

УДК 621.396.67

Я. С. Шифрин, Ю. М. Бородавко

СТАТИСТИКА ПОЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СФОКУСИРОВАННОЙ АНТЕННЫ

Дан анализ характеристик поля линейной антенны, сфокусированной в зону Френеля, при наличии в ней фазовых флуктуаций в распределении источников. Приведены графики, иллюстрирующие распределение локальных и интегральных энергетических характеристик поля при разных глубинах фокусировки и разных значениях параметров флуктуаций. Рассмотрено влияние флуктуаций источников на средние характеристики фокального пятна и его флуктуации.

1. Введение

Флуктуации источников, всегда присутствующие в реальных антеннах, влияют на все их характеристики. Изучение этой проблемы составляет

предмет статистической теории антенн, основы которой изложены в [1]. Позднее развитая в [1] теория для дальней зоны была обобщена и на зону Френеля [2], значимость которой в последнее время существенно повысилась из-за увеличения ее протяженности (в связи с ростом размеров современных антенн) и обострения проблемы ЭМС. Важно при этом отметить, что рост размеров антенн сопровождается зачастую ростом флуктуаций источников в их раскрыве, что усиливает целесообразность статистического подхода к их анализу.

В работе [2] изучена статистика поля линейной несфокусированной антенны с флуктуациями источников. Цель настоящей работы — изучение статистики поля линейной сфокусированной в зону Френеля антенны. Фокусировка антенн в зону Френеля используется в системах с синтезированной апертурой, при передаче энергии СВЧ, в технике антенных измерений, в “ближней” радиолокации и т. д.

2. Исходные соотношения

При анализе статистики поля линейной непрерывной антенны в зоне Френеля в работе [2] исходным принято следующее выражение для комплексной амплитуды поля

$$E(\psi, \chi) = \frac{1}{R} f(\psi, \chi) = \frac{1}{R} \int_{-L}^{+L} A(x) \exp[j\psi(x)] \exp[j(\psi x - \chi x^2)] dx, \quad (1)$$

где $\psi = \pi L \sin \theta / \lambda$; L — длина антенны; θ — угол, отсчитываемый от нормали к оси антенны; $\chi = \pi L^2 \cos^2 \theta / 4R\lambda$; R — расстояние от центра антенны до точки наблюдения; $f(\psi, \chi)$ — комплексный множитель системы в зоне Френеля; $A(x)$ и $\varphi(x)$ — амплитудное и фазовое распределение источников в антенне; $x = 2z/L$ — относительная координата; Z — координата вдоль антенны.

Функция $\varphi(x)$ считается нормальной, однородной случайной функцией со средним значением $\varphi(x) = 0$, дисперсией $\overline{\varphi^2(x)} = \sigma^2(x) = \alpha$ и коэффициентом корреляции

$$\tau(x, x_1) = \frac{\overline{\varphi(x)\varphi(x_1)}}{\sigma(x)\sigma(x_1)} = \frac{\overline{\varphi(x)\varphi(x_1)}}{\alpha} = \tau(x - x_1)$$

выбранным в гауссовой форме

$$\tau = e^{-\frac{(x-x_1)^2}{C^2}},$$

где C — радиус корреляции в относительных единицах, связанный с радиусом корреляции фазовых флуктуаций (ошибок) ρ соотношением $C = 2\rho/L$.

Амплитудное распределение принято равномерным: $A(x) = A_0 = \frac{1}{2}$.

При этом поле антенны в дальней зоне ($\chi = 0$) в отсутствие ошибок $E_0(\psi, 0) = \frac{1}{R} \sin \psi / \psi$, а выражение (1) принимает вид

$$E(\psi, \chi) = \frac{1}{R} f(\psi, \chi) = \frac{1}{2R} \int_{-1}^{+1} \exp[j\psi(x)] \exp[\Psi x - \chi x^2] dx. \quad (1a)$$

Средняя интенсивность поля определяется выражением [2]

$$\overline{P(\psi, \chi)} = \frac{1}{R^2} \overline{|f(\psi, \chi)|^2} = \frac{1}{R^2} \exp(-\chi) \left[|f_0(\psi, \chi)|^2 + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi^m}{m!} I(c_m, \psi, \chi) \right], \quad (2)$$

где $|f_0(\psi, \chi)|^2 = \iint_{-1}^{+1} \exp\{j[\psi(x-x_1) - \chi(x^2-x_1^2)]\} dx dx_1;$ (3)

$$I(c_m, \psi, \chi) = \iint_{-1}^{+1} \exp[-(x-x_1)^2/c_m^2] \exp\{j[\psi(x-x_1) - \chi(x^2-x_1^2)]\} dx dx_1, \quad (4)$$

$c_m = c/\sqrt{m}$

Первое слагаемое в квадратных скобках соотношения (2) характеризует интенсивность поля в зоне Френеля в отсутствие ошибок, второе — определяет искажение пространственного распределения интенсивности поля из-за наличия случайных фазовых ошибок.

Формула (2) используется в [2] для расчета локальных и интегральных энергетических характеристик поля несфокусированной антенны в зоне Френеля.

Сфокусированная антенна отличается от несфокусированной тем, что в ней вводится дополнительное квадратичное фазовое распределение с опережением фазы к краям антенны $\frac{\pi L^2}{4R_F}$, где R_F — фокусное расстояние. Это слагаемое компенсирует в точке $R = R_F$, $\theta = 0$ фазовую ошибку, обусловленную конечностью расстояния до точки наблюдения (слагаемое χx^2 в показателе экспоненты в (1)). При этом в отсутствие случайных фазовых ошибок ($\psi(x) = 0$) поля всех источников в точке фокусировки ($R = R_F$, $\theta = 0$) будут складываться в фазе, а на некоторой части фокальной сферы ($R = R_F$) вблизи фокуса угловое распределение поля будет таким же, как и у синфазной антенны в дальней зоне.

Добавка в показателе степени соотношения (1) слагаемого $\frac{\pi L^2}{4R_F} x^2$

приводит формально к замене в (1) и (2) параметра χ на

$$\chi_{сф} = \frac{\pi L^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_F} \right) \quad *$$
(5)

Это обстоятельство позволяет при анализе статистики поля сфокусированной системы эффективно использовать результаты работы [2] при условии правильного оперирования с величиной $\chi_{сф}$. Следует, однако, отметить, что несмотря на формальную аналогию основных соотношений статистической теории несфокусированных и сфокусированных систем анализ структуры поля последних заметно отличается из-за появления дополнительного аргумента R_F в выражениях для поля сфокусированной системы. Последнее приводит к необходимости изучать дополнительно характер изменения характеристик поля в зависимости от глубины фокусировки системы. Это существенно расширяет объем исследований. Появление величины R_F в выражении для поля сфокусированной антенны приводит также к появлению ряда новых (по сравнению с несфокусированной антенной) статистических эффектов, подлежащих изучению. В их числе укажем, например, влияние ошибок на структуру фокального пятна (расширение его, степень асимметрии, расхожимость точек фокуса и максимума интенсивности поля), флуктуации пятна и т. п.

Приведем теперь некоторые результаты исследования статистики поля сфокусированных систем.

3. Средняя интенсивность поля

Средняя интенсивность поля определяется выражением (2) при замене в нем χ на $\chi_{сф}$. Поперечное распределение средней интенсивности поля совпадает с приведенным в [2] поперечным распределением ее для несфокусированной системы при условии $|\chi_{сф}| = \chi$. Продольное распределение средней интенсивности поля (при $\psi = 0$) для двух значений фокусного расстояния приведено на рис. 1. Значения $P_{сф}$ нормированы на значение интенсивности поля в отсутствие ошибок на границе дальней зоны несфокусированной системы P_0 (0,1). По оси абсцисс на рис. 1 отложена величина $R_H = R / (2L^2 / \lambda)$, то есть расстояние R_H , нормированное на удаление до дальней зоны. Продольное распределение интенсивности поля естественно

* При определении $\chi_{сф}$ учтено, что для антенн больших электрических размеров углы θ , представляющие интерес, невелики. Соответственно, можно принять $\cos^2 \theta = 1$ и $\chi = \frac{\pi L^2}{4R\lambda}$.

отличается от аналогичного распределения для несфокусированной системы [2]. Особо наглядны “объемные” графики типа приведенных на рис. 2, из которых видно влияние случайных ошибок на распределение интенсивности поля как в поперечном, так и в продольном направлениях.

Как видно из рис. 1, максимум интенсивности поля (если он существует) расположен не в фокусе, а на некотором расстоянии R_M , меньшем, чем R_F . Связано это с влиянием множителя $\frac{1}{R^2}$, входящего в соотношение (2). С увеличением глубины фокусировки (уменьшением R_F) разность ΔR_{FM} уменьшается, то есть точка максимума интенсивности приближается к фокусу. Эта тенденция иллюстрируется рис. 3. Уменьшение R_F приводит также (рис. 4) и к уменьшению величины $\Delta \bar{P}_{MF} = \bar{P}_{сфМ} - \bar{P}_{сфФ}$. Из рис. 3, 4 видно также, что при наличии ошибок величины ΔR_{FM} и $\Delta \bar{P}_{MF}$ увеличиваются. С изменением радиуса корреляции ошибок величины ΔR_{FM} и $\Delta \bar{P}_{MF}$ меняются немонотонно, достигая максимальных величин при некотором значении C .

4. Средние характеристики фокального пятна

Размеры среднего фокального пятна определяются на уровне половинной мощности. Обозначим ближнюю и дальнюю границы пятна в продольном направлении через R_δ и R_g . Эти величины находятся из уравнения

$$\frac{\overline{P_{сф}}(0, R_\delta, R_F)}{\overline{P_{сф}}(0, R_M, R_F)} = 0,5 \quad (6)$$

Результаты решения уравнения (6) представлены на рис. 5; по оси абсцисс отложены значения $R_{FM} \leq 0,1$, ибо только при малых R_F (глубокой фокусировке) можно говорить о сформировавшемся в продольном измерении фокальном пятне. При больших значениях R_F уравнение (6) имеет лишь один корень, соответствующий R_g . Из рис. 5, а также из ранее приведенного рис. 1 видно, что фокальное пятно асимметрично. С увеличением глубины фокусировки степень асимметрии пятна уменьшается.

Наличие случайных ошибок приводит к увеличению продольных размеров фокального пятна. Большему влиянию подвержено положение ближней границы пятна. Иногда наличие ошибок приводит к разрушению пятна, так как положение ближней границы размывается (обрыв ряда кривых на рис. 5). Влияние случайных ошибок на степень асимметрии пятна незначительно.

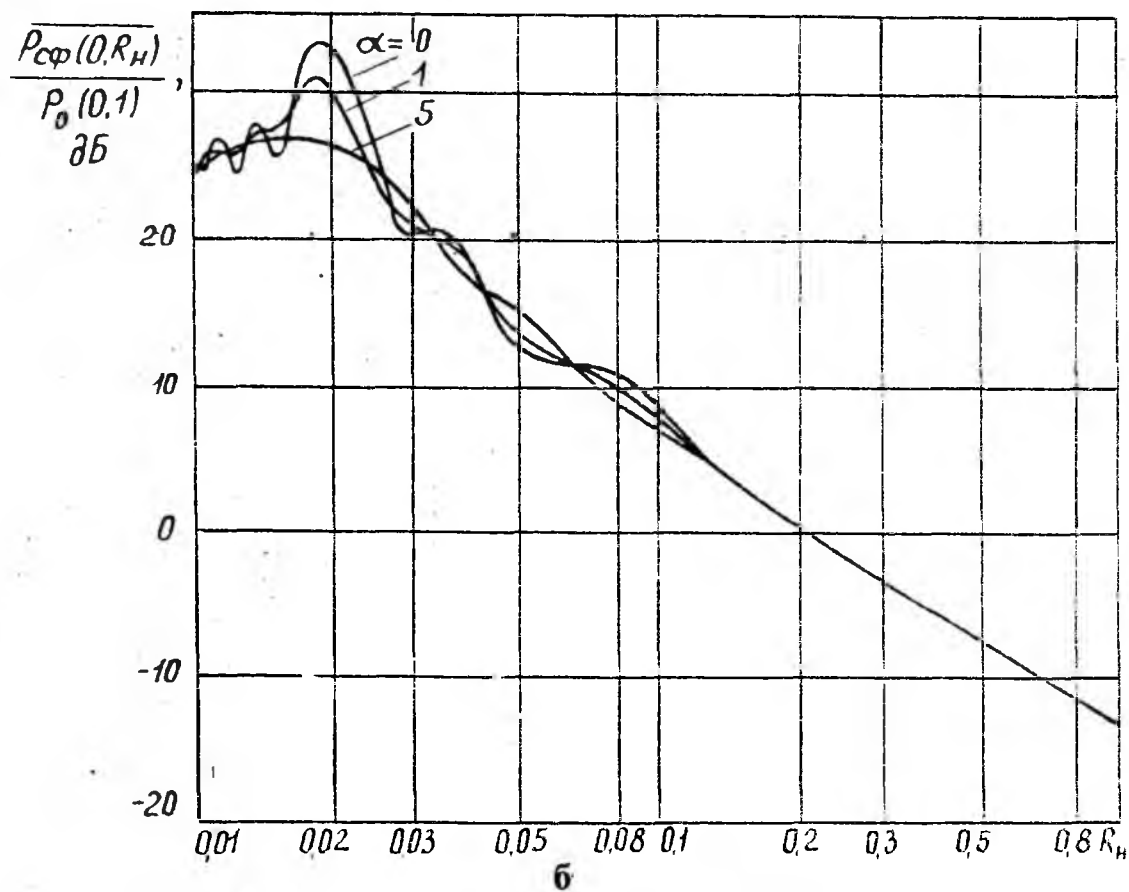
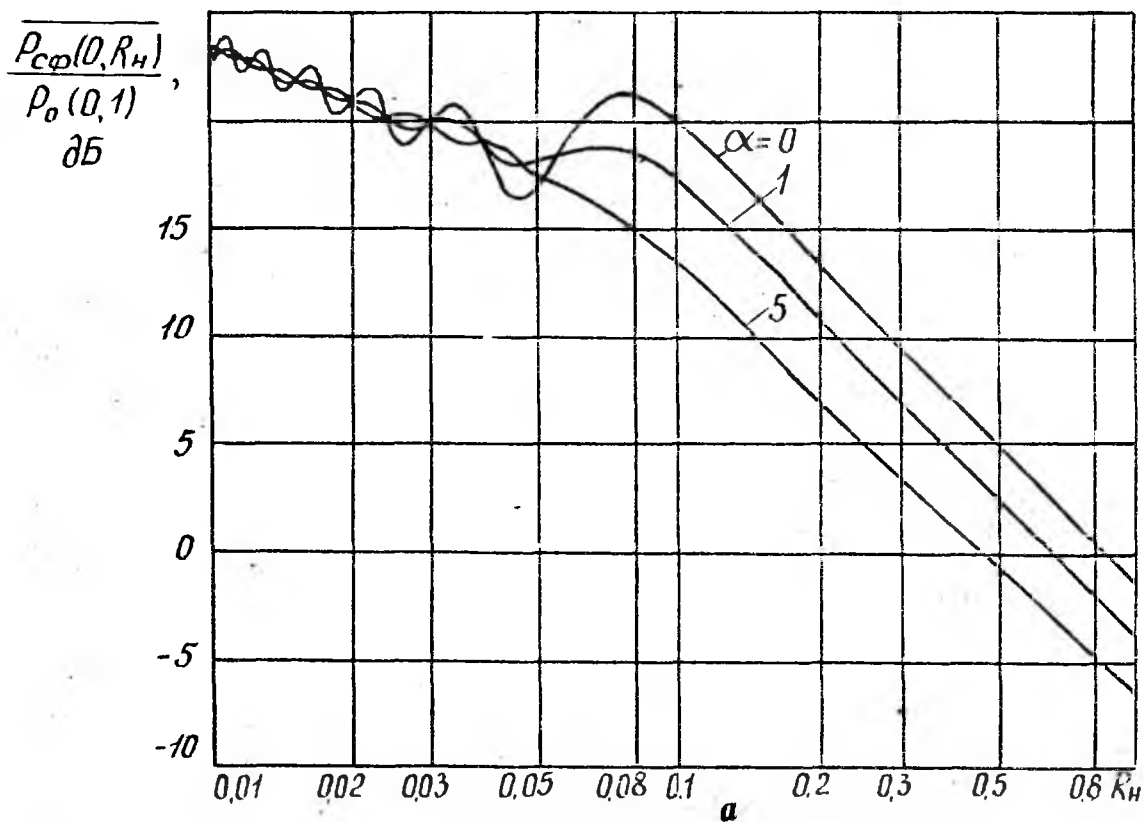


Рис. 1. Продольное распределение средней интенсивности поля при глубине фокусировки $R_{FH} = 0,125$ (а), $R_{FH} = 0,02$ (б) для различных значений α и $C = 0,5$

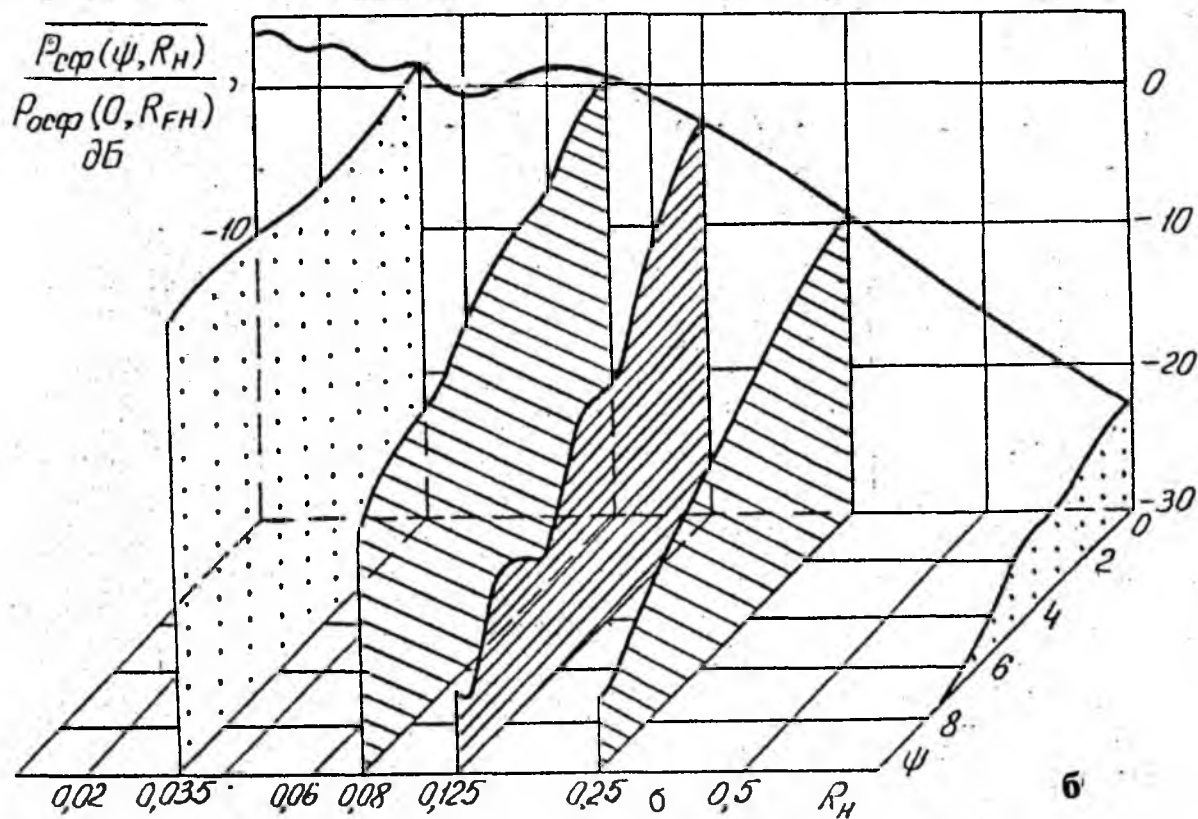
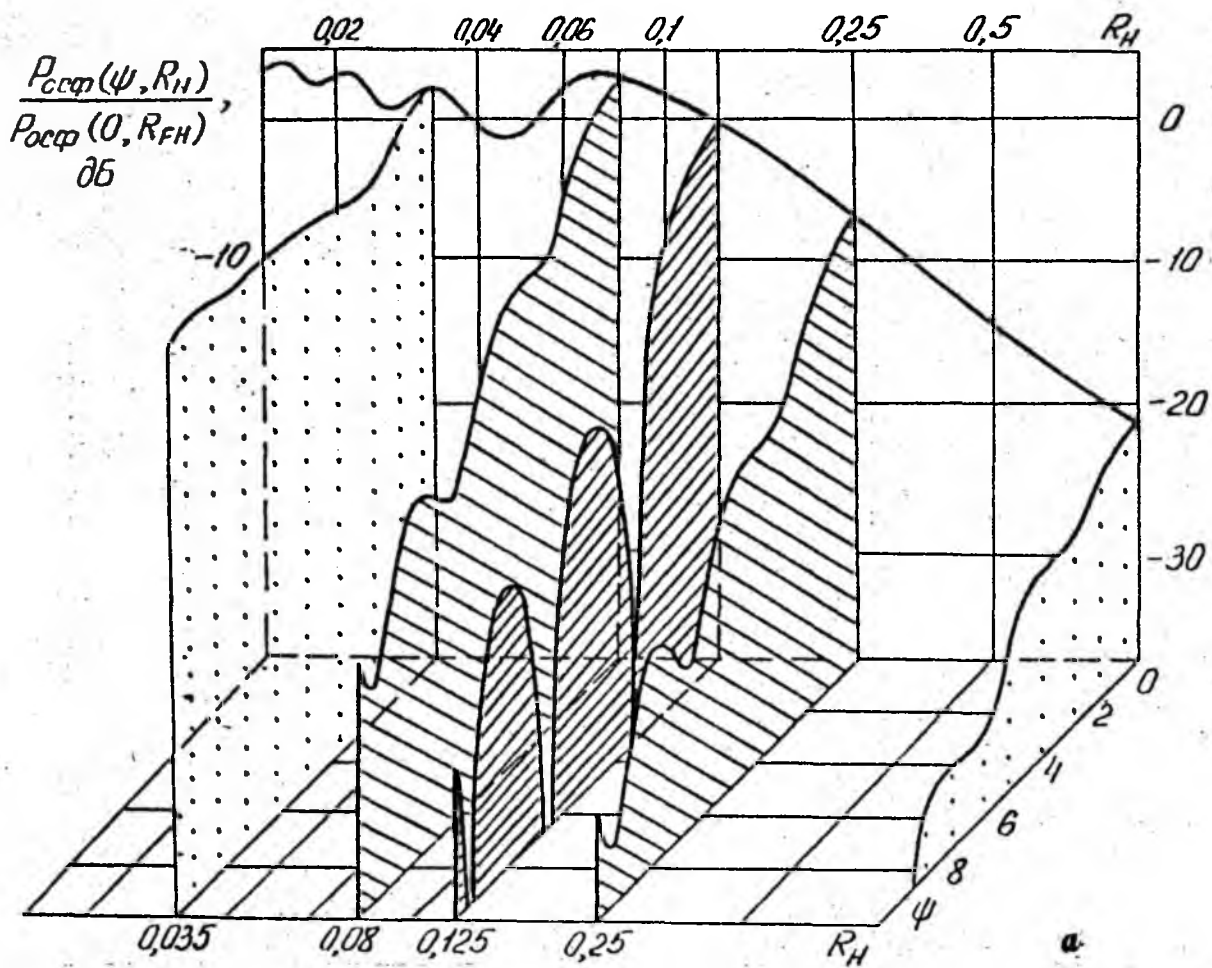
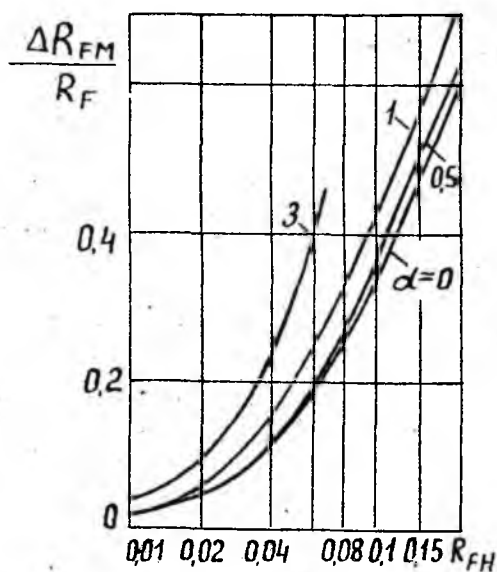
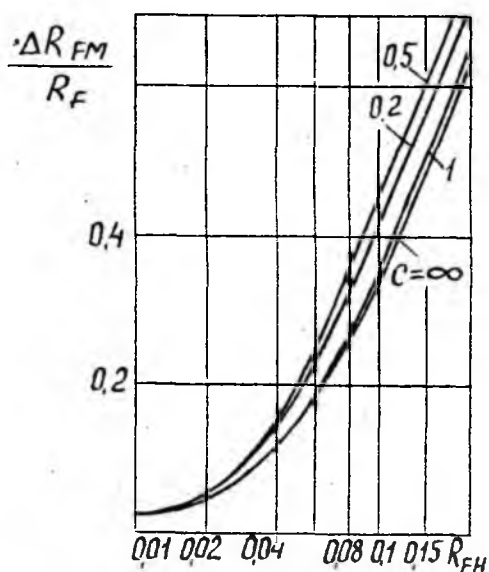


Рис. 2. Объемное распределение средней интенсивности поля при глубине фокусировки $R_{FH} = 0,125$ для $\mathcal{L} = 0$ (а) и $\mathcal{L} = 1$ (б), $c = 0,5$

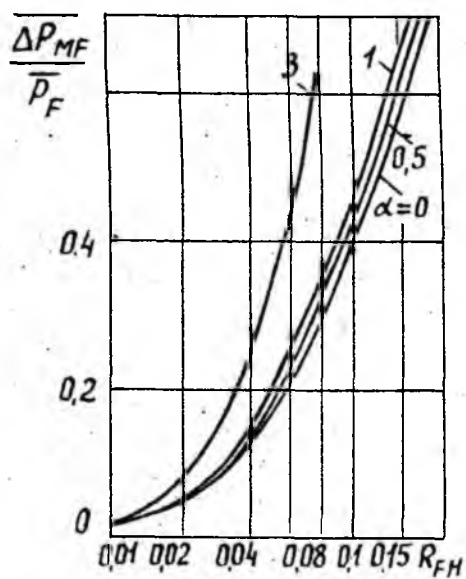


а

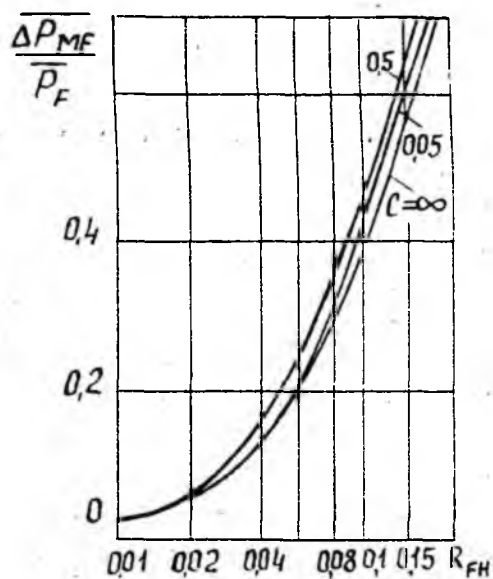


б

Рис. 3. Влияние глубины фокусировки на положение максимума интенсивности поля в фокальном пятне для различных α и $C = 0,5$ (а); для различных C и $\alpha = 1$ (б)



а



б

Рис. 4. Влияние глубины фокусировки на величину максимума интенсивности поля в фокальном пятне: для различных α и $C = 0,5$ (а); для различных C и $\alpha = 1$ (б)

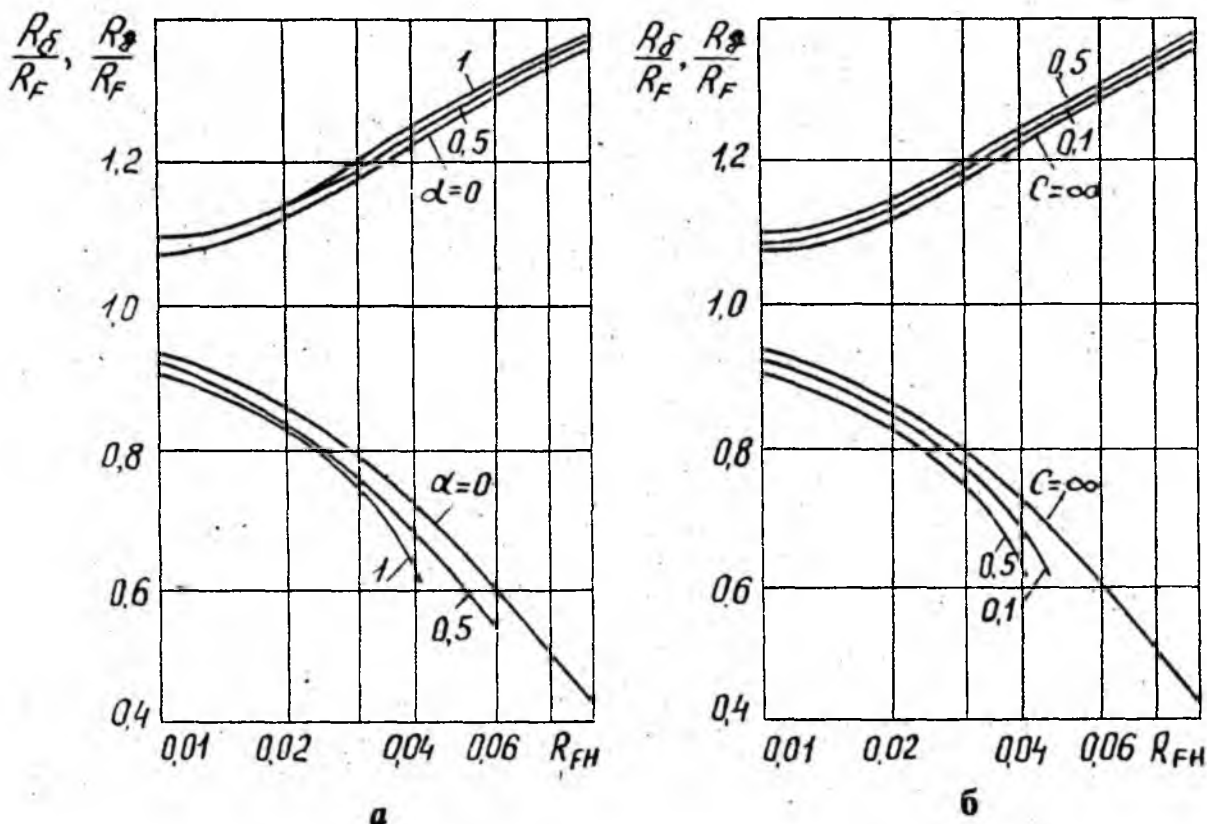


Рис. 5. Влияние глубины фокусировки на положение ближней и дальней границ фокального пятна для различных α и $C = 0,5$ (а); для различных C и $\alpha = 1$ (б)

Поперечный размер среднего фокального пятна определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{R_F}{L} \right) 2\psi_{cp},$$

где $2\psi_{cp}$ — угловой размер среднего фокального пятна на фокальной сфере. Эта величина равна ширине средней диаграммы направленности (ДН) в дальней зоне при заданных значениях α и C , которую можно найти в [1]. При глубокой фокусировке отношение продольных размеров фокального пятна к поперечным размерам его при малых ошибках или в отсутствие их определяется соотношением

$$\frac{\Delta R_{\phi, \delta}}{\Delta l} \approx 8 \frac{R_F}{L}$$

5. Интегральные характеристики поля

Интегральные энергетические характеристики поля показывают, как распределяется излучаемая антенной мощность между различными областями пространства [2]. Наиболее интересной характеристикой такого рода является область основного потока мощности (ОПМ). Величина ОПМ определяется как та часть от полной мощности излучения, которая содержится в главном лепестке ДН в отсутствие ошибок в дальней зоне. При статистическом подходе естественно говорить об области основного потока средней мощности (ОПСМ). Для несфокусированной антенны границы ОПСМ во всей глубине зоны Френеля, характеризующиеся углом $\psi_{ср}^{2p} = \pi L \sin \theta_{ср}^{2p} / \lambda$ (или поперечным линейным размером $Z_{ср}^{2p} = R \operatorname{tg} \theta_{ср}^{2p}$), были определены в [2]. Величина $\psi_{ср}^{2p}$ находилась из уравнения

$$\int_0^{\psi_{ср}^{2p}} |f(\psi, \chi)|^2 d\psi = \int_0^{\pi} |f_0(\psi, 0)|^2 d\psi = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \psi}{\psi^2} d\psi = \operatorname{Si}(2\pi) = 1,418. \quad (7)$$

Для определения границ области ОПСМ сфокусированной антенны используется уравнение (7), но с заменой $|f(\psi, \chi)|^2$ на $|f_{сф}(\psi, \chi_{сф})|^2$. Замена χ на $\chi_{сф}$ приводит к тому, что в сфокусированной системе для каждого значения R_F имеем свою картину границ ОПСМ. Две такие картины для поперечных размеров области ОПСМ приведены на рис. 6, а, б. Как видно из рис. 6, в отсутствие ошибок минимальные значения поперечных размеров области ОПСМ $2Z_{ср}^{2p}/L = 4R_{FH}$ достигаются при $R_H = R_{FH}$. С уменьшением фокусного расстояния уменьшается и поперечный размер области ОПСМ, что свидетельствует об увеличении плотности потока мощности в окрестности фокуса. Наличие случайных ошибок приводит к расширению области ОПСМ. При этом минимумы величины $Z_{ср}^{2p}$ смещаются в сторону меньших значений R_H . По мере удаления от фокальной сферы (в обе стороны) влияние случайных ошибок на поперечные размеры ОПСМ ослабевает.

6. Флуктуации пятна

При изучении флуктуаций пятна ошибки полагаются малыми. Рассматривается случай глубокой фокусировки. Именно в этом случае, как уже отмечалось, можно говорить о сформировавшемся в продольном измерении - фокальном пятне.

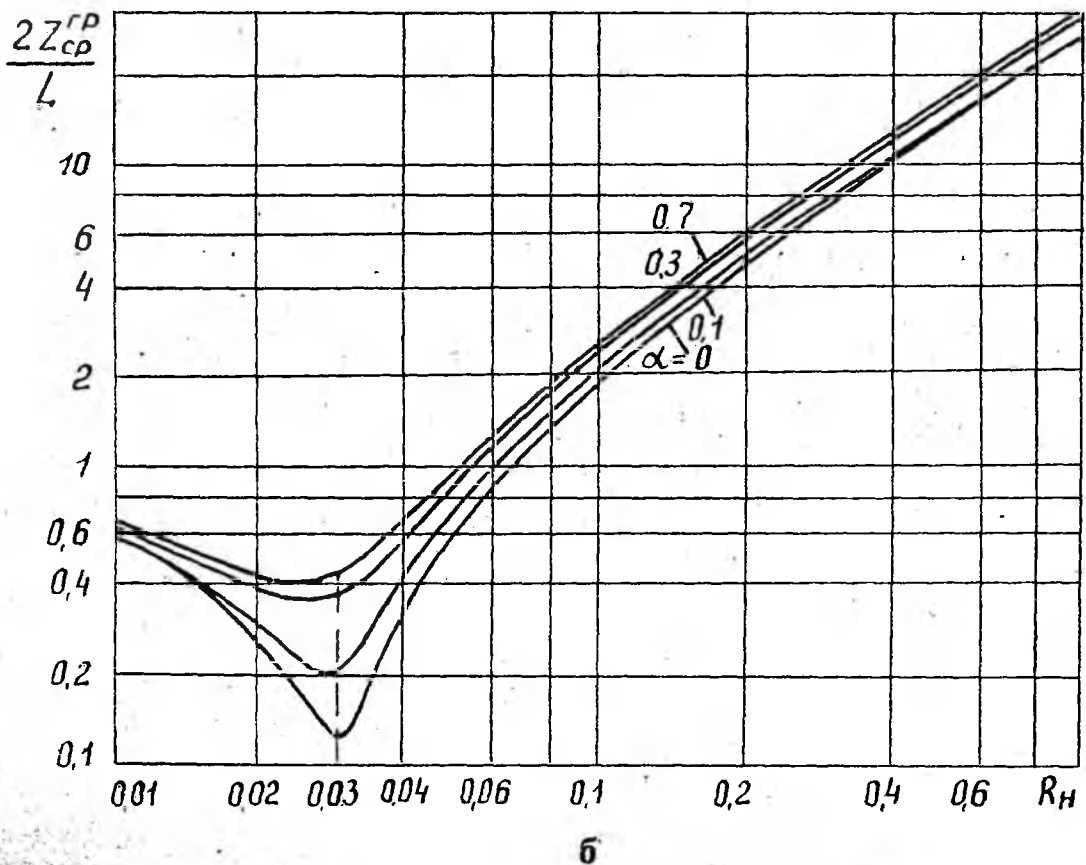
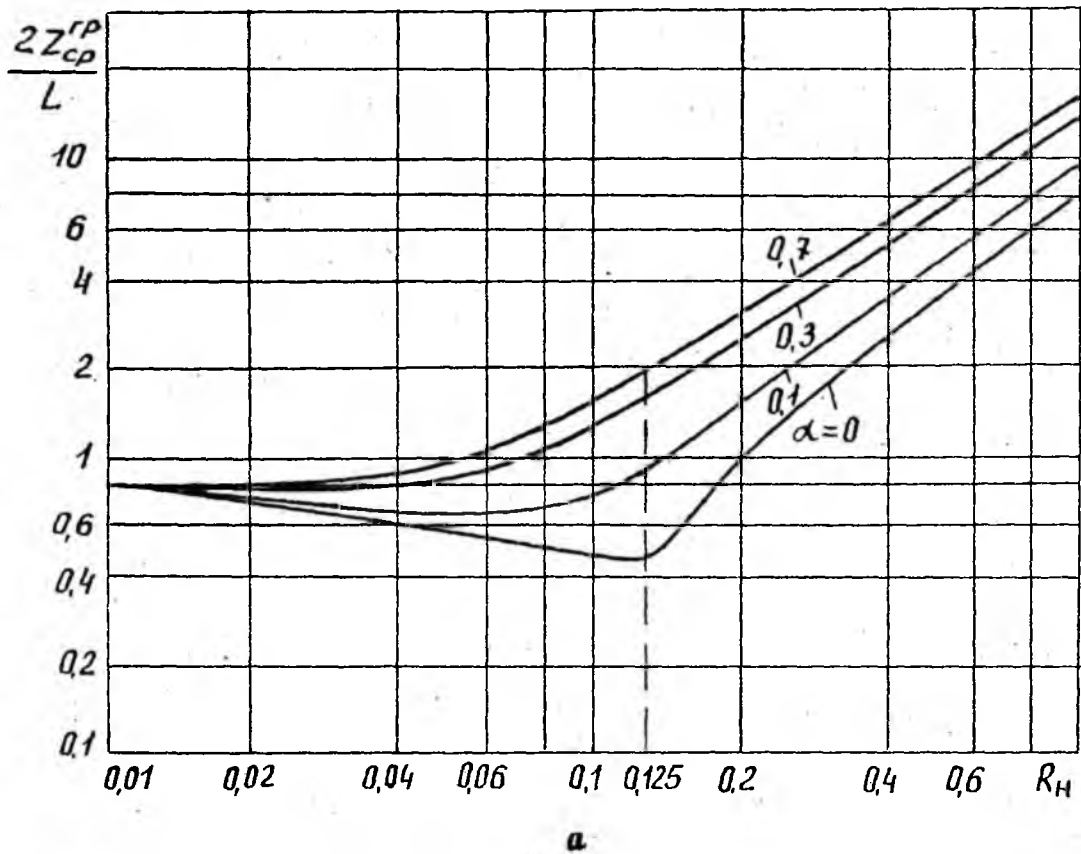


Рис. 6. Границы области основного потока средней мощности при $R_{FH} = 0,125$ (а) и $R_{FH} = 0,03$ (б) для различных значений α

Наличие фазовых ошибок приводит к флуктуациям пятна — флуктуациям положения точки максимума интенсивности поля (МИП) в этом пятне.

Положение точки МИП для отдельной реализации поля находится из решения уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left\{ |f_{сф}(\psi, \chi_{сф})|^2 \right\} &= 0 & (a) \\ \frac{\partial}{\partial \chi_{сф}} \left\{ |f_{сф}(\psi, \chi_{сф})|^2 \right\} &= 0 & (б) \end{aligned} \right\} (8)$$

При написании соотношения (8б) учтено, что при глубокой фокусировке в отсутствие ошибок точка МИП весьма близка к точке фокуса. Соотношения (8) позволяют найти поперечное и продольное смещения точки МИП относительно фокуса ($\psi = 0, \chi_{сф} = 0$). Обозначим эти смещения (координаты точки МИП) через ψ_m и χ_m соответственно. При малых фазовых ошибках эти величины также малы. Процедура их нахождения аналогична использованной в [1] при определении ухода направления главного максимума ДН.

В данном случае используется общее выражение для $|f_{сф}(\psi, \chi_{сф})|^2$ отдельной реализации, которое в соответствии с (1а) имеет вид

$$|f_{сф}(\psi, \chi_{сф})|^2 = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \exp \left\{ j [\varphi(x) - \varphi(x_1)] \right\} \exp \left\{ j [\psi(x-x_1) - \chi_{сф}(x^2-x_1^2)] \right\} dx dx_1 \quad (9)$$

Поскольку ошибки малы, то можно в (9) ограничиться членами второго порядка малости по φ . Учитывая одновременно и малость величин ψ_m и χ_m , находим, решая уравнения (8), следующие соотношения

$$\psi_m = -\frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} x \varphi(x) dx \quad (10)$$

$$\chi_m = -\frac{45}{8} \int_{-1}^{+1} \left[x^2 - \frac{1}{3} \right] \varphi(x) dx \quad (11)$$

Заметим, что выражение (10) совпадает с полученным в [1] выражением для величины ухода направления главного максимума ДН линейной антенны в дальней зоне.

Если представить $\varphi(x)$ в виде суммы четной и нечетной относительно середины антенны функций

$$\varphi(x) = \varphi_{2T}(x) + \varphi_{Hz}(x),$$

то из соотношений (10) и (11) следует, что флуктуации величины ψ_M (поперечной угловой координаты точки МИП) определяются нечетной составляющей $\varphi(x)$, а флуктуации величины χ_M (продольной координаты точки МИП) определяются четной составляющей $\varphi(x)$.

Средние значения ψ_M и χ_M равны нулю. Дисперсии этих величин будут

$$\overline{\psi_M^2} = \frac{g}{4} \mathcal{L} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} x x_1 \exp\left\{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}\right\} dx dx_1 = \frac{g}{4} \mathcal{L} \mathcal{J}(c) \quad (12)$$

$$\overline{\chi_M^2} = \left(\frac{45}{8}\right)^2 \mathcal{L} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[x^2 x_1^2 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9}\right] \exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}\right) dx dx_1. \quad (13)$$

Величина $\mathcal{J}(c)$ равна [1]:

$$\mathcal{J}(c) = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \Phi\left(\frac{2}{c}\right) + \frac{c^4}{6} (1 - e^{-4/c^2}) - c^2 \left(1 - \frac{1}{3} e^{-4/c^2}\right),$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятности.

При малых c

$$\overline{\psi_M^2} = \frac{3}{2} \sqrt{\pi} c \mathcal{L}; \quad \overline{\chi_M^2} = \frac{45}{8} \sqrt{\pi} c \mathcal{L}; \quad \overline{\chi_M^2} / \overline{\psi_M^2} = 3,75. \quad (14)$$

Таким образом, при малых c дисперсия продольной координаты МИП примерно в четыре раза превышает дисперсию поперечной угловой координаты.

При больших c

$$\overline{\psi_M^2} = 2\mathcal{L}/c^2; \quad \overline{\chi_M^2} = 6\mathcal{L}/c^4; \quad \overline{\chi_M^2} / \overline{\psi_M^2} = 3/c^2, \quad (15)$$

то есть при больших c дисперсия продольной координаты МИП

меньше дисперсии поперечной координаты в $c^2/3$. При $c \rightarrow 0$ и $c \rightarrow \infty$ величины $\overline{\psi_M^2}$ и $\overline{\chi_M^2} \rightarrow 0$. Результаты расчета этих величин для произвольных c представлены на рис. 7. Как видно из этого рисунка, величина $\overline{\psi_M^2}$ достигает максимума при $c \approx 0,7$, а величина $\overline{\chi_M^2}$ — при $c \approx 0,5$. Эти максимумы соответственно равны $0,85\alpha$ и $1,91\alpha$.

Дисперсии реальных координат точки МИП, то есть величин θ (или Z) и R определяются выражениями

$$\overline{\theta_M^2} = \left(\frac{\lambda}{\pi L}\right)^2 \overline{\psi_M^2}; \quad \overline{Z_M^2} = \left(\frac{\lambda R_F}{\pi L}\right)^2 \overline{\psi_M^2}; \quad (16)$$

$$\overline{\Delta R_M^2} = \left(4 \frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \left(\frac{R_F}{\pi L}\right) \overline{\chi_M^2}; \quad (17)$$

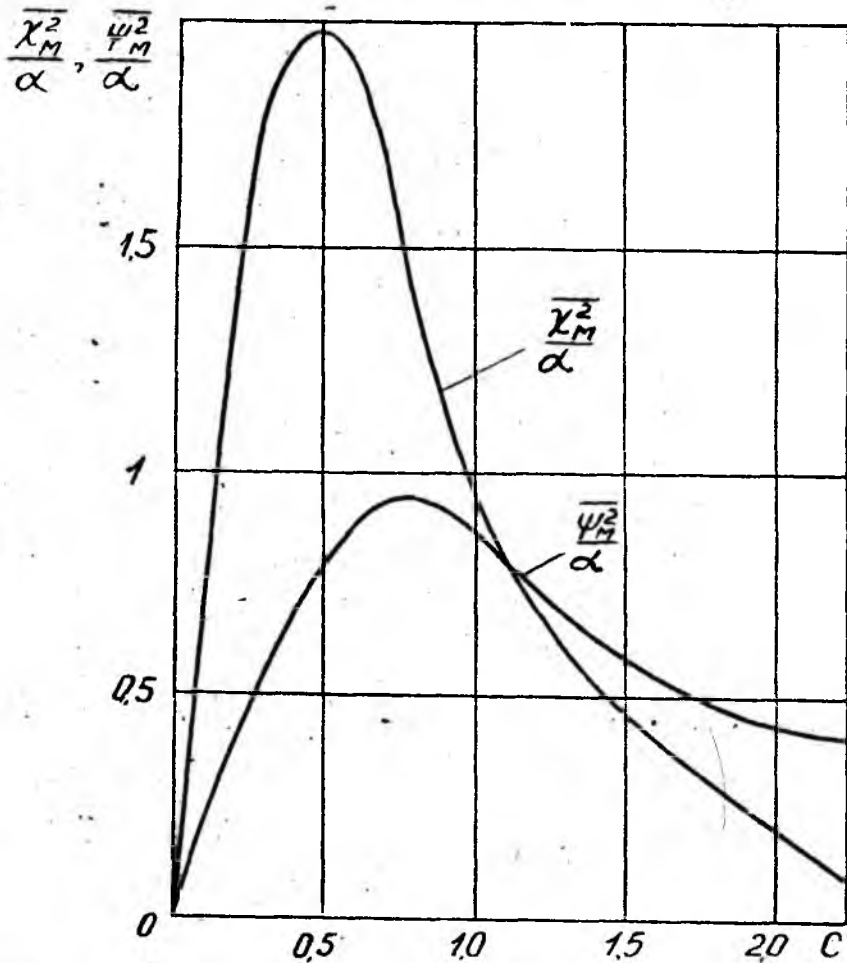


Рис. 7. Зависимость дисперсии координат максимума интенсивности поля в фокальном пятне от радиуса корреляции ошибок

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное в настоящей работе исследование статистики поля линейной антенны, сфокусированной в зону Френеля, имеет достаточно общий характер. Результаты его пригодны при разных механизмах происхождения флуктуаций, соответствующих либо ансамблевой, либо временной статистике, порождаемых либо внутри антенны, либо неоднородностями среды, в которой работает антенна. В принципе используемая методика может быть распространена и на антенны других типов. Поэтому результаты работы могут быть полезны при оценке реальных характеристик разных фокусирующих систем, используемых в радиотехнике, оптике, акустике, гидроакустике, обосновании разумных требований к допускам, стабильности параметров элементов, входящих в состав этих систем.

Исследования, результаты которых приведены в данном обзоре, выполнены благодаря поддержке Международной Соросовской Программы поддержки образования в области точных наук Международного фонда "Возрождение", грант SPUO42079.

Л и т е р а т у р а: 1. *Шифрин Я. С.* Вопросы статистической теории антенн.— М.: Сов. радио, 1970. 2. *Шифрин Я. С., Бородавко Ю. М.* О статистике поля линейной антенны в зоне Френеля // Радиотехника и электроника.— 1988.— Т. 33.— № 9.— С. 1870.