Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

Кафедра прикладної математики
(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Математичне та комп'ютерне моделювання оптимізації пакування нерівних кругів
(тема)

Виконав:
здобувач 2 року навчання, групи САУм-23-2
Удоденко В.Ю.
(прізвище, ініціали)
Спеціальність
124 Системний аналіз
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма
Системний аналіз і управління
(повна назва освітньої програми)
Керівник проф. Романова Т.Є.
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ ____________ Сидоров М.В.
(підпис) (прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
Кафедра прикладної математики
Рівень вищої освіти другий (магістерський)
Спеціальність 124 Системний аналіз
(код і повна назва)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма Системний аналіз і управління
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ ____________
(підпис)
“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

Здобувачеві Удоденку Володимиру Юрійовичу
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема роботи Математичне та комп’ютерне моделювання оптимізації пакування нерівних кругів

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи математична модель задачі пакування нерівних кругів у круговому контейнері як задачі з відкритою метричною характеристикою

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі
   1. Системний аналіз предметної області
   2. Вибір і обґрунтування методу розв’язання
   3. Програмна реалізація
   4. Результати обчислювального експерименту
   5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій

1. Актуальність теми роботи
2. Постановка задачі
3. Системний аналіз предметної області
4. Метод чисельного аналізу
5. Результати обчислювального експерименту

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2023 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання _25_ листопада 2024 р.

Здобувач ___________________________________
(підпис)

Керівник роботи __________________ проф. Романова Т.Є.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 66 с., 3 табл., 9 рис., 1 дод., 23 джерела.

ГЕОМЕТРИЧНЕ ПРОЄКТУВАННЯ, ГОМОТЕТИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ КРУГІВ, ЗАДАЧА З ВІДКРИТОЮ МЕТРИЧНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ, ЗАДАЧА ПАКУВАННЯ, КРУГ, КРУГОВИЙ КОНТЕЙНЕР, ЛОКАЛЬНИЙ ЕКСТРЕМУМ, НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.

Об'єкт дослідження – процес пакування нерівних кругів у круговий контейнер.

Мета роботи – поліпшення ефективності розв'язання оптимізаційної задачі пакування нерівних кругів в круговому за допомогою конструктивних засобів математичного та комп'ютерного моделювання.

Методи дослідження – методи геометричного проєктування, методи аналітичної та обчислювальної геометрії, метод Ф-функцій Стояна, методи нелінійної оптимізації.

У кваліфікаційній роботі досліджується та вдосконалюється метод оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері. Проведено системний аналіз предметної області. Проведено огляд і аналіз сучасного стану задачі пакування нерівних кругів в обмежених контейнерах. Використано існуючі математичні моделі та алгоритми для оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері. Створено програмне забезпечення для розв'язання та тестування використаних моделей та алгоритмів. Ефективність розроблених алгоритмів перевірено на наборі тестових даних.

Розроблене програмне забезпечення може бути використано компаніями, що займаються оптимізацією виробничих процесів у різних країнах світу. Отримані результати можна застосувати для реалізації інших методів оптимізації в інших сферах та автоматизації процесів.

ABSTRACT

Introductory note: 66 pages, 3 tables, 9 figures, 1 appendix, 23 sources.

GEOMETRIC DESIGN, HOMOTHETIC TRANSFORMATION OF CIRCLES, OPEN DIMENSION PROBLEM, PACKING PROBLEM, CIRCLE, CIRCULAR CONTAINER, LOCAL EXTREMUM, NONLINEAR PROGRAMMING.

Object of research – the process of packing unequal circles into a circular container.

Purpose of work – improving the efficiency of solving the optimization problem of packing unequal circles into a circular container using constructive methods of mathematical and computer modeling.

Methods of research – methods of geometric design, methods of analytical and computational geometry, Stoyan's phi-functions method, methods of nonlinear optimization.

This qualification work investigates and improves the method of optimizing the packing of unequal circles into a circular container. A systematic analysis of the subject area has been conducted. A review and analysis of the current state of the problem of packing unequal circles into confined containers have been carried out. Existing mathematical models and algorithms for optimizing the packing of unequal circles into a circular container have been used. Software has been developed for solving and testing the used models and algorithms. The efficiency of the developed algorithms has been tested on a set of benchmark instances.

The developed software can be used by companies engaged in optimizing production processes in various countries around the world. The obtained results can be applied to implement other optimization methods in different fields and to automate processes.

ЗМІСТ

С.

Перелік скорочень, умовних познак, одиниць і термінів 8

Вступ 9

1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження 11

1.1 Системний аналіз задачі оптимізації пакування нерівних кругів............. 11

1.1.1 Теорія геометричного проєктування.. 11

1.1.2 Міжнародна класифікація задач пакування 12

1.1.3 Застосування задачі розміщення нерівних кругів 14

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі оптимізації пакування нерівних кругів 15

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі 16

1.4 Постановка задач дослідження 20

2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання 21

2.1 Методологія розв'язання задачі розміщення сферичних об'єктів 21

2.2 Методи розв'язання задачі розміщення кругів 26

2.2.1 Методи локальної оптимізації 26

2.2.2 Методи глобальної оптимізації 28

2.2.3 Евристичні методи розв'язання.. 30

2.3 Метод розв'язання задачі пакування нерівних кругів на основі гомотетичних перетворень 31

Висновки за розділом 2 34

3 Програмна реалізація 36

3.1 Середовище Embarcadero 36

3.2 Алгоритм розв'язання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері 37

3.2.1 Загальна схема алгоритму 37

3.2.2 Побудова початкового розміщення та пошук локального мінімуму 38

3.2.3 Перехід від одного локального екстремуму до іншого...................... 39

3.3 Опис програми 41

Висновки за розділом 3 43
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз 45
4.1 Тестові приклади 45
4.2 Аналіз отриманих результатів 49
Висновки за розділом 4 50
Висновки 52
Перелік джерел посилання 54
Додаток А Лістинг програми 57

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

IIPP – Identical Item Packing Problem;

ODP – Open Dimension Problem;

KP – Knapsack Problem;

IPOPT – Interior Point Optimizer;

ADPC – Algorithm for Dense Packing of Circles.

ВСТУП

Актуальність теми. Актуальність роботи зумовлена необхідністю ефективного використання простору та ресурсів у різних галузях, таких як виробництво, дизайн та обчислювальна геометрія. Оптимізація пакування нерівних кругів у круговому контейнері є важливою задачею, яка має широке практичне застосування. Вирішення цієї задачі дозволяє зменшити витрати на матеріали та підвищити ефективність виробничих процесів. Крім того, розробка нових методів оптимізації сприяє розвитку обчислювальної геометрії та математичного моделювання.

У світовій практиці спостерігається зростаючий інтерес до розробки нових методів та алгоритмів для оптимізації пакування об'єктів. Це обумовлено потребою в ефективніших рішеннях для виробничих процесів, логістики та дизайну. Використання сучасних методів математичного та комп'ютерного моделювання дозволяє досягати високої точності та швидкості обчислень, що є важливим для практичного застосування.

На сьогоднішній день проблема пакування нерівних кругів у круговий контейнер активно досліджується провідними науковими установами та організаціями. Відомі вчені та фахівці в галузі обчислювальної геометрії та оптимізації розробили методи та алгоритми, які дозволяють знаходити локальні екстремуми та оптимальні рішення для задач пакування. Проте, існуючі методи часто потребують подальшого вдосконалення для підвищення їх ефективності та гнучкості.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є поліпшення ефективності розв'язання оптимізаційної задачі пакування нерівних кругів в круговому за допомогою конструктивних засобів математичного та комп'ютерного моделювання. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі пакування нерівних кругів в різних контейнерах;

– розробити математичні моделі та алгоритми для оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері;

– створити програмне забезпечення для розв'язання та тестування розроблених моделей та алгоритмів.

Об'єктом дослідження є процес пакування нерівних кругів у круговий контейнер.

Предметом дослідження є засоби математичного моделювання, математичні моделі та методи розв'язання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у контейнері.

Методи дослідження. У кваліфікаційній роботі використовуються для побудови засобів математичного моделювання умов пакування нерівних кругів методи аналітичної й обчислювальної геометрії та метод Ф-функцій Стояна; для побудови математичної моделі – теорія геометричного проєктування та нелінійне програмування; для розробки алгоритмів розв'язання – методи нелінійної оптимізації.

Публікації. Результати, отримані у кваліфікаційній роботі, було представлено на III Міжнародній науково-практичній конференції «Навчання і викладання: у світі після війни» (м. Харків, 08 листопада 2024 р.) [1].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі оптимізації пакування нерівних кругів

1.1.1 Теорія геометричного проєктування

Перша робота, присвячена задачам розміщення та розкрою, була опублікована Л. В. Канторовичем у 1942 році [2], де ці задачі розглядалися як прикладні задачі лінійного програмування. Пізніше ці ідеї були розвинуті в книзі, написаній спільно з В. А. Залгаллером, яка цікава тим, що в ній, окрім лінійного програмування, використовуються ідеї динамічного програмування та методу гілок і меж.

В Україні задача розміщення кругів з різними радіусами була вперше сформульована в роботі [2], де для її розв'язання використовувався градієнтний метод. У подальших дослідженнях розглядалася задача розміщення кругів з урахуванням відстаней між ними, а метод послідовно-одиночного розміщення був запропонований у наступних роботах.

Першим кроком у побудові аналітичного опису умов взаємного ненакладання об'єктів став підхід, розроблений академіком НАН України В. Л. Рвачовим [2], який базується на використанні R-функцій. Цей підхід дозволяє аналітично описувати умови взаємного розташування геометричних об'єктів складної форми з урахуванням технологічних обмежень на допустимі відстані.

Подальші дослідження під керівництвом члена-кореспондента НАН України Ю. Г. Стояна призвели до розробки математичного апарату функції щільного розміщення та її годографа [2], які дозволяють перетворювати геометричну інформацію про об'єкти в інформацію про їх можливі щільні розміщення. На основі годографу функції щільного розміщення була розроблена методологія послідовно-одиночного розміщення для знаходження наближень до локальних екстремумів у задачах нерегулярного розміщення об'єктів. Метод оптимізації за групами змінних та його комбінації з методами околів, що звужуються, та значущих змінних стали основою цієї методології.

У подальшому було введено поняття Ф-функції [2], за допомогою якої формалізуються відношення геометричних об’єктів. У монографії [3] Ф-функції подавалися у вигляді структури лінійних нерівностей. Згодом були побудовані Ф-функції для базових об’єктів у двох- [4] та тривимірних просторах [5]. Для моделювання обмежень на відстані між геометричними об’єктами були введені поняття нормалізованої та псевдонормалізованої Ф-функцій [2, 6]. Для деяких об’єктів Ф-функції мають дуже складний вигляд, тому були запропоновані квазі-Ф-функції [6]. Метод Ф-функцій Стояна визнаний найпотужнішим у світі засобом аналітичного моделювання відношень геометричних об’єктів. Він дає змогу описувати оптимізаційні задачі розміщення у вигляді задач нелінійного програмування та створювати ефективні методи розв’язання для широкого кола задач розміщення [7, 8].

1.1.2 Міжнародна класифікація задач пакування

G. Waescher та ін. [9] запропонували типологію задач розкрою та пакування (Cutting and Packing C&P). Згідно з цією типологією, для визначення типу задачі використовуються такі критерії: вимірність (dimensionality), вид розміщення (kind of assignment), асортимент розміщуваних об’єктів (assortment of small items), асортимент контейнерів (assortment of large objects), просторова форма розміщуваних об’єктів (shape of small items).

Розрізняють одно-, двох-, тривимірні задачі та задачі з більш ніж трьома незалежними параметрами. Виділяють два типи задач упакування: максимізація (output maximisation) та мінімізація (input minimisation) функції цілі.

У разі максимізації набір менших об’єктів (розміщувані об’єкти) розподіляється серед заданого набору більших об’єктів (контейнери). Усі розміщувані об’єкти мають бути використані, і мета полягає в досягненні максимального значення функції цілі. У випадку мінімізації набір контейнерів є достатнім для всіх розміщуваних об'єктів, і задача полягає у виборі підмножини контейнерів із мінімальною функцією цілі.

Функція цілі може включати витрати, доходи, площу, об'єм тощо. У практичних задачах може виникати необхідність вибору як з множини розміщуваних об'єктів, так і з множини контейнерів, що вимагає використання багатокритеріальних методів вибору.

Розміщувані об'єкти можуть бути ідентичними, слабко неоднорідними або сильно неоднорідними. Ідентичні об'єкти мають однакову форму й розмір. Слабко неоднорідні об'єкти можуть бути згруповані в декілька класів, де елементи ідентичні за формою та розміром. Сильно неоднорідні об'єкти мають унікальну форму й розмір.

Контейнери можуть бути одного або декількох типів. Вони можуть мати фіксовані або змінні розміри, бути ідентичними, слабко або сильно неоднорідними, а також мати різні форми: прямокутні, круглі, конічні тощо. Існують задачі з контейнерами нерегулярної форми, які виходять за межі типології [9].

Розміщувані об'єкти можуть мати регулярну або нерегулярну просторову форму. З урахуванням наведених критеріїв розрізняють такі типи задач розміщення [9]: задача розміщення рівних об'єктів (Identical Item Packing Problem – IIPP), задача розміщення (Placement Problem), задача про рюкзак (Knapsack Problem – KP), задача із змінними метричними характеристиками контейнера (Open Dimension Problem – ODP), задача розкрою (Cutting Stock Problem), задача про розміщення в ємності (Bin Packing Problem).

При розміщенні кругів або куль виникають перші чотири типи задач. Задача IIPP полягає в розміщенні максимальної кількості куль або кругів у заданому наборі контейнерів. У класичній задачі розміщення (Placement Problem) набір куль або кругів є слабко неоднорідним, і мета полягає в максимізації функції цілі або мінімізації відходів.

Задача KP стосується розміщення сильно неоднорідних куль або кругів у заданому наборі контейнерів, де тільки частина об'єктів може бути розміщена.

У задачі ODP всі кулі або круги мають бути розміщені в одному або декількох контейнерах, при цьому одна з метричних характеристик контейнера є змінною і має бути мінімізована.

1.1.3 Застосування задач розміщення нерівних кругів

Задачі розміщення нерівних кругів у контейнерах різної вимірності викликають значний інтерес у дослідників. Найбільше публікацій присвячено двовимірним задачам [2], таким як розміщення кругів у контейнерах різної форми (круг, прямокутник, багатокутник тощо).

Ці задачі можуть виникати у математиці, геометрії (Аполлонієві розміщення кругів) , комп’ютерній графіці, хімії, географії , біології [2].

Промислові застосування включають задачі розкрою при виробництві автомобілів, мотоциклів, електричних моторів, компонування обладнання на супутникових модулях, планування розміщення човнів, задачі компонування, пошук перешкод при плануванні шляхів безпілотних літальних апаратів, виявлення рухомих цілей і сигналів, розпізнавання образів, дискретизацію домену, тріангуляцію, генерацію сітки , вимірювання сонячної радіації [2]. Такі задачі також виникають при зберіганні циліндричних барабанів, упакуванні пляшок або банок у найменшій коробці, посадці рослин з максимальною щільністю [2].

Окрім прикладних задач, дослідження розміщення нерівних кругів у контейнерах мають важливе значення для розвитку алгоритмічних підходів до оптимізації. Зокрема, ці задачі стимулюють створення нових методів розв’язання комбінаторних проблем, які базуються на штучному інтелекті, машинному навчанні та гібридних моделях оптимізації. Такий підхід дозволяє не лише покращити результати для стандартних задач, але й розширити можливості їх застосування для вирішення нетривіальних проблем, наприклад, оптимального проєктування наноматеріалів, моделювання біомеханічних структур або аналізу динамічних систем, де параметри задачі можуть змінюватися в часі.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі оптимізації пакування нерівних кругів

Сучасні методи розв’язання задач розміщення нерівних кругів включають кілька підходів, які використовують передові технології та алгоритми.

Задачі пакування кругів є складними комбінаторними задачами, які вимагають ефективних методів розв’язання. Розглянемо детальніше основні методи, які використовуються для розв’язання задач розміщення кругів.

Методи математичного програмування формулюють задачу пакування кругів як задачу математичного програмування, часто нелінійного або змішаного цілочислового програмування. Наприклад, задача підгонки труб різного діаметру в транспортну тару розглядається як 2-D CSKP для нерівних кругів у прямокутнику і формулюється як нелінійна задача змішаного цілочислового програмування [10].

Евристичні методи використовуються для отримання наближених розв’язків, коли точні методи є занадто складними або трудомісткими. Зокрема, імітаційний відпал (Simulated Annealing) використовується для розв’язання задачі 2-D CSKP розміщення кругів у прямокутнику фіксованих розмірів [10]. Жадібні алгоритми B1.0 та B1.5 використовують правило максимального отвору (MHD) для вибору розташування кругів [11].

Гібридні методи поєднують різні підходи для досягнення кращих результатів. Наприклад, гібридний алгоритм для 2-D CODP, який поєднує локальний променевий пошук, бінарний інтервальний пошук та процедуру генерації розв’язку у “відкритій” смузі [12].

Ітеративний алгоритм табу-пошуку для розміщення нерівних кругів у круговому контейнері (Iterated Tabu Search Algorithm for Packing Unequal Circles in a Circle) використовує комбінацію безперервної локальної оптимізації та комбінаторних методів [10]. Алгоритм генерує локально оптимальні розміщення за допомогою безперервного методу локальної оптимізації, а також використовує структуру сусідства для пошуку кращих локальних мінімумів. Це досягається за допомогою двох відповідних пертурбаційних рухів та інтеграції методів табу-пошуку та ітеративного локального пошуку.

Метод монотонного стрибка по басейнах та його варіант на основі популяції (Population Basin Hopping) використовуються для розв'язання задачі розміщення рівних та нерівних кругів у круговому контейнері з мінімальним радіусом [13]. Цей підхід включає численні обчислювальні експерименти для аналізу задачі та вибору відповідних параметрів для запропонованих методів. Метод дозволяє досягти покращених результатів у порівнянні з попередніми відомими рішеннями.

Методи глобальної оптимізації використовуються для знаходження оптимальних розв'язків задач пакування кругів [14]. Вони включають використання програмного забезпечення для глобальної оптимізації, такого як LINGO (Language INtegrated General Optimizer), NMinimize (Numerical Minimize) та MathOptimizer Professional (Mathematical Optimizer).

Методи машинного навчання, такі як глибоке навчання та нейронні мережі, можуть бути застосовані для оптимізації розміщення об'єктів у контейнерах [15]. Ці методи дозволяють враховувати складні взаємодії між об'єктами та контейнерами. Генетичні алгоритми, які імітують процес природного відбору, також можуть бути ефективними для задач, де традиційні методи оптимізації не справляються через велику кількість можливих комбінацій [16].

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Однією з найважливіших проблем у процесі математичного моделювання задач розміщення геометричних об'єктів, зокрема задач пакування сферичних об'єктів простору $\mathbf{R}^d$ різної вимірності ($d \geq 2$), є опис взаємного розташування геометричних об'єктів (у подальшому – об'єктів).

Нехай задано обмежені замкнені об'єкти $A, B \subset \mathbf{R}^d$. У разі розташування об'єктів A та B один відносно іншого можливі такі ситуації:

а) об’єкти A та B перетинаються, тобто $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \neq \varnothing$, де $\operatorname{int} A$ – внутрішність множини A;

б) об’єкти A та B не мають спільних точок, тобто $A \cap B = \varnothing$ й об’єкти знаходяться на деякій відстані один від іншого;

в) об’єкти A та B дотикаються, тобто $\operatorname{fr} A \cap \operatorname{fr} B \neq \varnothing$ та $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B = \varnothing$, де $\operatorname{fr} A$ – межа множини A.

Для опису цих ситуацій використовують Φ-функцію [5, 6].

Неперервну, всюди визначену функцію $\Phi^{AB}: \mathbf{R}^{2d} \to \mathbf{R}^1$ називають Φ-функцією об’єктів $A(u_A)$ та $B(u_B)$, де u_A та u_B – параметри розміщення об’єктів A та B відповідно, якщо вона задовольняє такі вимоги:

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) < 0, \text{ якщо } \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) \neq \varnothing,$$

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) = 0, \text{ якщо } \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) = \varnothing \text{ та } frA(u_A) \bigcap frB(u_B) \neq \varnothing,$$

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) > 0, \text{ якщо } clA(u_A) \bigcap clB(u_B) = \varnothing.$$

Для моделювання обмежень на допустимі відстані між геометричними об’єктами використовують поняття нормалізованої Φ-функції [5, 6].

Φ-функцію $\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B)$ називають нормалізованою, якщо її значення дорівнюють евклідовим відстаням між об’єктами $A(u_A)$ та $B(u_B)$ за умови

$$(u_A, u_B) \in G = \left\{ (u_A, u_B) \in \mathbb{R}^{2d} : \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) = \varnothing \right\},$$

$$\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) = \operatorname{dist}(A(u_A), B(u_B)), \text{ якщо } \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) = \varnothing,$$

$$\tilde{\Phi}^{AB}(u_A, u_B) < 0, \text{ якщо } \operatorname{int} A(u_A) \bigcap \operatorname{int} B(u_B) \neq \varnothing.$$

де $\operatorname{dist}(A(u_A), B(u_B)) = \min\limits_{x_A \in A, x_B \in B} \operatorname{dist}(x_A, y_B)$ – евклідова відстань між множинами.

У деяких випадках побудова нормалізованих Φ-функцій є досить складною процедурою. Тому для моделювання обмежень на мінімально допустимі відстані між об’єктами використовують вільні від радикалів псевдонормалізовані Φ-функції [5, 6].

Неперервну, всюди визначену функцію $\widehat{\Phi}^{AB}:\mathbf{R}^{2d}\to\mathbf{R}^1$ називають псевдонормалізованою Φ-функцією об'єктів $A(u_A)$ та $B(u_B)$, якщо вона задовольняє такі вимоги:

$$\widehat{\Phi}^{AB}(u_A,u_B)>0,\ \text{якщо}\ \operatorname{dist}(A(u_A),B(u_B))>\rho,$$
$$\widehat{\Phi}^{AB}(u_A,u_B)=0,\ \text{якщо}\ \operatorname{dist}(A(u_A),B(u_B))=\rho,$$
$$\widehat{\Phi}^{AB}(u_A,u_B)<0,\ \text{якщо}\ \operatorname{dist}(A(u_A),B(u_B))<\rho.$$

Нехай є кулі $S_i=\{X=(x_1,x_2,...,x_d)\in\mathbb{R}^d:\|X-u_i\|^2\le r_i^2\}$, $i\in I=\{1,2,...,n\}$, та контейнер $A(\mu)\subset\mathbf{R}^{d+k}$, де $u_i=(x_{i1},x_{i2},...,x_{id})$ – вектор координат центра, – радіус кулі S_i, $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_k)$ – вектор змінних метричних характеристик контейнера.

У контейнері $A(\mu)$, загалом, можуть бути наявні опуклі зони заборони P_l, $l\in I_p=\{1,2,...,n_p\}$. Розглянемо множину $C(\mu)=A(\mu)\setminus\operatorname{int}\left(\cup_{i\in I_n}P_l\right)$.

Необхідно розмістити кулі з набору $\{S_i,\ i\in I_n\}$, у області $C(\mu)$ так, щоб функція цілі (критерій якості) $\kappa(\omega)$ досягала свого екстремального значення та виконувалися обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} між кулями S_i та S_j, $i<j\in I$, тобто

$$d_{ij}=\operatorname{dist}(S_i(u_i),S_j(u_j))=\min_{a\in S_i(u_i),b\in S_j(u_j)}\rho(a,b).$$

де $\rho(a,b)$ – евклідова відстань між точками $a,b\in\mathbb{R}^d$.

Математичну модель можна записати у такий спосіб [2]:

$$\omega^*=(u^*,\mu^*,t^*)=\arg\operatorname*{extr}_{\omega\in W\subset(\mathbb{R}^{nd+k}\times B^n)}\kappa(\omega),\tag{1.1}$$

де $\omega = (u, \mu, t)$ – вектор змінних;

$u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор координат центрів куль;

$t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ – вектор двійкових змінних;

$t_i \in B = \{0,1\}$, $t_i = 1$, якщо $\Phi_i(u_i, \mu) \geq 0$ та $t_i = 0$, якщо $\Phi_i(u_i, \mu) < 0$;

$$W = \{\omega \in (\mathbf{R}^{nd+k} \times B^n) \colon t_i t_j \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0,\ i<j \in I,\ g_q(\omega) \geq 0,\ q \in I_q = \{1,2,...,Q\}\}; \qquad (1.2)$$

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \| u_i - u_j \|^2 - (r_i + r_j + d_{ij})^2 \qquad (1.3)$$

– псевдонормалізована Φ-функція куль S_i та S_j, $i < j \in I_n$;

$\Phi_i(u_i, \mu)$ – Φ-функція кулі S_i та множини $C^*(\mu) = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \operatorname{int} C(\mu)$;

$\Phi_i(u_i, \mu) = \min\{\Phi^c_{i0}(u_i, \mu), \Phi^c_{il}(u_i),\ l \in I_p\}$, $i \in I_n$;

$\Phi^c_{i0}(u_i, \mu)$ – Φ-функція кулі S_i та множини $A^*(\mu) = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \operatorname{int} A(\mu)$, $i \in I_n$;

$\Phi^c_{il}(u_i)$ – Φ-функція кулі S_i та об'єкта P_l, $i \in I_n$, $l \in I_p$;

$g_q(\omega) \geq 0$, $q \in I_q$, – додаткові обмеження на параметри розміщення куль та метричні характеристики області розміщення $C(\mu)$.

Розглянемо основні особливості задачі для $d = 2$. Маємо задачу пакування кругів. Множина допустимих розв'язків W, загалом, є незв'язною з багатозв'язними компонентами зв'язності.

Якщо Ф-функції, які описують область допустимих розв'язків W, містять оператори максимумів, то множину W можна записати у вигляді

$$W = \bigcup_{t=1}^{\eta} W_t .$$

Кількість змінних задачі (1.1) – (1.3) оцінюють як $O(n)$, а кількість нерівностей, які описують область W, – як $O(n^2)$.

Залежно від конкретної постановки задачі (1.1) – (1.3) для $d = 2$ можна сформулювати задачу із змінними метричними характеристиками (розміром) контейнера (Open Dimension Problem – ODP) та задачу про рюкзак (Knapsack Problem – KP) [2, 9]. У задачі ODP необхідно розмістити всі круги із заданого набору, а змінні метричні характеристики є незалежними. Функція цілі задає розмір контейнера, який мінімізується. Задача KP пов'язана з вибором підмножини кругів із заданого набору. Функцією цілі є коефіцієнт щільності заповнення контейнера, який максимізується. У разі розміщення нерівних кругів задача еквівалентна максимізації площі розміщених кругів, а у разі рівних об'єктів – їх кількості.

1.4 Постановка задач дослідження

Метою кваліфікаційної роботи є поліпшення ефективності розв'язання оптимізаційної задачі пакування нерівних кругів в круговому контейнері за допомогою конструктивних засобів математичного та комп'ютерного моделювання.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

– провести системний аналіз предметної області;

– вивчити існуючі методи та підходи до задачі пакування нерівних кругів;

– описати математичну модель для оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері

– вибрати та адаптувати методи оптимізації для розв'язання задачі.

– розробити алгоритм розв'язання задачі;

– розробити програмне забезпечення для реалізації математичних моделей та алгоритмів;

– провести тестування програмного забезпечення на тестових прикладах.

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ’ЯЗАННЯ

2.1 Методологія розв’язання задачі розміщення сферичних об’єктів

Розглянута математична модель задачі пакування та її реалізації у вигляді ODP та KP дають змогу охопити широке коло задач розміщення кругів. На вибір постановки впливає вигляд функції цілі: мінімізація розмірів контейнера або максимізація щільності розміщення (кількості розміщуваних об’єктів – у разі розміщення рівних). Задачі мають такі загальні властивості: багатовимірність, багатоекстремальність, нелінійність обмежень, які описують область допустимих розв'язків. Методи повного перебору локальних екстремумів, загалом, не реалізуються на практиці через значну обчислювальну складність оптимізаційних процедур, навіть за невеликої кількості ($n \leq 10$). Для задач, поставлених як KP, є необхідність додаткового перебору ще й за цілочисловими змінними. Тому в рамках методології пропонується принципово новий метод спрямованого перебору локальних екстремумів, який ґрунтується на ідеї гомотетичних перетворень об’єктів і дозволяє отримувати наближення до глобального екстремуму.

Математична модель задачі пакування та її реалізація у форматі ODP і KP охоплюють широкий спектр задач із розміщення кругів. Вибір конкретної постановки залежить від поставленої мети: чи то мінімізація розмірів контейнера, чи то максимізація щільності пакування (кількості об’єктів за умови їхньої рівності). Такі задачі характеризуються багатовимірністю, багатоекстремальністю та нелінійністю обмежень, які визначають область допустимих рішень. Через значну обчислювальну складність методи повного перебору локальних екстремумів, навіть за невеликої кількості об’єктів, зазвичай не використовуються на практиці. Для задач формату KP додатково виникає потреба в обліку цілочислових змінних. У цьому контексті доцільно використовувати метод спрямованого перебору локальних екстремумів, заснований на гомотетичних перетвореннях об’єктів, що дозволяє ефективно знаходити наближення до глобального екстремуму.

На вибір стратегії розв'язання впливають такі основні чинники:

– постановка задачі: ODP, KP, IIPP;

– метричні особливості об'єктів (рівні, нерівні, діапазон та розподіл значень радіусів);

– кількість розміщуваних об'єктів;

– просторова форма області розміщення;

– наявність додаткових обмежень (зони заборони, мінімально допустимі відстані, обмеження на метричні характеристики);

– часові обмеження.

Основні структурні елементи методології розв'язання задачі наведено на рис. 2.1. Методологія охоплює аналіз постановки задачі, вихідних даних та обмежень, розробку математичних моделей для класу задач пакування сферичних (кругових) об'єктів різної вимірності, дослідження їхніх характеристик і створення стратегій вирішення. У межах цих стратегій пропонуються методи для побудови допустимих розміщень (початкових точок або наближених рішень), а також методи локальної та глобальної оптимізації.

Постановка задачі відповідає міжнародній класифікації задач розкрою та розміщення [9]. Виокремлюються дві основні постановки: задача із змінними метричними характеристиками контейнера (ODP) та задача рюкзака (KP). Окремим випадком задачі KP є задача розміщення рівних об'єктів (IIPP). Усі ці задачі характеризуються однаковою цільовою функцією та подібними математичними моделями, що описуються у формі задач змішаного цілочислового нелінійного програмування [2].

Постановка задачі визначається цільовою функцією. Якщо задано набір об'єктів із фіксованими радіусами і потрібно знайти мінімальні метричні характеристики (розміри) контейнера, що дозволяють розмістити всі ці об'єкти, то це відповідає задачі ODP. У такій постановці немає потреби вибирати підмножину об'єктів із заданого набору – контейнер має вмістити всі елементи. У дослідженні розглядаються задачі з однією змінною метричною характеристикою контейнера та лінійною функцією цілі. Ця особливість використовується для вивчення властивостей екстремальних точок області допустимих рішень і визначення стратегії розв’язання.

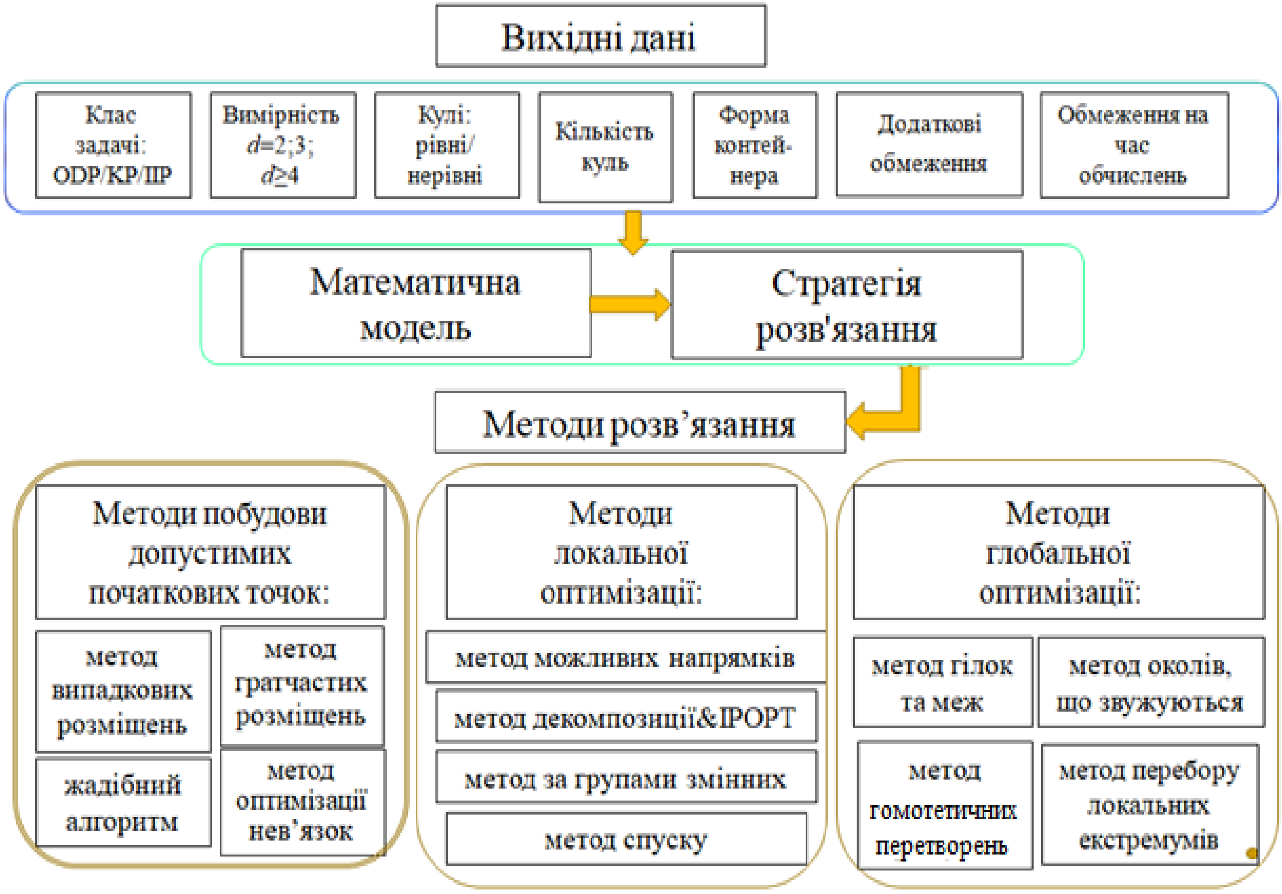

Рисунок 2.1 – Основні структурні елементи методології

У випадку, коли задано набір об’єктів із відомими радіусами, а контейнер має фіксовану просторову форму та визначені розміри, постає задача розміщення об’єктів із заданого набору таким чином, щоб максимізувати коефіцієнт щільності. Очевидно, що існує багато можливих піднаборів об’єктів, і для розв’язання цієї задачі можна було б виконати повний перебір усіх піднаборів із подальшим розміщенням об’єктів у контейнері. Така постановка відповідає задачі КР, яка є змішаною цілочисловою нелінійною задачею програмування. У цій задачі вибір піднабору об’єктів визначається двійковими змінними, а параметри їхнього розміщення – неперервними змінними.

Окремим випадком задачі рюкзака є задача ІРР, у якій вибір об'єктів із заданого набору зводиться до визначення кількості об'єктів, які потрібно розмістити. У зв'язку з цим метод послідовно-одиночного розміщення стає базовим підходом для розв'язання задач цього класу.

При розміщенні об'єктів із різними радіусами збільшення вимірності підкреслює важливість розташування об'єктів із великим радіусом, оскільки вони вносять основний вклад у загальний об'єм. У разі різних радіусів об'єктів співвідношення радіусів між парами або групами об'єктів може суттєво впливати на структуру їхнього розміщення.

За послідовно-одиночного розміщення структура розміщення значною мірою залежить від порядку, у якому об'єкти розміщуються. Чим більша різниця в радіусах об'єктів, тим більш різними можуть бути отримані результати. Для рівних об'єктів порядок розміщення не впливає на результат. Отже, за значного розкиду радіусів ефективними є методи, що враховують перестановки об'єктів, наприклад, метод околів, що звужуються [2], який використовує комбінаторні властивості.

Для рівних об'єктів доцільно застосовувати модифіковані методи, які базуються на ймовірнісних властивостях цільової функції на дереві розв'язків, що відображає межові точки області допустимих рішень. Якщо ж різниця між радіусами об'єктів незначна або є плавний перехід від меншого до більшого значення, найефективнішим є метод спрямованого перебору локальних екстремумів. У ньому забезпечується поступовий перехід від одного екстремуму до іншого завдяки гомотетичним перетворенням об'єктів.

Співвідношення діаметра об'єктів до розміру контейнера є ключовим фактором, що впливає на вибір методу для побудови початкових розміщень. Залежно від вимірності простору, це співвідношення визначає, чи використовувати випадкове розміщення, чи ґратчасті методи.

Кількість об'єктів, що підлягають розміщенню, безпосередньо визначає кількість змінних і обмежень задачі, що, у свою чергу, впливає на вибір стратегії та методів для її розв'язання.

Для задач із невеликою кількістю об'єктів (до 10) з змінними метричними характеристиками можливий повний перебір вершин дерева розв'язків, що відповідають межовим точкам області допустимих значень, а за певних умов – усіх крайніх точок та локальних екстремумів задачі. Для цього можна застосувати схему методу гілок та меж [2]. Однак через нелінійність обмежень на практиці виникають труднощі при розв'язанні нелінійних систем рівнянь. Тому на практиці можна говорити лише про теоретичний глобальний екстремум.

Для задачі КР необхідно додатково виконати перебір за двійковими змінними, що суттєво збільшує обчислювальну складність. Якщо кількість об'єктів зростає, то можливий лише перебір частини дерева розв'язків, що, відповідно, обмежує кількість перевірених локальних екстремумів.

Можливість застосування методів локальної оптимізації залежить від кількості змінних і обмежень. Стратегія активного набору обмежень [2] дозволяє значно знизити обчислювальну складність методів пошуку локальних екстремумів, оскільки фокусується лише на тих обмеженнях, які є активними на поточному етапі оптимізації.

Якщо кількість об'єктів дуже велика (понад 5000), то можна досягти лише наближених рішень для локальних екстремумів, застосовуючи метод оптимізації за групами змінних. Залежно від кількості об'єктів та обчислювальних ресурсів, можна вибрати певну групу змінних і виконати локальну оптимізацію лише для них, при цьому всі інші змінні вважатимуться сталими. Це дозволяє знизити обчислювальну складність і зосередитися на найбільш значущих змінних для даного етапу оптимізації.

Просторова форма області розміщення суттєво впливає на стратегію розв'язання задачі. Якщо область розміщення має складну геометричну форму, що включає заборонені зони, це ускладнює побудову функцій, які описують взаємовідносини між об'єктами та цією областю. Область допустимих розв'язків можна представити як об'єднання підобластей, кожну з яких можна описати за допомогою систем нерівностей. Тоді основну задачу можна поділити на послідовність підзадач, що стосуються кожної з цих підобластей.

Коли контейнер має багато зон заборони, пошук допустимого розміщення ускладнюється. В такому випадку для знаходження допустимої точки необхідно вирішити допоміжну задачу нелінійного програмування. Присутність зон заборони робить метод побудови початкових точок за допомогою регулярних розміщень об’єктів недоцільним, оскільки такі методи не здатні врахувати обмеження, накладені цими зонами.

У прикладних задачах, окрім геометричних обмежень, можуть з’являтися й інші додаткові обмеження. До таких можна віднести обмеження на мінімально та максимально допустимі відстані між об’єктами, а також обмеження, що стосуються статичних та динамічних характеристик, таких як центр мас, осьові та центробіжні моменти інерції тощо. Ці обмеження необхідно враховувати при розв’язанні задачі, оскільки вони можуть суттєво вплинути на вибір методів оптимізації та кінцевий результат.

У кваліфікаційній роботі розглядається задача розміщення кругів у двовимірному евклідовому просторі у вигляді ODP. Як контейнер розглядається круг, радіус якого мінімізується. Також розглядаються методи оптимізації, які дозволяють ефективно знаходити рішення в умовах складних геометричних обмежень. Розробляється алгоритм, який дає змогу перейти від одного локального екстремуму до іншого завдяки гомотетичним перетворенням кругів.

2.2 Методи розв’язання задачі розміщення кругів

2.2.1 Методи локальної оптимізації

Для локальної оптимізації використовуються комбінація методів декомпозиції й внутрішньої точки (солвер IPOPT – Interior Point Optimizer [17]), модифікація методу можливих напрямків, метод оптимізації за групами змінних та метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа.

Комбінований метод декомпозиції й IPOPT [2]. Для підвищення ефективності методу локальної оптимізації використовується метод декомпозиції та стратегія активного набору обмежень, які дозволяють звести задачу з великою кількістю нелінійних обмежень до послідовності задач нелінійного програмування зі значно меншою кількістю нелінійних обмежень. Метод внутрішньої точки є прямо-двоїстим методом внутрішньої точки (бар'єрних функцій), для якого доведена теоретична збіжність. Він показав високу ефективність для задач нелінійного програмування, які виникають при розміщенні геометричних об'єктів. У методі використовується інформація про другі похідні функції цілі й обмежень, тому він демонструє високу швидкість збіжності. Доведено теоретичну збіжність методу за $O(\sqrt{n}\log(1/\varepsilon))$ ітерацій, де n – кількість змінних, ε – точність.

Метод можливих напрямків [2] використовують із збільшенням кількості змінних (понад 3000). Модифікації методу зводять задачу нелінійного програмування зводиться до послідовності задач лінійного програмування. Ідея методу полягає в пошуку напрямку руху, за якого виконуються дві умови: поліпшення значення функції цілі та допустимість за кожним із обмежень, що описують область допустимих розв'язків. Додатково використовують спеціальну стратегію активних обмежень, яка впливає на збіжність методу.

Метод оптимізації за групами змінних є модифікацією методу покоординатного спуску [2] та використовується для задач ODP з кількістю змінних понад 10000. Всі змінні задачі розбивають на декілька груп. Вибирається одна з груп, а решта розглядається як сталі. Для розв'язання отриманої задачі використовують солвер IPOPT [17] або метод можливих напрямків [2]. Після розв'язання всіх підзадач отриманий результат є наближенням до локального екстремуму задачі. Для поліпшення результату описаний процес повторюється для різних груп змінних. Обчислення тривають, поки є поліпшення функції цілі.

Метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа [2] застосовується для задач із обернено опуклими та лінійними обмеженнями й ґрунтується на аналізі множників Лагранжа. Він застосовується разом із методом оптимізації за групами змінних та стратегією активного набору обмежень. Метод реалізується ітераційною формулою:

$$\kappa(u^{l+1}) = \kappa(u^l) - \Delta\kappa(u^l),\ l = 0,1,2,\ldots.$$

Напрямок руху вибирають за вектором множників Лагранжа $\lambda^l = (\lambda_1^l, \lambda_2^l, \ldots, \lambda_m^l)$. Для цього розв’язують систему лінійних рівнянь $\nabla\kappa(u^l) = A(u^l)^T \lambda^l$, де $A(u^l)$ – матриця Якобі.

Обмеження, яке відповідає мінімальному від’ємному множнику, вилучають із списку активних обмежень. Для вибору напрямку руху із крайньої точки ослаблюється активне обмеження, якому відповідає цей множник. Далі відбувається рух межею області допустимих розв’язків у напрямку зменшення функції цілі. Довжина кроку вибирається таким чином, щоб стало активним, принаймні, ще одне обмеження. Процес триває доти, доки в деякій крайній точці всі множники Лагранжа є додатними, що є необхідною й достатньою умовою екстремуму.

2.2.2 Методи глобальної оптимізації

З урахуванням багатоекстремальності задач розміщення є необхідність вибору ліпшого варіанту розміщення. Загалом, безпосередній перебір усіх варіантів неможливий внаслідок NP-складності задач розміщення. Тому для цілеспрямованого пошуку ліпших варіантів застосовують методи, в основі яких перегляд частини множини розв’язків із відтинанням заздалегідь неперспективних підмножин (методи гілок та меж й околів, що звужуються). Метод гомомтетичних перетворень [2] за рахунок уведення змінних метричних характеристик дає можливість отримати наближення до глобального екстремуму задачі ПРР, та метод спрямованого перебору локальних екстремумів, що здійснює плавний перехід від одного локального екстремуму до іншого, з кращим значенням функції цілі.

Загальна схема методу гілок та меж [2] полягає в розбитті множини допустимих розв'язків на підмножини меншої вимірності (розмірів). Ця процедура рекурсивно застосовується для всіх підмножин. Отримані підмножини утворюють дерево розв'язків. Завдяки правилам відтинання неперспективні підмножини не підлягають подальшому розгалуженню. Це дозволяє значно скоротити кількість варіантів у порівнянні з повним перебором. Схема методу гілок та меж застосовується при розв'язанні як задачі розміщення з неперервними змінними, так і задачі КР для перебору різних значень двійкових змінних.

Метод околів, що звужуються, [2] ґрунтується на статистичних властивостях функції цілі на перестановках об'єктів або дереві розв'язків. Він дозволяє організувати спрямований перебір послідовностей об'єктів або гілок дерева розв'язків. Для його реалізації введені метрики на множинах перестановок і вершин дерева. Пошук кращих значень функції цілі здійснюється в околах, заданих на дискретних множинах. На кожному кроці методу, виходячи з накопиченої в процесі роботи статистичної інформації, обираються центр та радіус нового околу. Якщо значення функції цілі не покращується, то радіус околів зменшується. Процес продовжується, доки радіус околу не стає мінімально можливим, а поліпшень функції цілі не знайдено. Метод має не меншу ефективність, ніж класичний метод випадкового пошуку Монте-Карло. Метод використовується як для пошуку розв'язків задачі, так і для побудови перспективних допустимих початкових точок.

В основі методу гомотетичних перетворень [2] лежить ідея введення змінних метричних характеристик об'єктів. Задача ПРР може бути зведена до послідовності задач нелінійного програмування з лінійними функціями цілі, в яких відбуваються гомотетичні перетворення об'єктів. Завдяки лінійності функції цілі локальні екстремуми задач знаходяться в крайніх точках області допустимих рішень. Розв'язок останньої задачі вважається апроксимацією до глобального максимуму задачі ПРР.

2.2.3 Евристичні методи розв’язання

Для задачі розміщення нерівних кругів ефективним є використання евристичних алгоритмів, які можуть знайти наближені розв'язки за прийнятний час. У дослідженні [18] було запропоновано евристичний алгоритм за допомогою r-алгоритму Шора з дихотомією кроку.

Основна ідея статті [19] полягає в оптимізації розташування кругів різного радіуса в круговому контейнері для мінімізації радіуса контейнера за допомогою дослідження масштабних законів для динаміки симуляції та оптимальних значень радіусів оточуючих кругів.

Алгоритм, розроблений у роботі [20], представляє використовує метод перетворення конфігурацій у графи та індексування за допомогою хешування для швидкого порівняння конфігурацій. Алгоритм також включає кілька покращень для оптимізації процесу пошуку, таких як адаптивне підтримання суміжності, ефективне виявлення вакантних місць та метод локалізації на основі діаграм Вороного.

У роботі [21] розробляється математична модель задачі, де радіуси кругів розглядаються як змінні, і пропонується стратегію розв'язання (jump algorithm), яка включає низку підзадач нелінійного програмування . Стратегія включає побудову початкових точок, обчислення локальних мінімумів, перехід від одного локального екстремуму до іншого перестановки кругів.

Відомі алгоритми [19 – 21] демонструють високу ефективність у розв'язанні задач пакування кругів. Проте, вони мають значну обчислювальну складність, що робить їх застосування обмеженим для великих систем через високі вимоги до обчислювальних ресурсів та часу.

Тому у кваліфікаційній роботі пропонується спрощений варіант jump-алгоритму. Цей підхід спрямований на зменшення обчислювальної складності, зберігаючи при цьому прийнятну якість розв'язків. Алгоритм дозволяє отримати рішення за порівняно невеликий час, що робить його більш практичним для застосування в реальних умовах, де швидкість обчислень є критично важливою.

2.3 Метод розв'язання задачі пакування нерівних кругів на основі гомотетичних перетворень

Для опису математичної моделі необхідно формалізувати взаємне розташування кругів. Існує багато підходів, які дозволяють описати цей процес. Зокрема, попіксельне описання передбачає розбиття контейнера на пікселі та визначення, чи займає кожен піксель частину круга або є порожнім [22]. Це дозволяє точно моделювати розташування кругів і оцінювати ефективність пакування. Такий спосіб є особливо корисним для візуалізації, комп'ютерної графіки.

Методи геометричного моделювання включають використання багатокутників Вороного, буферних зон та інших геометричних підходів для опису взаємного розташування кругів [23]. Багатокутники Вороного використовуються для визначення зон впливу кожного круга, що дозволяє аналізувати їх взаємне розташування та уникати перекриття. Буферні зони створюються навколо кожного круга для визначення мінімальної відстані між ними, що допомагає уникати накладання.

Одним із ефективних способів описання взаємного розташування кругів є Ф-функції [5, 6]. Ці функції дозволяють формалізувати умови розміщення та ненакладання кругів у контейнері.

Нехай як контейнер вибирається круг $C(R)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x^2+y^2\le R^2\}$ з радіусом R. Центр координат круга $C(R)$ збігається з початком координат. Нехай задано набір кругів:

$$C_i(u_i)=C_i(x_i,y_i)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : (x-x_i)^2+(y-y_i)^2\le\hat{r}_i\},\ i\in I=\{1,2,...,n\},$$

де $\hat{r}_i$, $i\in I$, – радіуси кругів.

Не втрачаючи спільності, вважаємо, що $\hat{r}_1\le\hat{r}_2\le...\le\hat{r}_n$.

Умова розміщення круга $C_i(u_i)$, $i\in I=\{1,2,...,n\}$, в крузі $C(R)$ описується за допомогою Φ -функції круга $C_i(u_i)$ та об'єкта $C^* = \mathbf{R}^2 \setminus \operatorname{int} C(R)$:

$$\Phi_i(u_i, R) = -(x_i^2 + y_i^2) + (R - \hat{r}_i)^2 \geq 0 . \tag{2.1}$$

Якщо $x_i^2 + y_i^2 \leq (R - \hat{r}_i)^2$, то круг належить контейнеру (рис. 2.2). Якщо $x_i^2 + y_i^2 > (R - \hat{r}_i)^2$, то круг або частина круга не належить контейнеру (рис. 2.2).

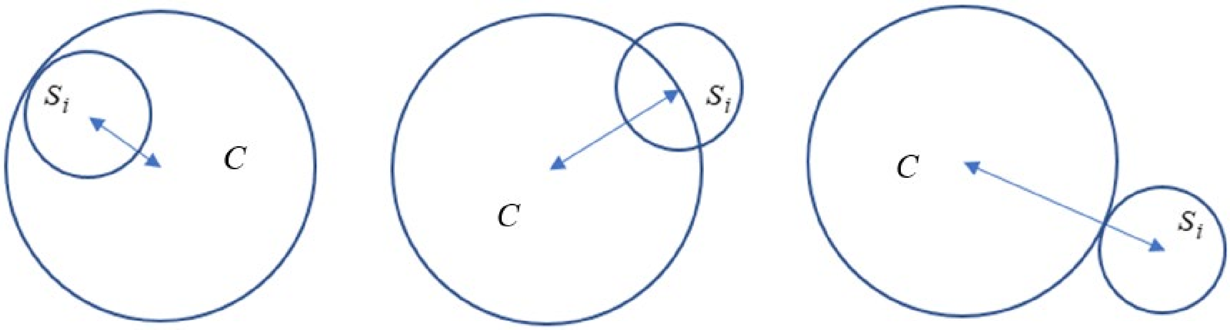

Рисунок 2.2 – Розміщення круга та контейнера

Умова ненакладання кругів $C_i(u_i)$ та $C_j(u_j)$, $i < j \in I$, (рис. 2.3) є

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (\hat{r}_i + \hat{r}_j)^2 \geq 0 . \tag{2.2}$$

Якщо $\Phi_{ij}(u_i, u_j) = 0$, то круги дотичні один до одного, а якщо $\Phi_{ij}(u_i, u_j) < 0$, круги мають не порожній перетин їх внутрішностей (рис. 2.3).

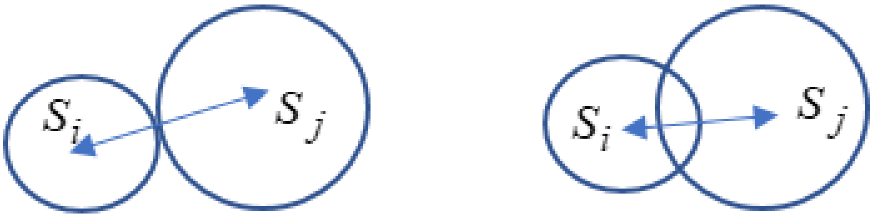

Рисунок 2.3 – Розміщення двох кругів

Задача. Необхідно знайти таке пакування кругів $C_i(u_i)$, $i \in I$, без накладень у крузі $C(R)$, за якого змінна (відкрита) метрична характеристика круга – його радіус R – досягає мінімального значення $R = R^*$.

Запишемо математичну модель задачі пакування кругів у крузі з відкритою метричною характеристикою (ODP).

Нехай задано круг $C(R)$, радіус якого є змінним та $\mathbf{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ – вектор координат центрів кругів. Математична модель задачі має такий вигляд:

$$(\mathbf{u}^*, R^*) = \arg \min_{(\mathbf{u}, R) \in W \subset \mathbf{R}^{2n+1}} R, \tag{2.3}$$

де

$$W = \{(\mathbf{u}, R) \in \mathbf{R}^{3n+1} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0,\ 1 \leq i < j \in I,\ \Phi_i(u_i, R) \geq 0,\ i \in I\}. \tag{2.4}$$

Тут нерівності $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ та $\Phi_i(u_i, R) \geq 0$ мають вигляд (2.1) та (2.2) відповідно.

Функція цілі задачі (2.3) залежить є лінійною і залежить лише від однієї змінної. Як відомо, мінімум лінійної функції цілі знаходиться в крайніх точках множини допустимих рішень W.

Обмеження (2.1) для фіксованого значення R описує опуклу множину. Це викликає додаткові складнощі для пошуку напрямку оптимізації градієнтними методами. З одного боку, напрямок має поліпшувати значення функції цілі (мінімум радіусу контейнера), а з іншого боку, забезпечувати допустиме рішення. При наближенні до точки мінімуму допустимий крок у такому напрямку оптимізації буде значно скорочуватися через опуклість зазначеної множини.

Задача (2.3) – (2.4) є NP-складною. Це означає, що час розв'язання задачі зростає експоненційно з кількістю кругів, що робить її дуже складною для великих наборів даних. Існуючі алгоритми та пакети глобальної оптимізації можуть ефективно працювати лише для невеликої кількості кругів.

Для задачі ODP доцільно використовувати метод спрямованого перебору локальних екстремумів (Jump Algorithm) [21], який базується на введенні змінних радіусів кругів.

У кваліфікаційній роботі розробляється алгоритм, який ґрунтується на методі спрямованого перебору локальних екстремумів. Він дає змогу переходити від одного локального екстремуму до іншого за допомогою гомотетичних перетворень кругів. Процес розв’язання починається з локального екстремуму. Формулюється допоміжна задача. Функція цілі вибирається так, щоб круги намагалися зайняти максимальну площу області розміщення. Початкові радіуси кругів змінюються, але після розв’язання допоміжної задачі ці значення поновлюються з урахуванням їх перерозподілу в отриманій точці. Цей метод ефективно працює, коли радіуси рівномірно розподілені між мінімальним і максимальним значеннями, проте його ефективність знижується у разі однорідності радіусів.

Висновки за розділом 2

Другий розділ присвячений вибору та обґрунтуванню методу розв’язання задачі дослідження. Розглянута математична модель задачі пакування та її реалізація у вигляді задач ODP та KP дозволяють охопити широкий спектр задач розміщення кругів. Вибір постановки задачі залежить від функції цілі: мінімізація розмірів контейнера або максимізація щільності розміщення. Задачі мають загальні властивості, такі як багатовимірність, багатоекстремальність та нелінійність обмежень.

Методи повного перебору локальних екстремумів не реалізуються на практиці через значну обчислювальну складність. Тому запропоновано новий метод спрямованого перебору локальних екстремумів, який ґрунтується на ідеї гомотетичних перетворень об’єктів і дозволяє отримати наближення до глобального екстремуму. Вибір стратегії розв’язання залежить від постановки задачі, метричних особливостей об’єктів, кількості розміщуваних об’єктів, просторової форми області розміщення, наявності додаткових обмежень та обмежень на час обчислень.

Методологія включає аналіз постановки задачі, вихідних даних та обмежень, математичні моделі, дослідження їх особливостей і розробку стратегій розв’язання. Розглядаються дві основні постановки: задача із змінними метричними характеристиками контейнера (ODP) та задача про рюкзак (KP). Задача розміщення рівних об’єктів (IIPP) є окремим випадком задачі KP.

Для локальної оптимізації використовуються комбінація методів декомпозиції й внутрішньої точки, модифікація методу можливих напрямків, метод оптимізації за групами змінних та метод спуску на основі аналізу множників Лагранжа. Для глобальної оптимізації застосовуються методи гілок та меж, методи околів, що звужуються, метод гомотетичних перетворень та метод спрямованого перебору локальних екстремумів.

У кваліфікаційній роботі для розв’язання задачі нерівних кругів обрано метод спрямованого перебору локальних екстремумів на основі Jump Algorithm. Для ODP метод дозволяє ефективно переходити від одного локального екстремуму до іншого, використовуючи гомотетичні перетворення та перестановки кругів. Метод мультистарту допомагає вибрати найліпший локальний екстремум або наближення до нього.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Середовище Embarcadero

Для математичного та комп'ютерного моделювання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері було обрано систему Embarcadero. Ця система забезпечує потужні інструменти для розробки програмного забезпечення, що дозволяє ефективно реалізовувати складні алгоритми та моделі.

Embarcadero Technologies пропонує потужні інструменти для розробників додатків та фахівців з баз даних, що дозволяють проектувати, створювати та керувати системами на різних платформах та мовах програмування. Основні можливості системи Embarcadero включають RAD Studio, : Delphi, C++Builder, InterBase, RAD Server.

RAD Studio є інтегрованим середовище розробки (IDE), яке об'єднує Delphi, C++Builder та інші інструменти для створення багатоплатформних нативних додатків. RAD Studio дозволяє розробляти додатки для Windows, macOS, iOS, Android та Linux з використанням єдиної кодової бази.

Delphi є потужним IDE для розробки додатків на мові Object Pascal. Вона забезпечує найкращу інтеграцію з Windows, потужні засоби візуального дизайну та підвищує продуктивність розробки. Delphi дозволяє створювати універсальні нативні додатки з високою продуктивністю.

C++Builder – це інструмент для швидкої розробки нативних додатків на мові C++. C++Builder пропонує сучасні бібліотеки візуального дизайну, що покращують користувацький досвід, продуктивність та скорочують час виходу на ринок.

InterBase – це реляційна SQL база даних, яка забезпечує високий рівень безпеки даних, відновлення після аварій та синхронізацію змін. InterBase може масштабуватися, вбудовуватися в будь-які пристрої та працювати на будь-якій платформі.

RAD Server – це платформа для створення REST API додатків, яка дозволяє швидко генерувати API для баз даних за допомогою Delphi та C++Builder. RAD Server може бути розгорнутий як на локальних серверах, так і в хмарі.

Для розв'язання задач нелінійного програмування використовується солвер IPOPT. Він ефективний для сильно розріджених матриць та дозволяє обчислювати локальні екстремуми задач нелінійного програмування. IPOPT ґрунтується на методі внутрішніх точок та лінійному пошуку, використовуючи спеціальні фільтри, що дозволяє ефективно розв'язувати задачі з лінійними та квадратичними функціями.

3.2 Алгоритм розв'язання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері

3.2.1 Загальна схема алгоритму

Алгоритм розв'язання задачі розміщення нерівних кругів у крузі мінімального радіуса ADPC (Algorithm for Dense Packing of Circles) включає такі етапи:

– вибір початкового значення радіуса контейнера та побудова допустимого початкового розміщення;

– мінімізація радіуса контейнера, отримання локального мінімуму;

– перехід від одного локального мінімуму до іншого.

Вибираємо початковий радіус контейнера, достатньо великий, щоб вмістити всі круги. Це значення можна взяти як суму радіусів кругів, що розміщуються. Далі виконуємо мінімізацію радіуса контейнера, розв'язуючи відповідну задачу нелінійного програмування для отримання локального мінімуму.

Для переходу від одного локального мінімуму до іншого розглядаємо радіуси кругів як змінні та намагаємося максимізувати сумарну площу кругів.

Після отримання нового розміщення, радіуси кругів можуть не відповідати початковим значенням. Важливо знайти відповідність між початковими та новими радіусами. Розміщуємо обидва набори радіусів у порядку зростання і знаходимо відповідність між ними.

Далі шукаємо локальний мінімум для нової конфігурації кругів. Процес повторюється, доки будемо отримувати ліпші значення радіуса контейнера.

3.2.2 Побудова початкового розміщення та пошук локального мінімуму

Спочатку вибираємо таке значення радіусу $R = R^0$ контейнера C, яке гарантує розміщення кругів $C_i(u_i)$, $i \in I$:

$$R_{best} = R^0 = \sum_{i \in I} r_i .$$

Воно є першим наближенням до найліпшого результату.

Вважаємо, що радіуси кругів є змінними і позначимо їх r_i, $i \in I$. Позначимо вектор усіх радіусів $\mathbf{r} = (r_1, r_2, ..., r_n)$. Вибираємо початкові значення радіусів $r_i = \varepsilon = e^{-6}$. Координати центрів кругів вибираємо випадково у полярній системі координат :

$$x_i = \rho\cos\varphi,\ y_i = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \rho \le (R^0 - r_i),\ 0 \le \varphi < 2\pi .$$

Це забезпечує виконання умови $C_i(u_i) \subset C$.

Для отримання допустимого розміщення кругів розв'язуємо таку задачу:

$$(\mathbf{u}^0, \mathbf{r}^0) = \arg \max_{(\mathbf{u},\mathbf{r}) \in D \subset \mathbf{R}^{3n}} \psi(\mathbf{u}), \qquad (3.1)$$

$$\psi(\mathbf{u}) = \sum_{i \in I} r_i \,. \tag{3.2}$$

Множина D описується такою системою нерівностей :

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2 \geq 0, i, j \in I,\ i < j\,, \tag{3.3}$$

$$\Phi_i(u_i, r_i) = -(x_i^2 + y_i^2) + (R^0 - r_i)^2 \geq 0\,,\ i \in I\,, \tag{3.4}$$

$$0 \leq r_i \leq \hat{r}_i\,,\ i \in I\,. \tag{3.5}$$

Тут функція цілі $\psi(\mathbf{u})$ є лінійною сумою радіусів кругів. Обмеження (3.3) описують умову ненакладання кругів із змінними радіусами, а обмеження (3.4) – умову розміщення кругів із змінними радіусами в контейнері. Водночас завдяки обмеженням (3.5) радіуси кругів обмежені зверху початковими заданими значеннями. Задача (3.1) – (3.5) завжди має глобальний максимум $\psi(\mathbf{u}^0) = \sum_{i \in I} \hat{r}_i$, тобто $r_i^0 = \hat{r}_i$, $i \in I$. Для будь-якої точки глобального максимуму $(\mathbf{u}^0, \mathbf{r}^0)$ маємо $\mathbf{u}^0 \in W$.

Вибираємо точку $(\mathbf{u}^0, R^0)$ як стартову і розв'язуємо задачу (2.3), (2.4) як задачу нелінійного програмування. Отримуємо точку локального мінімуму $(\mathbf{u}^*, R^*)$.

3.2.3 Перехід від одного локального екстремуму до іншого

Зазвичай локальний мінімум задачі (2.3), (2.4) R^* не є точкою глобального мінімуму. Розглянемо спосіб переходу від одного локального мінімуму до іншого.

На першому етапі, розглядаючи радіуси кругів як змінні, спробуємо знайти такі радіуси кругів, щоб максимізувати їх сумарну площу. Це дозволить ефективніше використати вільне місце в контейнері. Розв'язується допоміжна задача нелінійного програмування

$$(\widehat{\mathbf{u}},\widehat{\mathbf{r}}) = \arg \max_{(\mathbf{u},\mathbf{r})\in\Omega\subset\mathbf{R}^{3n}} \omega(\mathbf{u}), \tag{3.6}$$

$$\omega(\mathbf{u}) = \sum\nolimits_{i\in I} r_i^2 . \tag{3.7}$$

Тут множина Ω описується такою системою нерівностей:

$$\Phi_{ij}(u_i,u_j,r_i,r_j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (r_i + r_j)^2 \geq 0, i,j\in I,\ i<j, \tag{3.8}$$

$$\Phi_i(u_i,r_i) = -(x_i^2 + y_i^2) + (R^* - r_i)^2 \geq 0,\ i\in I, \tag{3.9}$$

$$r_{\min} \leq r_i \leq r_{\max},\ i\in I, \tag{3.10}$$

де $r_{\min} = \min\{r_i,\ i\in I\} = r_1$, $r_{\max} = \max\{r_i,\ i\in I\} = r_n$.

Задача (3.6) – (3.10) є задачею нелінійного програмування з квадратичною функцією цілі. Значення радіуса контейнера R^* залишається сталим. Нерівності (3.10) дають змогу утримувати радіуси в діапазоні їх початкових значень $r_{\min} \leq r_i \leq r_{\max}$.

Отримуємо $\omega(\widehat{\mathbf{u}}) \geq \omega(\mathbf{u}^*)$. Частина радіусів збільшує свої початкові значення, а частина – зменшує.

Щоб отримати іншу конфігурацію кругів, яка відповідає новим значенням радіусів, розглянемо почленно дві послідовності радіусів: $\hat{r}_1,\hat{r}_2,...,\hat{r}_n$ та $r_1^{**},r_2^{**},...,r_n^{**}$. Перенумеровуємо індекси кругів та міняємо місцями параметри розміщення кругів таким чином, щоб виконувались нерівності: $\widehat{r}_{j_1} \leq \widehat{r}_{j_2} \leq ... \leq \widehat{r}_{j_n}$. Деякі радіуси $\widehat{r}_{j_i}$ стають більше за початкові значення $\hat{r}_i$. Тому коректуємо нові значення: $\widehat{r}_{j_i} = \min\{\widehat{r}_{j_i}, \hat{r}_{j_i}\}$.

Далі, для того щоб поновити початкові радіуси кругів, розв'язуємо задачу (3.1) – (3.5).

Якщо $\psi(\mathbf{u}^0) = \sum\nolimits_{i\in I} \hat{r}_i$, то отримано нову точку і нову конфігурацію кругів.

Переходимо знову до розв'язання задачі (2.3), (2.4). Якщо отримано локальний мінімум, в якому значення функції менше, ніж найліпше значення функції цілі R_{best}, то маємо поліпшення радіуса контейнера. Процес повторюється, доки є поліпшення функції цілі.

Якщо $\psi(\mathbf{u}^0) < \sum_{i \in I} \hat{r}_i$, то не вдалося перейти до локального мінімуму з ліпшим значенням функції цілі.

Блок-схему основного етапу алгоритму ADPC наведено на рис. 3.1.

В задачах нелінійного програмування (2.3), (2.4), (3.1) – (3.5) та (3.6) – (3.10) кількість квадратичних обмежень, які описують умови ненакладання кругів, становить $C_n^2 = n(n-1)/2$. Вона значно зростає із ростом кількості розміщуваних кругів.

Для поліпшення результатів застосовується метод мультистарта, де на кожній спробі як вихідне вибирають значення функції цілі R_{best}.

3.3 Опис програми

Програмне забезпечення реалізовано на PC з процесором Intel Core i5 750 2.5 GHz та оперативною пам'яттю 6 GB.

Програма має таку структуру:

– модуль вихідних даних;

– модуль оптимізації I (задача (3.1) – (3.5));

– модуль інтерфейсу IPOPT;

– модуль оптимізації II (задача (2.3), (2.4));

– модуль оптимізації III (задача (3.10) – (3.14));

– модуль перебудови конфігурації кругів (блок алгоритму ADPC «Нова конфігурація»);

– модуль графічної візуалізації;

– модуль декомпозиції.

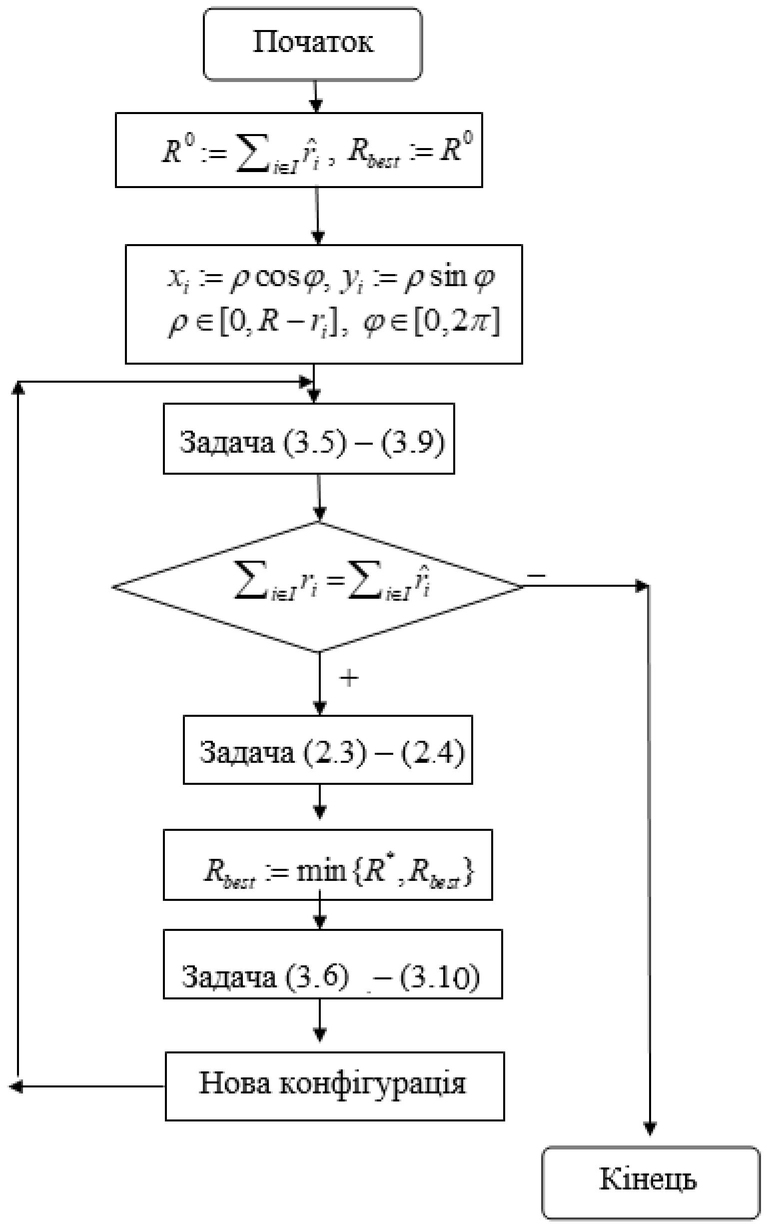

Рисунок 3.1 – Блок-схема алгоритму ADPC

Для зменшення кількості нелінійних обмежень пропонується декомпозиція відповідних задач нелінійного програмування на підзадачі. Декомпозиція ґрунтується на геометричних властивостях задачі. Більшість таких обмежень не є активними, через те що більшість кругів, за винятком 3-5 кругів, знаходяться на певній відстані один від одного. Оцінюючи цю відстань, можна тимчасово виключити такі обмеження із розгляду, одночасно забезпечивши їх виконання завдяки додатковим обмеженням, кількість яких дорівнює кількості кругів. Тобто замість частини обмежень додаємо n обмежень на параметри розміщення (поточні координати центрів) кругів :

$$(x_i - x_i^0)^2 + (y_i - y_i^0)^2 \le \rho^2,\ i \in I,$$

тобто можливою є трансляція круга $C_i(u_i^0)$ на відстань, яка не перевищує ρ.

Завдяки цьому, у відповідних системах обмежень можна не розглядати ті нерівності, для яких відстань між кругами $C_i(u_i^0)$ та $C_j(u_j^0)$ більше, ніж 2ρ.

Враховуючи, що ми вводимо додаткові обмеження, ми в результаті розв’язання задачі ми можемо не отримати локальний мінімум, але функція цілі буде меншою. Повторюючи цей процес, ми можемо наблизитись до локального екстремуму. Завжди є можливість перевірити оптимальність задачі в деякому околі отриманої точки, аналізуючи активність основних і додаткових обмежень. Якщо додаткові обмеження є неактивними, то ми маємо локальний мінімум.

Висновки за розділом 3

У розділі 3 розглянуто середовище Embarcadero та алгоритм розв’язання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері. Система Embarcadero була обрана завдяки своїм потужним інструментам для розробки програмного забезпечення, що дозволяє ефективно реалізовувати складні алгоритми та моделі. Embarcadero Technologies пропонує інструменти для розробників додатків та фахівців з баз даних, включаючи RAD Studio, Delphi, C++Builder, InterBase та RAD Server. Ці інструменти дозволяють проектувати, створювати та керувати системами на різних платформах та мовах програмування.

Для розв’язання задач нелінійного програмування використовується солвер IPOPT (Interior Point OPTimizer), який ефективний для сильно розріджених матриць та дозволяє обчислювати локальні екстремуми задач нелінійного програмування. IPOPT ґрунтується на методі внутрішніх точок та лінійному пошуку, використовуючи спеціальні фільтри для ефективного розв’язання задач з лінійними та квадратичними функціями.

Алгоритм ADPC (Algorithm for Dense Packing of Circles) включає вибір початкового значення радіуса контейнера, мінімізацію радіуса для отримання локального мінімуму та перехід від одного локального мінімуму до іншого

Програмне забезпечення включає модулі вихідних даних, оптимізації, інтерфейсу IPOPT, перебудови конфігурації кругів та графічної візуалізації. Для зменшення кількості нелінійних обмежень пропонується декомпозиція задач нелінійного програмування на підзадачі, що ґрунтується на геометричних властивостях задачі. Це дозволяє тимчасово виключити неактивні обмеження, забезпечуючи їх виконання додатковими обмеженнями.

Середовище Embarcadero та алгоритм ADPC забезпечують ефективне розв’язання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері, використовуючи потужні інструменти розробки та сучасні методи нелінійного програмування.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ІХ АНАЛІЗ

4.1 Тестові приклади

Для перевірки ефективності роботи алгоритму обрано набір тестів, який було запропоновано на конкурсі-змаганні з розв’язання задачі «Щільної упаковки кругів в круг мінімального радіусу» [18]. Тести містять 50 різноманітних прикладів для 10, 20, 30, 40, 50 кругів (по 10 у кожній групі). Частина з них – для рівних кругів. Незважаючи на те що, алгоритм ADPC не призначений для розміщення однакових кругів, всі обчислення також виконано і для таких прикладів.

Результати отриманих мінімальних значень радіусів кругів підсумовано в таблиці 4.1 (10 та 20 кругів), таблиці 4.2 (30 та 40 кругів) та таблиці 4.3 (50 кругів.

Таблиця 4.1 – Порівняння значень мінімального радіусу для різних алгоритмів для 10 та 20 кругів

$n=10$	[18]	ADPC	$n=20$	[18]	ADPC
1	112.6834	112.4122	11	352.2699	347.4748
2	106.3382	105.6235	12	253.1071	247.8676
3	89.7233	89.5226	13	376.9047	373.8487
4	128.2171	127.9036	14	309.6699	305.2110
5	114.4758	113.9807	15	330.9243	325.0208
6	263.6416	261.7922	16	151.6510	147.2579
7	179.7150	177.9781	17	155.8167	153.6656
8	222.8880	222.7283	18	159.7018	155.8554
9	237.7988	236.8511	19	141.9048	140.1990
10	259.9659	259.8814	20	149.7983	147.2549

Таблиця 4.2 – Порівняння значень мінімального радіусу для різних алгоритмів для 30 та 40 кругів

$n = 30$	[18]	ADPC	$n = 40$	[18]	ADPC
21	583.3809	580.4083	31	673.8575	667.3519
22	142.5936	142.5487	32	171.0084	170.9730
23	180.0141	174.8972	33	213.3106	206.5485
24	172.6512	168.1371	34	217.5629	210.5492
25	200.9670	195.5410	35	209.1118	203.6302
26	183.4494	178.6860	36	217.4203	210.3170
27	386.2437	376.6368	37	438.6893	427.4340
28	395.0279	387.3530	38	476.3025	459.9940
29	414.7847	405.4972	39	468.6423	453.8548
30	398.8381	391.3521	40	455.6558	447.7363

Таблиця 4.3 – Порівняння значень мінімального радіусу для різних алгоритмів для 50 кругів

$n = 50$	[18]	ADPC
41	754.5832	747.6512
42	199.3632	198.6887
43	229.3323	221.7444
44	240.5850	234.7713
45	237.2075	228.4899
46	246.2037	237.9862
47	524.9102	506.5949
48	548.6357	531.6156
49	582.1344	563.1671
50	541.1383	525.4294

Як видно із табличних даних усі результати, отримані за допомогою алгоритму [18], поліпшені алгоритмом ADPC. Час обчислення був обмежений часом обчислення відповідних тестових прикладів, наведеним у [18]. Середній час склав 10 секунд для 10 кругів, 35 секунд для 20 кругів, 65 секунд для 40 кругів, 120 секунд для 40 кругів та 200 секунд для 50 кругів. Хоча ADCP поступається повній версії Jump-Algorithm, у якого значно складніша структура алгоритму та є адаптивний пошук мінімального значення відкритого параметру і відповідно обчислювальна складність, розроблений алгоритм дає змогу отримувати прийнятні за якістю розв’язки за невеликий час.

Ілюстрація отриманих конфігурацій кругів наведено на рис. 4.1 (10 кругів), рис. 4.2 (20 кругів), рис. 4.3 (30 кругів), рис. 4.4 (40 кругів), рис 4.5 (50 кругів).

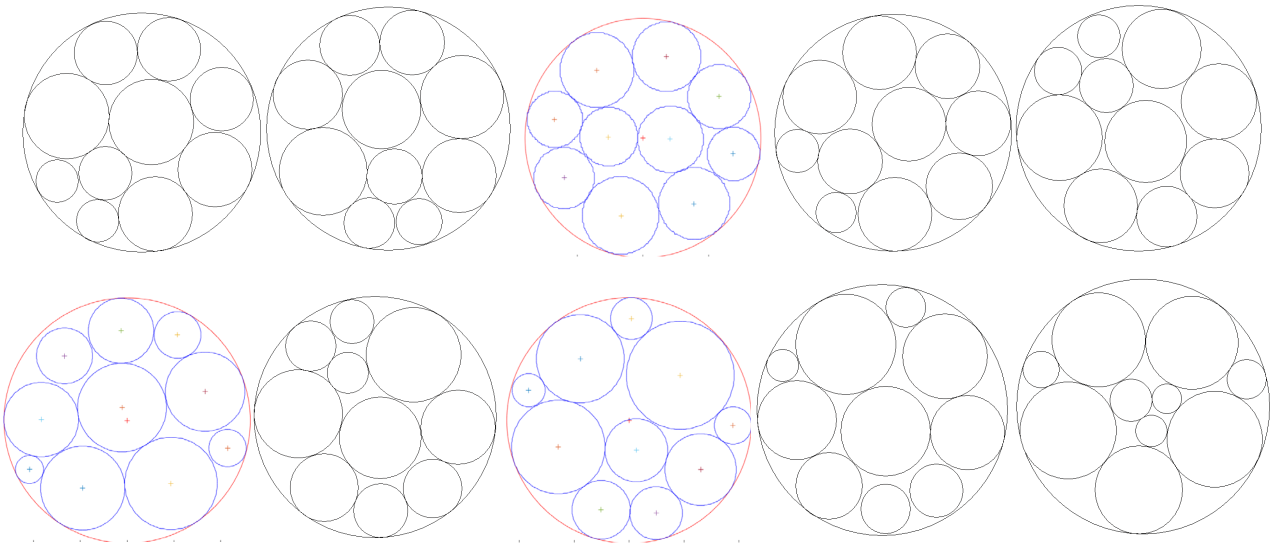

Рисунок 4.1 – Результати для тестових прикладів з 10 кругами

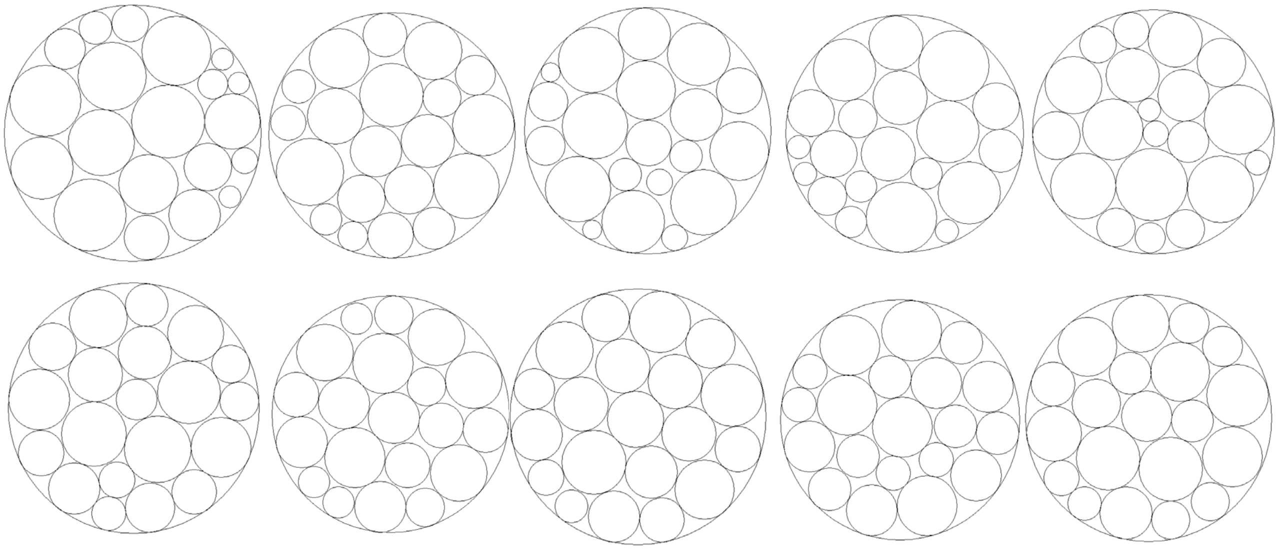

Рисунок 4.2 – Результати для тестових прикладів з 20 кругами

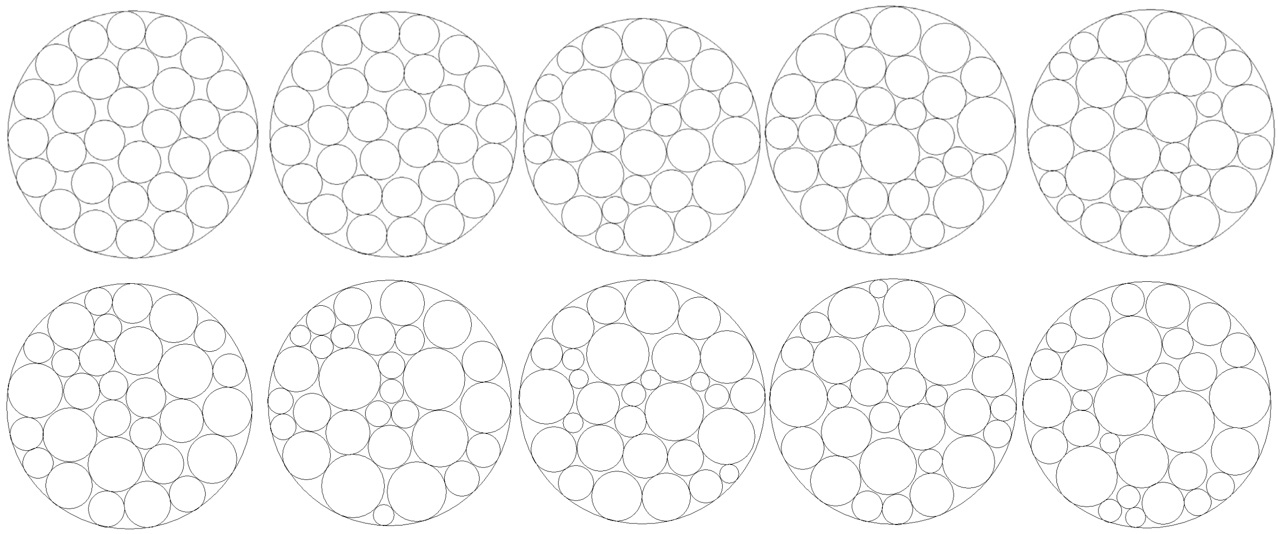

Рисунок 4.3 – Результати для тестових прикладів з 30 кругами

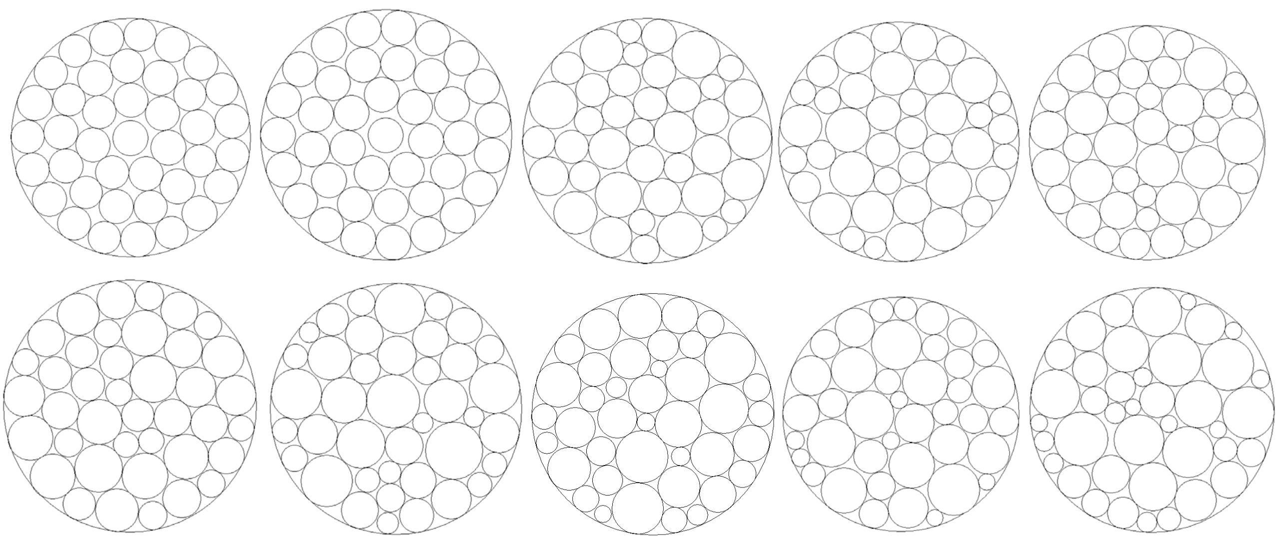

Рисунок 4.4 – Результати для тестових прикладів з 40 кругами

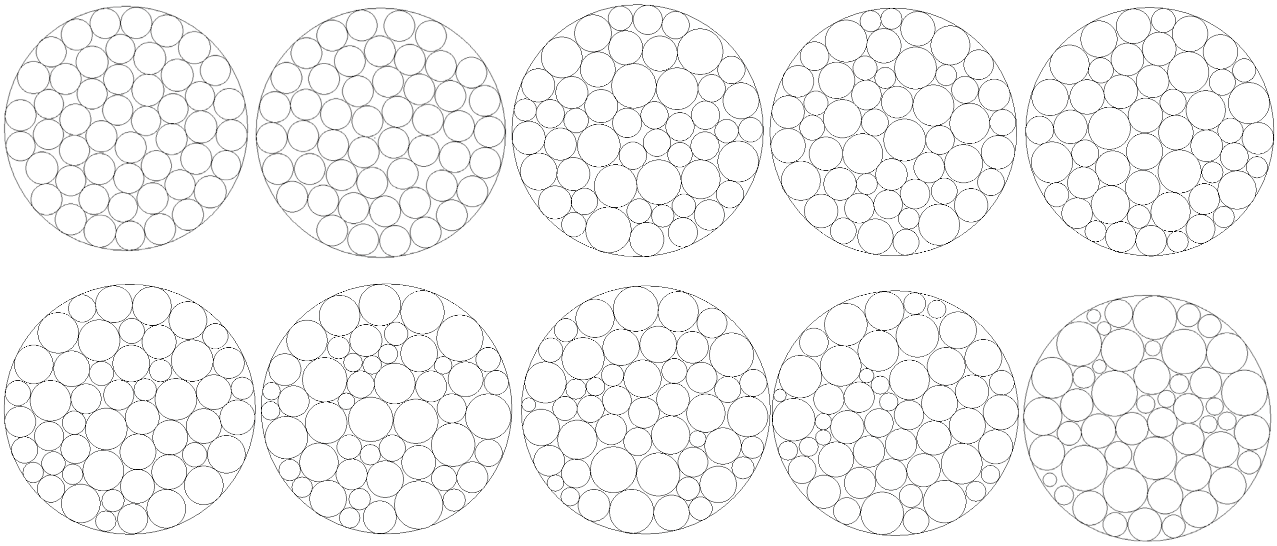

Рисунок 4.5 – Результати для тестових прикладів з 50 кругами

4.2 Аналіз отриманих результатів

Алгоритм ADPC здатний знаходити ліпші рішення за коротший час. Порівняно з класичними підходами, які часто вимагають значних обчислювальних ресурсів та часу для отримання рішення, ADPC надає швидші результати, суттєво не втрачаючи, що робить його ефективнішим у задачах реального застосування.

Зважаючи на отримані результати, алгоритм ADPC також показує гнучкість у масштабуванні з кількістю об'єктів. Зокрема, час обчислення збільшується у разі зростання числа кругів, але це відбувається в межах, які залишаються практичними для використання в умовах реальних задач. За таких обставин ADPC може бути розглянутий як оптимальний вибір для задач, де час обчислення є критичним фактором.

Хоча ADPC і поступається більш просунутій версії Jump Algorithm, яка має складнішу структуру та адаптивний пошук мінімального значення відкритого параметру, розроблений алгоритм забезпечує прийнятні за якістю розв’язки за значно коротший час. Це робить його особливо цінним для застосувань, де важлива швидкість обчислень і де необхідно швидко отримати якісні рішення без використання складних обчислювальних моделей.

Більш того, простота реалізації алгоритму та можливість його швидкої адаптації до нових умов роблять ADPC зручним інструментом для широкого спектра застосувань у виробничих процесах, логістиці та інших галузях, де необхідно ефективно використовувати обмежений простір. Враховуючи його здатність швидко адаптуватися до різних умов і зберігати високу ефективність, цей алгоритм може бути корисним у численних прикладних задачах, таких як оптимізація складування, планування ресурсів, управління виробничими процесами та інші.

Висновки за розділом 4

У розділі 4 представлено результати обчислювального експерименту та їх аналіз. Для перевірки ефективності роботи алгоритму ADPC було обрано набір тестів, запропонованих на конкурсі-змаганні з розв’язання задачі «Щільної упаковки кругів в круг мінімального радіусу». Результати обчислень показали, що алгоритм ADPC поліпшує мінімальні значення радіусів контейнерів порівняно з іншими алгоритмами.

Порівняно з класичними підходами, які часто вимагають значних обчислювальних ресурсів та часу для отримання рішення, алгоритм ADPC надає швидші результати, суттєво не втрачаючи в якості, що робить його ефективнішим у задачах реального застосування.

Зважаючи на отримані результати, алгоритм ADPC також показує гнучкість у масштабуванні з кількістю об'єктів. Час обчислення збільшується у разі зростання числа кругів, але це відбувається в межах, які залишаються практичними для використання в умовах реальних задач. За таких обставин ADPC може бути розглянутий як оптимальний вибір для задач, де час обчислення є критичним фактором.

Хоча ADPC і поступається більш просунутій версії Jump Algorithm, яка має складнішу структуру та адаптивний пошук мінімального значення відкритого параметру, розроблений алгоритм забезпечує прийнятні за якістю розв'язки за значно коротший час. Це робить його особливо цінним для застосувань, де важлива швидкість обчислень і де необхідно швидко отримати якісні рішення без використання складних обчислювальних моделей.

Простота реалізації алгоритму та можливість його швидкої адаптації до нових умов роблять ADPC зручним інструментом для широкого спектра застосувань у виробничих процесах, логістиці та інших галузях, де необхідно ефективно використовувати обмежений простір.

Алгоритм та розроблене програмне забезпечення можуть бути корисними у численних прикладних задачах, таких як оптимізація складування, планування ресурсів, управління виробничими процесами та інші.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі було проведено дослідження задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері.

Проведено огляд і аналіз сучасного стану задачі пакування нерівних кругів в обмежених контейнерах. Було вивчено різні підходи та методи, що використовуються для розв'язання цієї задачі, а також їхні переваги та недоліки.

Виконано системний аналіз задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері. Ці моделі враховують специфіку задачі та дозволяють формалізувати процес пакування для подальшого аналізу та оптимізації.

Наведено змістовну та формальну постановку задачі, що включає визначення основних параметрів та критеріїв оптимізації. Сформульовано задачі дослідження, які необхідно вирішити для досягнення поставленої мети.

Обрано та обґрунтовано метод розв'язання задачі, що включає аналіз можливих підходів та вибір найефективнішого з них. Запропоновано новий метод спрямованого перебору локальних екстремумів, який ґрунтується на ідеї гомотетичних перетворень об'єктів і дозволяє отримати наближення до глобального екстремуму.

Для математичного та комп'ютерного моделювання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері обрано Розглянуто середовище Embarcadero, яке пропонує потужні інструменти для розробників додатків та фахівців з баз даних. Це дозволяє проєктувати, створювати та керувати системами на різних платформах та мовах програмування.

Розроблено алгоритм ADPC (Algorithm for Dense Packing of Circles), який включає вибір початкового значення радіуса контейнера, мінімізацію радіуса для отримання локального мінімуму та перехід від одного локального мінімуму до іншого. Програмне забезпечення включає модулі вихідних даних, оптимізації, інтерфейсу IPOPT, перебудови конфігурації кругів та графічної візуалізації.

Результати обчислювального експерименту показали, що алгоритм ADPC поліпшує мінімальні значення радіусів контейнерів порівняно з іншими алгоритмами. Алгоритм ADPC надає швидші результати, суттєво не втрачаючи в якості, що робить його ефективнішим у задачах реального застосування.

Результати кваліфікаційної роботи можна застосовувати для оптимізації використання простору в різних галузях, таких як виробництво, дизайн та обчислювальна геометрія. Це дає змогу ефективніше використовувати наявні ресурси та зменшити витрати. Алгоритм ADPC також показує гнучкість у масштабуванні з кількістю об'єктів, що робить його оптимальним вибором для задач, де час обчислення є критичним фактором.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вдосконалення запропонованих методів та алгоритмів, розширення їх застосування на інші типи задач пакування та оптимізації, а також інтеграцію з іншими сучасними технологіями та інструментами.

Розроблені методи та алгоритми можуть бути використані в освітніх цілях для підготовки фахівців у галузі прикладної математики, інформатики та інженерії, що сприятиме розвитку їхніх навичок у розв’язанні практичних задач. Також вони можуть бути корисними для розробки нових програмних продуктів та інструментів для автоматизації процесів пакування та оптимізації використання простору в різних галузях промисловості.

Таким чином, результати роботи демонструють високу ефективність запропонованих методів та алгоритмів для розв’язання задачі оптимізації пакування нерівних кругів у круговому контейнері, що має значний потенціал для практичного застосування у різних галузях.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Удоденко В. Ю. Mathematical and computer modeling of optimization for unequal circle packing. *III Міжнародна науково-практична конференція «Навчання і викладання: у світі після війни»* (м. Харків, 08 листопада 2024 р.) : зб. матеріалів конференції. Харків : Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди, 2024. 248 с.

2. Пакування сферичних об’єктів: моделі, методи, застосування / Ю. Г. Стоян, Г. М. Яськов, Т. Є. Романова, С. В. Яковлев. Київ : Наукова думка, 2021. 279 с.

3. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математичні моделі й оптимізаційні методи геометричного проєктування : монографія. Київ : Наук. думка, 1986. 267 с.

4. Стоян Ю. Г., Романова Т. Є., Чернов Н. І., Панкратов О. В. Повний клас Ф-функцій для базових об’єктів. *Доповіді НАН України*. 2010. № 12. С. 25–30.

5. Scheithauer G., Stoyan Yu. G., Romanova T. Ye. Mathematical modeling of interactions of primary geometric 3D objects. Cybernetics and Systems Analysis. 2005. Vol. 41. P. 332–342.

6. Optimized object packings using quasi-phi-functions / Stoyan Y., Romanova T., Pankratov A., Chugay A. Optimized Packings with Applications. Fasano G., Pintér J. (Eds). *Springer Optimization and Its Applications*. Cham : Springer, 2015. Vol. 105. P. 265–293.

7. Stoyan Y. G, Chugay A. M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. *Advances in Decision Sciences*. 2014. Vol. 2014. P. 1–19.

8. Pankratov A. V., Romanova T. E., Chugay A. M. Optimal packing of convex polytopes using quasi-phi-functions. *Проблеми машинобудування*. Харків, 2015. Т. 18, № 2. P. 55–65.

9. Waescher G., Haussner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*. 2007. Vol. 183. P. 1109–1130.

10. Ye T., Huang W., Lu Z. Iterated Tabu Search Algorithm for Packing Unequal Circles in a Circle. *ArXiv*. 2013. No. 1306.0694. P. 1–30.

11. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container / Huang W. Q., Li Y., Akeb H., Li C. M. *Journal of the Operational Research Society*. 2005. Vol. 56. P. 539–548.

12. Al-Mudahka I., Hifi M., M'Hallah R. Packing circles in the smallest circle: an adaptive hybrid algorithm. *J Oper Res Soc*. 2011. Vol. 62. P. 1917–1930.

13. Solving the problem of packing equal and unequal circles in a circular container / Grosso A., Jamali A. R. M. J. U., Locatelli M. et al. *J Glob Optim*. 2010. Vol. 47. P. 63–81.

14. Castillo I., Kampas F. J., Pintér J. D. Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications. *European Journal of Operational Research*. 2008. Vol. 191. P. 786–802.

15. Ambrosino D, Xie H. Machine Learning-Based Optimization Models for Defining Storage Rules in Maritime Container Yards. *Modelling*. 2024. Vol.5(4). P. 1618–1641.

16. Flores J. J., Martínez J., Calderón F. Evolutionary computation solutions to the circle packing problem. *Soft Computing*. 2016. Vol. 20. P. 1521–1535.

17. Wächter A., Biegler L. T. On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106. P. 25–57.

18. Zadorozhnyi B., Mitsa O., Stetsyuk P. On the Improvement of the Heuristic Algorithm for Packing Circles into a Circle of Minimum Radius. *Cybernetics and Computer Technologies*. 2023. No. 2. P. 32–45.

19. Müller, A. Schneider J. J., Schömer E. Packing a multidisperse system of hard disks in a circular environment. *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 79. P. 021102.

20. Zhou J., He J., He K. Solution-Hashing Search Based on Layout-Graph Transformation for Unequal Circle Packing. *ArXiv*. 2024. Vol. 2403.06211. P. 1 – 33.

21. Stoyan Y., Yaskov G. Packing unequal circles into a strip of minimal length with a jump algorithm. *Optim Lett*. 2014. Vol. 8. P. 949–970.

22. Miyazawa F.K., Wakabayashi Y. Techniques and results on approximation algorithms for packing circles. *São Paulo J. Math. Sci*. 2022. Vol. 16. P. 585–615.

23. Gold C. M., Remmele P. R., Roos T. Voronoi methods. *Algorithmic Foundations of Geographic Information Systems GIS*. Van Kreveld M., Nievergelt J., Roos T., Widmayer P. (Eds). CISM School 1996. Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg : Springer, 1997. Vol. 1340. P. 21–35.