

УДК 517.927:517.95]:519.6

**МЕТОД КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА-РВАЧОВА
У ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, ЩО Є МАТЕМАТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ
МІКРОЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ**

Гвоздєв М.І.

e-mail: mykyta.hvozdev@nure.ua

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

A boundary value problem for a semilinear fourth-order equation with Navier boundary conditions, which serves as a mathematical model of a microelectromechanical system (MEMS), is considered. For its numerical analysis, the method of two-sided approximations based on the use of the Green-Rvachev's quasi-function is proposed.

Мікроелектромеханічні системи (МЕМС) широко застосовуються в сучасних технологіях: сенсорах, актуаторах, мікродзеркалах, біомедичних пристроях. Одним із ключових механізмів керування є електростатична взаємодія, яка спричиняє деформацію пружних мікроструктур. Особливістю таких систем є, зокрема, сильна нелінійність електростатичних сил, наявність критичного ефекту «pull-in» (раптове прилипання мембрани), залежність роботи пристрою від геометрії та матеріальних параметрів. Це потребує дослідження питань існування та єдиності розв'язків відповідних математичних моделей, якими є зазвичай крайові або початково-крайові задачі для напівлінійних рівнянь другого або четвертого порядку, дослідження залежності цих задач від параметрів та знаходження їх критичних значень, вивчення поведінки розв'язку поблизу сингулярності тощо. Отже, актуальною науковою задачею є задача розробки нових та вдосконалення існуючих методів чисельного аналізу зазначеного класу задач, зокрема, ітераційних схем з двобічним характером збіжності.

Розглянемо типову МЕМС-структуру типу «пружна пластина – нерухомий електрод». Вона складається з верхнього електроду (тонкої пружної пластини) та нижнього електроду (жорсткої провідної підкладки), між якими є повітряний зазор товщини d ; прикладена напруга V створює електростатичне поле. Якщо пружна пластина має форму Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$), то за певних припущень математичною моделлю МЕМС буде задача Нав'є для напівлінійного рівняння четвертого порядку еліптичного типу, що у безрозмірних змінних має вигляд [1]:

$$\Delta^2 u - \gamma^2 \Delta u = \frac{\lambda}{(1-u)^2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

де u – прогин мембрани, $0 < u(\mathbf{x}) < 1$, $\mathbf{x} \in \Omega$, γ^2 задає відношення натягу до жорсткості, λ – параметр електростатичної дії, $\lambda \sim \frac{V^2}{d^3}$.

Якщо покласти $u_1 = u$, $u_2 = -\Delta u$, то задачу (1), (2) можна звести до системи еліптичних рівнянь другого порядку:

$$-\Delta u_1 = u_2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3)$$

$$-\Delta u_2 + \gamma^2 u_2 = \frac{\lambda}{(1 - u_1)^2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Використовуючи метод квазіфункцій Гріна-Рвачова [2] від крайової задачі (4), (5) перейдемо до еквівалентної системи інтегральних рівнянь Урисона, до розв'язку якої побудуємо послідовні наближення з двобічним характером збіжності.

Нехай геометрію області Ω можна описати методом R -функцій і побудована цим методом елементарна функцію $\omega(\mathbf{x})$ така, що $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$ і $|\nabla\omega(\mathbf{x})| \neq 0$ на $\partial\Omega$. Позначимо

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{1 + \frac{4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}{r^2}}$$

– квазіфункція Гріна-Рвачова для оператора Лапласа $-\Delta u$ у просторі $\mathbb{R}^2$;

$$Q^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \left(K_0(\gamma r) - K_0\left(\gamma \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}\right) \right),$$

– квазіфункція Гріна-Рвачова для оператора Гельмгольца $-\Delta u + \gamma^2 u$ у просторі $\mathbb{R}^2$;

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

$$K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) + \gamma^2 \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}),$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$, $K_0(z)$ – модифікована функція Бесселя другого роду,

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}}, \quad \tilde{g}^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} K_0\left(\gamma \sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\mathbf{s})}\right).$$

Тоді система (3) – (5) еквівалентна наступній системі інтегральних рівнянь Урисона

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_1(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (6)$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u_2(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - u_1(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}. \quad (7)$$

Систему рівнянь (6), (7) розглядатимемо як операторне рівняння з гетеротонним оператором у просторі $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$, що напівупорядковано конусом $\mathcal{K}_+ \times \mathcal{K}_+$. У конусі $\mathcal{K}_+ \times \mathcal{K}_+$ для гетеротонного оператора, що визначається правою частиною системи рівнянь (6), (7), виділимо сильно інваріантний конусний відрізок $\langle (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x})), (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x})) \rangle$ і сформуємо ітераційний процес за схемою:

$$v_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (8)$$

$$v_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - v_1^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad (9)$$

$$w_1^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_1^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} Q(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (10)$$

$$w_2^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_+^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \int_{\Omega} K_-^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_2^{(k)}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \lambda \int_{\Omega} \frac{Q^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{(1 - w_1^{(k)}(\mathbf{s}))^2} d\mathbf{s}, \quad (11)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$v_1^{(0)}(\mathbf{x}) = v_1^0(\mathbf{x}), \quad v_2^{(0)}(\mathbf{x}) = v_2^0(\mathbf{x}), \quad (12)$$

$$w_1^{(0)}(\mathbf{x}) = w_1^0(\mathbf{x}), \quad w_2^{(0)}(\mathbf{x}) = w_2^0(\mathbf{x}). \quad (13)$$

де

$$K_+(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_-(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \mathbf{s})\},$$

$$K_+^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}, \quad K_-^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max\{0, -K^{(\gamma)}(\mathbf{x}, \mathbf{s})\}.$$

Ітераційний процес (8) – (12) за певних обмежень на параметр λ двобічно збігається у нормі простору $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ до єдиного на конусному відрізку $\langle (v_1^0(\mathbf{x}), v_2^0(\mathbf{x})), (w_1^0(\mathbf{x}), w_2^0(\mathbf{x})) \rangle$ розв'язку крайової задачі (3) – (5). Отже, ми маємо можливість з гарантованою точністю апроксимувати не тільки розв'язок вихідної задачі (1), (2), а і його лапласіан.

Роботу запропонованого методу продемонстровано на тестовому прикладі задачі, що розглядається в області $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$.

Список використаних джерел:

1. Laurençot P., Walker C. A fourth-order model for MEMS with clamped boundary conditions. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 2014. Vol. 109. № 6. P. 1435-1464.
2. Sidorov M. V. Method of two-sided approximations for finding positive solutions of boundary value problems for semilinear elliptic systems: the use of the Green-Rvachev's quasi-function. *Journal of Numerical & Applied Mathematics*. 2018. № 2 (128). P. 96-113.