t)\rangle$.

Решая уравнение $dF/dt = \vec{A}\vec{F}(t_1, t_2)$ **(8)** при условии $\vec{F}(t_1, t_1) = \vec{I}$, определяем матрицу перехода и матрицу корреляционных функций процесса $\vec{\lambda}$

$$\vec{R}^\lambda = \begin{cases} \vec{F}(t_1, t_2)\,\vec{K}(t_2, t_2), & t_1 \geqslant t_2; \\ \vec{K}(t_1, t_1)\,\vec{F}^T(t_2, t_1), & t_1 \leqslant t_2, \end{cases} \tag{9}$$

элемент которой $R^\lambda_{ij}(t_1, t_2) = \langle\lambda_i(t_1)\,\lambda_j(t_2)\rangle$ **(10)** в стационарном состоянии зависит только от $\tau = t_1 - t_2$.

Таким образом, разработку марковской модели можно начать с получения элементов матрицы корреляционной функции (КФ) фаз $\Psi_{1,2}(t)$

$$R^\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = \langle\Psi_i(t_1)\;\Psi_j(t_2)\rangle, \tag{11}$$

а затем перейти к описанию флюктуаций с помощью СДУ (3), используя выражения (3)—(10).

Поскольку коэффициенты сноса и диффузии являются условными средними, характеризующими приращения процесса $\vec{\lambda}$ на бесконечно малых интервалах времени, то изучим изменения фаз на коротком интервале времени τ, считая скорость источника излучения $\vec{V}$ и ветра $\vec{U}$ постоянными во времени и известными величинами.

Введем орт $\vec{z}^0$, направленный из центральной точки $\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ в среднюю точку траектории $\frac{\vec{r}_0(t_1) + \vec{r}_0(t_2)}{2}$ и цилиндрическую систему координат $\vec{\rho}$, $\vec{z}$. Тогда, поступая аналогично работе [3], с учетом $\langle\Psi_i\rangle = 0$, для изотропных неоднородностей в приближении геометрической оптики получаем

$$R^{\Psi}(\vec{l},\ t_1,\ t_2) = \langle \Psi_1(t_1)\Psi_2(t_2)\rangle = \pi^2 k^2 \int\limits_{z_{\text{вх}}}^{z_0} d\eta \int\limits_0^{\infty} \varkappa \Phi_{\varepsilon}(\varkappa) J_0\left[\varkappa\right| \times$$

$$\times \left| \frac{\eta}{z_0}\vec{b} + \left(1 - \frac{\eta}{z_0}\right)\vec{b}_0 \right|\Big] d\varkappa, \qquad (12)$$

где $\vec{l} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2$; $\vec{b} = \vec{l} - \vec{U}_{\perp}\tau$; $\vec{b}_0 = -(\vec{U}_{\perp} - \vec{V}_{\perp})\tau$; $\tau = t_1 - t_2$; $\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_2$, $\vec{V}_{\perp}$, $\vec{U}_{\perp}$ — проекции векторов $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{V}$, $\vec{U}$ соответственно на плоскость, перпендикулярную орту $\vec{z}^0$; $z_{\text{вх}}$ — расстояние от источника излучения до турбулентного слоя; z_0 — расстояние от источника до центральной точки базы l; $\Phi_{\varepsilon}(\varkappa)$ — угловой спектр флюктуаций диэлектрической проницаемости.

Флюктуации ε характеризуются структурным коэффициентом C_{ε}^2(см$^{-2/3}$), а также внутренним L_* и внешним L_0 масштабами. Ниже рассмотрен случай антенных систем с большой базой $|\vec{l}| \gg L_*$ так, что целесообразно использовать кармановский спектр [3]

$$\Phi_{\Sigma}(\varkappa) = \frac{0{,}033 C_{\varepsilon}^2 L_0^{11/3}}{[(L_0\varkappa_0)^2 + 1]^{11/6}}. \qquad (13)$$

Поскольку угловой спектр определяет в конечном счете частотный спектр флюктуаций, а также учитывая, что случайные процессы с рациональным частотным спектром могут быть точно представлены в виде (3), оказывается целесообразным приближение $\frac{11}{6} \approx 2$ в знаменателе выражения (13).

Тогда, пользуясь равенством [7]

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{J_{\nu}(bx)\, x^{\nu+1} dx}{(x^2 + a^2)^{\mu+1}} = \frac{a^{\nu-\mu} b^{\mu}}{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab), \qquad (14)$$

из (12) получаем

$$R_\Psi(\vec{l},\ t_1,\ t_2)=\frac{0{,}033\pi^2k^2C_\varepsilon^2L_0^{5/3}}{4}\int\limits_{z_{\text{вх}}}^{z_0}Y(\eta)K_1[Y(\eta)]\,d\eta;$$

$$Y(\eta)=\left|\frac{\eta}{z_0}\frac{\vec{b}}{L_0}+\left(1-\frac{\eta}{z_0}\right)\frac{\vec{b}_0}{L_0}\right|. \qquad (15)$$

Обозначим толщину слоя $H=z_0-z_{\text{вх}}$ и рассмотрим случай, когда источник находится далеко за пределами турбулентного слоя. При этом условии $H\ll z_0$ и $1-\frac{\eta}{z_0}\ll 1$. Учтем также, что рассматривается изменение фаз на малом интервале времени τ и ограничимся случаем, когда база не превышает внешних размеров неоднородностей $|\vec{l}|<L_0$. Поскольку, кроме того, всегда $\frac{\eta}{z}\leqslant 1$, то можно заменить цилиндрическую функцию $K_1(Y)$ ее аппроксимацией для малых Y $Y\cdot K_1(Y)\approx 1-\frac{1}{4}Y^2$ и, вычислив (15) с учетом условия $\frac{H}{z_0}\ll 1$, будем иметь

$$R^\Psi(l_1,\ \tau)\approx\langle\Psi^2\rangle\{1-[l_1^2+\tau_U^2+\tau_V^2+2\tau_U\tau_V\Delta_{UV}+$$
$$+2l_1\tau_U\Delta_U+2l_1\tau_V\Delta_V]\}, \qquad (16)$$

где $\langle\Psi^2\rangle=0{,}033\pi^2k^2C_\varepsilon^2L_0^{5/3}\cdot\frac{H}{4}$ — дисперсия фазы $\Psi(t)$;

$$l_1=\frac{|\vec{l}|}{2L_0};\quad \tau_U=c_U\tau;\quad \tau_V=c_V\tau;$$

$$c_U=\frac{U_\perp}{2L_0};\quad c_V=\frac{V_\perp H}{2\sqrt{3}L_0z_0};\quad \Delta_U=-\cos(\widehat{lU_\perp})=-\frac{\vec{l}\cdot\vec{U}_\perp}{|\vec{l}|\cdot|\vec{U}_\perp|};$$

$$\Delta_V=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\widehat{lV_\perp});\qquad \Delta_{UV}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\widehat{U_\perp V_\perp}). \qquad (17)$$

При $\tau_U=\tau_V=0$ из (17) записываем пространственную КФ $R^\Psi(l_1,\ 0)=\langle\Psi^2\rangle(1-l_1^2)$, которая с точностью до приближения $^5/_3\approx 2$ соответствует колмогоровской модели [5].

Перейдем для большей ясности к рассмотрению частных случаев. В первом случае (при большой поперечной скорости источника ($V_\perp$) можно пренебречь ветровым сносом неоднородностей за время фильтрации, полагая $c_U\ll c_V$. Во втором (при неподвижном или малоподвижном источнике излучения) можно положить $c_U \ll c_V$. Формально в обоих случаях выражение (16) приводится к виду

$$R^\Psi(l_1, \tau_1) \approx \langle \Psi^2 \rangle \{1 - [l_1^2 + \tau_1^2 + 2l_1\tau_1\Delta]\}, \tag{18}$$

где $\tau_1 = c\tau$, $c = \begin{cases} c_U \\ c_V \end{cases}$.

При $l_1 = 0$ из (18) получим диагональные элементы матрицы $\vec{R}^\Psi$

$$R^\Psi(0, \tau) = \langle \Psi^2 \rangle (1 - \tau_1^2). \tag{19}$$

Выражения (18), (19) становятся все более неточными при приближении к границам области, определяемой выражением $l_1^2 + \tau_1^2 + 2l_1\tau_1\Delta = 1$, так как интеграл (16) вычислен приближенно.

Для описания пространственно-временной корреляционной функции (ПВКФ) возле границы области и за ее пределами перейдем к КФ вида

$$R^\Psi(l_1\tau_1) = \langle \Psi^2 \rangle f_1(l_1') f_2(l_1, \tau_1); \tag{20}$$

$$f_1(l_1') = \frac{1}{p - 2/p}\left[p \exp\left(-\frac{2}{p} l_1'\right) - \frac{2}{p}\exp(-p l_1')\right]; \tag{21}$$

$$f_2(l_1, \tau_1) = \frac{1}{m - 2/m}\left[m \exp\left(-\frac{2}{m}|\tau_1'|\right) - \frac{2}{m}\exp(-m|\tau_1'|)\right]; \tag{22}$$

$$\tau_1' = \tau_1 + T;\quad l_1' = l_1\sqrt{1 - \Delta^2};\quad T = l_1\Delta. \tag{23}$$

Такая КФ обладает следующими свойствами:

1) приближается к (18) при малых l_1, τ_1;

2) хорошо аппроксимирует используемые в литературе КФ для немалых l_1, τ_1 при соответствующем подборе p и m;

3) может быть задана марковским процессом второго порядка.

Первое свойство легко выявляется, если разложить экспоненты в (20) в ряд Тейлора с учетом членов до второго порядка малости включительно.

Второе свойство можно проиллюстрировать графически.

Например, при $p = 1{,}5$ функция (21) в масштабе $x = \frac{l^{1/2}}{2}$ практически совпадает с «кармановской» КФ в масштабе τ/τ_0 [5]. При $p \gg 1$ $(m \gg 1)$ КФ приближается к экспоненциальной.

Рассмотрим третье свойство. Введем процесс $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \xi_1, \xi_2\}$, описываемый матрицами

$$\vec{A} = \begin{Vmatrix} \vec{\alpha} & -\vec{I} \\ 0 & \vec{\gamma} \end{Vmatrix};\quad \vec{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \vec{\beta} \end{Vmatrix};\quad \vec{\beta} = \begin{Vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & \beta_1 \end{Vmatrix}; \tag{24}$$

$$\vec{\alpha} = \operatorname{diag}\{\alpha, \alpha\};\quad \vec{\gamma} = \operatorname{diag}\{\gamma, \gamma\};\quad \vec{I} = \operatorname{diag}\{1, 1\},$$

т. е. СДУ вида

$$\frac{d\lambda_1}{dt} + \alpha\lambda_1(t) = \xi_1(t); \quad \frac{d\xi_1}{dt} + \gamma\xi_1(t) = n_{\xi_1}(t);$$
$$\frac{d\lambda_2}{dt} + \alpha\lambda_2(t) = \xi_2(t); \quad \frac{d\xi_2}{dt} + \gamma\xi_2(t) = n_{\xi_2}(t). \tag{25}$$

Из (6) — (10) найдем

$$R_{11}^{\lambda} = R_{22}^{\lambda} = \frac{\beta_1}{2\alpha\gamma(\alpha^2-\gamma^2)}\{\alpha\exp(-\gamma|\tau|) - \gamma\exp(-\alpha|\tau|)\}, \tag{26}$$

$$R_{12}^{\lambda} = cR_{11}^{\lambda}. \tag{27}$$

Положим

$$\gamma = \frac{2}{m}c, \ \alpha = mc, \ \beta_1 = 4\langle\Psi^2\rangle c^3\left(m + \frac{2}{m}\right), \ \beta_2 = \beta_1 f_1(l_1) \tag{28}$$

и запишем (20) для случая $\Delta=0$ с подстановкой $\tau_1 = c\tau$.

Сравнив (20) с (26), (27), увидим, что

$$R_{11}^{\lambda}(\tau) = R^{\Psi}(0, \tau); \ R_{12}^{\lambda}(\tau) = R^{\Psi}(l_1, \tau),$$

т. е. матрица КФ компонент $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ совпадает с матрицей КФ процесса $\vec{\Psi}(t) = \{\Psi_1(t), \Psi_2(t)\}$. При этом ($\Delta=0$) функция $f_2(l_1, \tau_1)$ не зависит от l_1 и ПВКФ (20) факторизуется, что означает разделение на пространственный и временной сомножители.

Перейдем к случаю $\Delta\neq 0$. Для этого рассмотрим процесс

$$\lambda_2'(t) = \lambda_2\left(t + \frac{T}{c}\right). \tag{29}$$

Поскольку процесс $\vec{\lambda}(t)$ стационарный, то диагональные элементы матрицы КФ R_{ij}^{λ} при сдвижке процесса $\lambda_2(t)$ во времени не изменяются, а взаимная КФ процессов

$$R_{12}^{\lambda'}(\tau) = R_{12}^{\lambda}\left(\tau + \frac{T}{c}\right). \tag{30}$$

Если при $\Delta\neq 0$ заменить l_1 на l_1^1 в пространственном сомножителе $f_1(\cdot)$, то с учетом (28) (30) совпадает с (20).

Таким образом, процесс

$$\vec{\lambda}(t) = \left\{\lambda_1(t), \ \lambda_2\left(t + \frac{T}{c}\right)\right\}, \tag{31}$$

описываемый выражениями (24), (25), (28) с учетом (17), (23), статистически описывает флюктуации фазы так, что

$$\Psi_1(t) = \lambda_1(t), \ \Psi_2(t) = \lambda_2\left(t + \frac{T}{c}\right).$$

Однако ПВКФ (20) в общем случае не факторизуется, а процесс (31) при $\Delta \neq 0$ не является марковским, так как будущее значение компоненты λ_2 зависит от прошлого значения компоненты λ_1 (или наоборот), что противоречит определению [6].

Список литературы: 1. *Шмелев А. Б.* Нелинейная пространственно-временная оценка фазовых флуктуаций, вызванных распространением волны в случайно-неоднородной среде//Радиотехника и электрон. 1980. Т. 25, № 4, С. 717—722. 2. *Маслов А. Ф., Нестеров К. П.* Квазиоптимальный алгоритм измерения амплитуд и фаз сигналов на выходах элементов приемной антенной решетки, работающей в неоднородной среде//Радиотехника и электрон. 1983. Т. 28. Вып. 3. С. 491—500. 3. *Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И., Виноградов А. Г.* Прохождение радиоволн через атмосферу Земли. М., 1983. 224 с. 4. *Арманд Н. А., Кибардина И. Н., Ломакин А. Н.* Влияние высотного профиля на спектр флуктуаций разности фаз при излучении радиоволн движущимся источником//Радиотехника и электрон. 1980. Т. 25. Вып. 8. С. 1767—1770. 5. *Татарский В. Н.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967. 548 с. 6. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. М., 1977. 206 с. 7. *Градштейн И. М., Рыжик И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 1962. 180 с.

Поступила в редколлегию 24.01.89