УДК 621.391:51.142

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-СУММАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ В ГПВЯ

ЧУМАЧЕНКО С.В.

Развивается подход к суммированию рядов в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром (ГПВЯ). Путем доказательства теорем, имеющих теоретическое и практическое значение, определяются решения интегро-сумматорных уравнений и систем сложной структуры.

Введение

Методы ГПВЯ представляют как теоретический, так и практический интерес. Математические модели, основанные на ГПВЯ, используются при распознавании образов [1], в цифровой обработке данных [2], при сжатии изображений [3], в компьютерной графике [4]. Названные направления описываются относительно новым математическим аппаратом – теорией вейвлетов [1]. Методы ГПВЯ являются основой для точного инкрементного (пошагового) обучения [5], статистической теории обучения [6, 7]. На основе отдельных положений теории ГПВЯ [8] предлагается новый подход к определению значений некоторых типов рядов – метод суммирования рядов по выборочным значениям. С его использованием получены новые результаты для рядов [9], доказаны некоторые интегральные тождества [10], решены сумматорные и интегральные уравнения [11], а также показана возможность его применения в задачах расчета антенных решеток при определении амплитудных коэффициентов [12, 13].

В данной работе предлагается решение интегро-сумматорных уравнений и систем на основе теории ГПВЯ, что является востребованным, например, в задачах радиофизики, а также представляет чисто математический интерес.

1. Постановка цели и задач исследования

В [10] были обозначены перспективы исследования, касающиеся методов ГПВЯ. Среди них – решение сумматорных уравнений, в том числе кратных; интегральных и двойных интегральных уравнений; интегро-сумматорных уравнений; систем дуальных сумматорных уравнений; систем парных интегральных уравнений.

Цель данного исследования – определить решения для некоторых интегро-сумматорных уравнений и систем с использованием метода суммирования рядов в ГПВЯ.

Задачи исследования заключаются в доказательстве теорем, определяющих решения двух интегро-сумматорных уравнений и трех систем сложной структуры.

2. Новые теоремы для развития метода суммирования рядов в ГПВЯ

Теорема 1. *Система интегро-сумматорных уравнений*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} F_k(x,y)y^{\alpha}dy = g(x,\beta),\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$\beta=\alpha\nu,\ \alpha>0,\ \nu>0,\ 0<\beta<\infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty} F_k(x,y)dy = 0,\quad x>1 \tag{2}$$

имеет решение

$$F_k(x,y)=\frac{\varepsilon_k\beta}{\beta+k}\frac{\sin\pi(\beta-k)}{\pi(\beta-k)}J_{\nu}(xy)f(y), \tag{3}$$

где $f(y)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha/2)}(2y)^{1-\alpha/2}\displaystyle\int_0^1 t^{1+\alpha/2}J_{\nu+\frac{\alpha}{2}}(yt)dt\times$

$$\times\int_0^1 g(wt)w^{\nu+1}(1-w^2)^{\alpha/2-1}dw, \tag{4}$$

при условии, что $g(x,\beta)$ *разлагается в ряд по выборочным значениям в ГПВЯ* H_3 [8].

Доказательство. Подставим решение (3) в систему (1)-(2) с учетом разложения правой части (1) в ряд по выборочным значениям в ГПВЯ H_3:

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon_k\beta}{\beta+k}\frac{\sin\pi(\beta-k)}{\pi(\beta-k)}J_{\nu}(xy)f(y)y^{\alpha}dy=\\ =\sum_{k=0}^{\infty}g(x,k)\frac{\varepsilon_k\beta}{\beta+k}\frac{\sin\pi(\beta-k)}{\pi(\beta-k)},\ 0<x<1,\\ \beta=\alpha\nu,\ \alpha>0,\ \nu>0,\ 0<\beta<\infty,\end{gathered} \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon_k\beta}{\beta+k}\frac{\sin\pi(\beta-k)}{\pi(\beta-k)}J_{\nu}(xy)f(y)dy=0,\ x>1\ . \tag{6}$$

Перепишем (5), (6) в виде

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k\beta}{\beta+k}\frac{\sin\pi(\beta-k)}{\pi(\beta-k)}\int_0^{\infty}J_{\nu}(xy)f(y)y^{\alpha}dy=\\ =\sum_{k=0}^{\infty}g(x,k)\frac{\varepsilon_k\beta}{\beta+k}\frac{\sin\pi(\beta-k)}{\pi(\beta-k)},\ 0<x<1,\\ \beta=\alpha\nu,\ \alpha>0,\ \nu>0,\ 0<\beta<\infty,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k\beta}{\beta+k}\frac{\sin\pi(\beta-k)}{\pi(\beta-k)}\int_0^{\infty}J_{\nu}(xy)f(y)dy=0,\ x>1\ . \tag{8}$$

Потребуем почленного равенства в (7) и (8) при $k=0,1,2,...$:

$$\int_0^{\infty}J_{\nu}(xy)f(y)y^{\alpha}dy=g(x,k),\ 0<x<1, \tag{9}$$

$$\beta=\alpha\nu,\ \alpha>0,\ \nu>0,\ 0<\beta<\infty,$$

$$\int_0^\infty J_\nu(xy)f(y)dy=0,\ x>1\ . \qquad (10)$$

Согласно [14, с. 88, ф-ла (77)], система (9), (10) имеет решение (4). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Интегро-сумматорное уравнение*

$$\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty A_k(x,y)\mathrm{sh}(xy)dy=f(x),\ 0<x<\infty \qquad (11)$$

имеет решение

$$A_k(x,y)=-\frac{2}{\pi x}kf(k)\sin\pi(x-k)e^{-yk} \qquad (12)$$

при условии, что $f(x)$ *– известная функция из ГПВЯ* H_3 [**8**].

Доказательство. Подставим решение (12) в уравнение (11) с учетом разложения правой части (11) в ряд по выборочным значениям в ГПВЯ:

$$\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty(-\frac{2}{\pi x})kf(k)\sin\pi(x-k)e^{-yk}\mathrm{sh}(xy)dy=$$

$$=\sum_{k=1}^\infty f(k)\frac{2k}{x+k}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)},0<x<\infty\ . \qquad (13)$$

Перепишем (13) в виде:

$$\sum_{k=1}^\infty(-\frac{2}{\pi x})kf(k)\sin\pi(x-k)\int_0^\infty e^{-yk}\mathrm{sh}(xy)dy=$$

$$=\sum_{k=1}^\infty f(k)\frac{2k}{x+k}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)},\ 0<x<\infty\ . \qquad (14)$$

Требуя в (4) почленного равенства при $k=1,2,3,\ldots$, получаем соотношение:

$$\int_0^\infty e^{-yk}\mathrm{sh}(xy)dy=\frac{x}{k^2-x^2},\ 0<x<\infty\ , \qquad (15)$$

которое известно как преобразование Лапласа функции $\mathrm{sh}(xy)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Интегро-сумматорное уравнение*

$$\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty dw\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}dtA_k(x,w,t)\frac{I_\nu(xt)K_\nu(wt)}{w^2-k^2}=f(x), \qquad (16)$$

где $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ *– модифицированные функции Бесселя 1-го и 3-го рода соответственно;* $0<x<\infty$, $0<w<\infty$, *имеет решение*

$$A_k(x,w,t)=-i2\sqrt{x}\frac{kf(k)}{\pi^2}t\sqrt{w}\sin\pi(w-k) \qquad (17)$$

при условии, что функция $f(x)$ *известна и принадлежит ГПВЯ* H_3.

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости решения (17), подставим его в уравнение (16):

$$\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty dw\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}dt[-i2\sqrt{x}\frac{kf(k)}{\pi^2}t\sqrt{w}\sin\pi(w-k)]\times$$

$$\times\frac{I_\nu(xt)K_\nu(wt)}{w^2-k^2}=f(x). \qquad (18)$$

Поскольку $f(x)$ из ГПВЯ, она представима в виде ряда по выборочным значениям. С учетом этого имеем:

$$\sum_{k=1}^\infty\int_0^\infty dw\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}dt[-i2\sqrt{x}\frac{kf(k)}{\pi^2}t\sqrt{w}\sin\pi(w-k)]\times$$

$$\times\frac{I_\nu(xt)K_\nu(wt)}{w^2-k^2}=\sum_{k=1}^\infty f(k)\frac{2k}{x+k}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}\ . \qquad (19)$$

Перепишем (19) в виде:

$$\sum_{k=1}^\infty(-i2\sqrt{x})\frac{kf(k)}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{dw\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}\times$$

$$\times\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}dtI_\nu(xt)K_\nu(wt)t=\sum_{k=1}^\infty f(k)\frac{2k}{x+k}\frac{\sin\pi(x-k)}{\pi(x-k)}\ . \qquad (20)$$

Требуя почленного равенства в (20) при $k=1,2,3,\ldots$, получаем интегральное тождество

$$\int_0^\infty\frac{\sqrt{w}\sin\pi(w-k)}{w^2-k^2}dw\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}tI_\nu(xt)K_\nu(wt)dt=$$

$$=\frac{i\pi\sin\pi(x-k)}{\sqrt{x}(x^2-k^2)}, \qquad (21)$$

которое доказано в работе [**10**]. Таким образом, теорема 3 справедлива.

Теорема 4. *Система интегро-сумматорных уравнений*

$$\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty dz\int_0^\infty dy\Phi_n(s,y,z)\sin(nz)J_n(yx)=F(s), \qquad (22)$$

$$0<x<1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty dz\int_0^\infty ydy\Phi_n(s,y,z)\sin(nz)J_n(yx)=0, \qquad (23)$$

$$1<x<\infty,$$

где $F(s)$ *– заданная функция из ГПВЯ,* $s>0$, *имеет решение*

$$\Phi_n(s,y,z)=\frac{2nF(n)R(n,s)\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)x^nz}g_n(y)e^{-sz}, \qquad (24)$$

где $$g_n(y)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)}\left(\frac{2}{y}\right)^{1/2}J_{n+\frac{1}{2}}(y), \qquad (25)$$

$$R(n,s)=(\mathrm{arctg}\frac{n}{s})^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку F(s) − функция из ГПВЯ, представим ее в виде ряда по выборочным значениям:

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\frac{2n\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)}. \qquad (26)$$

С учетом выражений (24) и (26) система (22), (23) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}dz\int_0^{\infty}dy\frac{2nF(n)R(n,s)\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)x^nz}\times$$

$$\times g_n(y)e^{-sz}\sin(nz)J_n(yx)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\frac{2n\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)},\ 0<x<1, \qquad (27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}dz\int_0^{\infty}ydy\frac{2nF(n)R(n,s)\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)x^nz}\times$$

$$\times g_n(y)e^{-sz}\sin(nz)J_n(yx)=0,1<x<\infty. \qquad (28)$$

Потребуем почленного равенства в (27), (28) при $n=1,2,3,...$:

$$\int_0^{\infty}dz\int_0^{\infty}dy\frac{2nF(n)R(n,s)\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)x^nz}\times$$

$$\times g_n(y)e^{-sz}\sin(nz)J_n(yx)=$$

$$=F(n)\frac{2n\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)},\ 0<x<1, \qquad (29)$$

$$\int_0^{\infty}dz\int_0^{\infty}ydy\frac{2nF(n)R(n,s)\sin\pi(s-n)}{\pi(s^2-n^2)x^nz}\times$$

$$\times g_n(y)e^{-sz}\sin(nz)J_n(yx)=0,\ 1<x<\infty. \qquad (30)$$

Выполнив сокращение одинаковых не равных нулю выражений в обеих частях (29), а также в левой части (30), получим:

$$\frac{R(n,s)}{x^n}\int_0^{\infty}e^{-sz}z^{-1}\sin(nz)dz\int_0^{\infty}g_n(y)J_n(yx)dy=1, \qquad (31)$$

$$0<x<1,$$

$$R(n,s)\int_0^{\infty}e^{-sz}z^{-1}\sin(nz)dz\int_0^{\infty}g_n(y)J_n(yx)ydy=0, \qquad (32)$$

$$1<x<\infty.$$

Нетрудно видеть, что система (31), (32) представляет собой произведение системы интегральных уравнений

$$\int_0^{\infty}g_n(y)J_n(yx)dy=x^n,\ 0<x<1, \qquad (33)$$

$$\int_0^{\infty}yg_n(y)J_n(yx)dy=0,\ 1<x<\infty,\ n=1,2,3,..., \qquad (34)$$

решением которой согласно [**15,** с. 111] является функция (4), и интеграла

$$\int_0^{\infty}e^{-sz}z^{-1}\sin(nz)dz,\ n>0,\ s>0, \qquad (35)$$

для которого известно представление [**9**, с. 65]:

$$\int_0^{\infty}e^{-sz}z^{-1}\sin(nz)dz=(\operatorname{arctg}\frac{n}{s})^{-1},\ n>0,\ s>0.$$

Таким образом, теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Система интегральных уравнений*

$$\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}y^{\alpha}\Phi(y,z,t)J_{\nu}(xy)dy=G(x,t), \qquad (36)$$

$$0<x<1,\ -\infty<t<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}\Phi(y,z,t)J_{\nu}(xy)dy=0,\ x>1 \qquad (37)$$

имеет при $\alpha>0$ *решение*

$$\Phi(y,z,t)=f(y)F(z)\frac{\sin\pi(t-z)}{\pi(t-z)} \qquad (38)$$

при условии, что

$$G(x,t)=g(x)F(t), \qquad (39)$$

где $g(x)$ *и* $F(t)$ − *известные функции, причем* $F(t)$ *есть функция из ГПВЯ*, а $f(y)$ − *решение пары уравнений*

$$\int_0^{\infty}y^{\alpha}f(y)J_{\nu}(xy)dy=g(x),\ 0<x<1, \qquad (40)$$

$$\int_0^{\infty}f(y)J_{\nu}(xy)dy=0,\ x>1. \qquad (41)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что (38) действительно является решением системы (36), (37). Для этого подставим (38) в (36), (37):

$$\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}y^{\alpha}f(y)F(z)\frac{\sin\pi(t-z)}{\pi(t-z)}J_{\nu}(xy)dy=G(x,t), \qquad (42)$$

$$0<x<1,\ -\infty<t<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dz\int_0^{\infty}f(y)F(z)\frac{\sin\pi(t-z)}{\pi(t-z)}J_{\nu}(xy)dy=0,\ x>1. \qquad (43)$$

Выполним эквивалентные преобразования в (42), (43):

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(z)\frac{\sin\pi(t-z)}{\pi(t-z)}dz\int_0^{\infty}y^{\alpha}f(y)J_{\nu}(xy)dy=G(x,t), \qquad (44)$$

$$0<x<1,\ -\infty<t<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(z)\frac{\sin\pi(t-z)}{\pi(t-z)}dz\int_0^{\infty}f(y)J_{\nu}(xy)dy=0,\ x>1. \qquad (45)$$

По условию теоремы F(t) есть функция из ГПВЯ, поэтому согласно [**8,** с. 9] уравнения (44), (45) переписываются в виде:

$$F(t)\int_0^\infty y^\alpha f(y)J_\nu(xy)dy = G(x,t), \qquad (46)$$

$$0 < x < 1, \; -\infty < t < \infty,$$

$$F(t)\int_0^\infty f(y)J_\nu(xy)dy = 0, \; x > 1. \qquad (47)$$

С учетом (39) система (46), (47) принимает вид:

$$F(t)\int_0^\infty y^\alpha f(y)J_\nu(xy)dy = F(t)g(t), \qquad (48)$$

$$0 < x < 1, \; -\infty < t < \infty,$$

$$F(t)\int_0^\infty f(y)J_\nu(xy)dy = 0, \; x > 1. \qquad (49)$$

Поскольку $F(t) \neq 0$, из (48), (49) следует система уравнений (40), (41), решение которой известно [**14**]:

$$f(y) = (2y)^{1-\frac{\alpha}{2}}(\Gamma(\alpha/2))^{-1}\int_0^1 \xi^{1+\frac{\alpha}{2}} J_{\nu+\frac{\alpha}{2}}(y\xi)d\xi \times$$

$$\times \int_0^1 g(w\xi)w^{\nu+1}(1-w^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}dw.$$

Теорема 5 доказана.

Выводы

Таким образом, проведенные исследования позволили получить *новые теоретические результаты* для интегро-сумматорных уравнений и систем путем доказательства теорем 1-5, которые отсутствуют в известной литературе [17, 18].

1. Полученные результаты могут быть включены в справочную математическую библиотеку и имплементированы в среду Mathematics, MathCad, MathLab. Они могут оказаться полезны математикам, инженерам и научным работникам при решении различных задач математической физики, чем определяется их *научная ценность и практическая значимость.*

2. Развитие новых технологий в микроэлектронике и схемотехнике связано с математическими расчетами и повышением быстродействия работы вычислительных устройств. CPU, являясь универсальным вычислителем, способен решать широкий спектр задач, связанных с различными областями человеческой деятельности. Тем не менее, существуют узкие места, где процессор не удовлетворяет пользователя по быстродействию. Такими являются математические задачи, где требуется большое количество итераций, а значит и времени для достижения требуемой точности результата.

3. Чтобы повысить эффективность решения расчетных задач, используются математические сопроцессоры, в которые закладываются наиболее эффективные методы решения уравнений, интегралов, взятия производных. Естественно, что при открытии новых методов, повышающих точность решения математической и расчетной задачи, а также быстродействие ее реализации, их необходимо имплементировать в существующие сопроцессоры или, в крайнем случае, создавать IP-cores для широкого распространения среди фирм-изготовителей кристаллов PLD, ASIC, CPU.

4. Фактически в работе развивается легко реализуемый в IP-core метод приведения задачи вычисления некоторых типов рядов к точной функции, что повсеместно используется при расчетах характеристик цифровых радио- и высокочастотных средств. При этом точность решения не имеет погрешности, а время реализации такой задачи уменьшается в десятки и сотни раз.

Литература: 1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с. **2.** *Короновский А., Храмов А.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с. **3.** *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии: Пер. с англ. М.: Триумф, 2003. 320 с. **4.** *Столиц Э., Дероуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике. Теория и приложения: Пер. с англ. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 272 с. **5.** *Sethu Vijayakumar, Hidemitsu Ogawa.* RKHS based Functional Analysis for Exact Incremental Learning / Neurocomputing : Special Issue on Theoretical analysis of real valued function classes, Vol.29, No.1-3. P.85-113, Elsevier Science (1999) / http://www-clmc.edu/sethu/research_detail.1html. **6.** *Saitoh S.* Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications // Pitman Research Notes in Mathematics. 369. 1997. Addison Wesley Longman, UK. **7.** *Saitoh S.* New Norm Type Inequalities for linear mappings // Jornal of Inequalities in Pure and Applied Mathemathics. Victoria Univ., 2003. Volume 4. Issue 3. Article 57. http: // jipam.vu.edu.au. **8.** *Функции* с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971. 256с. **9.** *Chumachenko S.V.* Summation method of selected series for IP-core design // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №3. С. 197-203. **10.** *Чумаченко С.В.* Теоремы о некоторых интегральных тождествах на основе метода суммирования рядов в ГПВЯ // Радиоэлектроника и информатика. 2004. №1. С. 113-115. **11.** *Чумаченко С.В.* Гильбертовы пространства с воспроизводящими ядрами и некоторые их применения // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №4. С. 141-144. **12.** *Чумаченко В.С., Чумаченко С.В.* Синфазне збудження решітки, утвореної плоскими напівобмеженими хвилеводами // Радіоелектроніка та інформатика. 2002. № 2. С. 15-18. **13.** *Чумаченко С.В.* Возбуждение решетки с диэлектрической пластиной // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 14-17. **14.** *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. М.: Наука, 1966. Т.2. 296с. **15.** *Дж. Джексон.* Классическая электродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 702 с. **16.** *К. Дж. Трантер.* Интегральные преобразования в математической физике. М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956. 204 с. **17.** *Шестопалов В.П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. К.: Наук. думка, 1983. 252 с. **18.** *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики

Поступила в редколлегию 12.06.04

Рецензент: д-р техн.наук, проф. Кривуля Г.Ф.

Чумаченко Светлана Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры АПВТ ХНУРЭ. Научные интересы: математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-326.