УДК. 621.396.2: 625.316.2

В.А. ТИХОНОВ, Н.В. КУДРЯВЦЕВА

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КОМБИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ НЕГАУССОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматривается синтез комбинированной модели линейного предсказания на примере обобщенной модели авторегрессии-скользящего среднего. Предлагаются выражения для параметрических спектральных оценок комбинированной модели негауссовых случайных процессов.

1. Введение

При решении ряда прикладных задач статистической радиотехники необходимо анализировать сложные случайные процессы с многомодовым спектром, состоящие из нескольких зависимых или независимых процессов. Хотя некоторые процессы с многомодовым спектром достаточно точно описываются моделями линейного предсказания, для анализа сложных составных процессов необходимы новые модели линейного предсказания. В статье рассмотрены комбинированные модели линейного предсказания, которые описывают составной процесс как целое или как смесь составляющих процессов. Они моделируют, в частности, процессы, которые состоят из различных комбинаций моделей гауссовых или негауссовых процессов [1]. Предложенные комбинированные модели описывают составляющие процессов классическими или обобщенными моделями линейного предсказания r-го ранга [2].

Целью исследования является разработка нового метода спектрального анализа комбинированных моделей линейного предсказания гауссовых и негауссовых процессов.

Задачи: вывод формул для параметрических оценок спектров комбинированных моделей; нахождение параметрических оценок спектров негауссовых процессов.

2. Комбинированные модели линейного предсказания

Возможны различные варианты применения комбинированных моделей для описания негауссовых процессов, у которых спектры второго порядка отличаются от спектров высших порядков. В качестве таких моделей используются модели авторегрессии-скользящего среднего (АРСС), авторегрессии (АР) или скользящего среднего (СС). Ошибка предсказания моделей АРСС, АР или СС может содержать информацию о негауссовых составляющих процесса, не учтенных этими моделями. Для описания ошибок предсказания можно присоединить к моделям АРСС, АР и СС обобщенные модели АРСС (ОАРСС), АР (ОАР) или СС (ОСС) [1]. Если построение комбинированных моделей начать с обобщенных моделей, т.е. моделей ОСС и ОАР, то можно выделить негауссовы и гауссовы составляющие процесса.

Ниже рассмотрен пример синтеза комбинированной модели обобщенной авторегрессии и скользящего среднего ($\text{ОАР}\times\text{СС}$), которая представляется комбинацией обобщенной модели ОАР третьего ранга и классической модели СС второго ранга. Комбинированная присоединенная модель $\text{ОАР}\times\text{СС}$ описывается разностным уравнением [1]:

$$x[t]=\sum_{i=1}^{p_3}\Phi_3^1[i]x[t-i]-\sum_{n=1}^{q_2}Q_2[n]a_2[t-n]+a_2[t], \qquad (1)$$

где $\Phi_3^1[i]$ – коэффициенты модели ОАР третьего ранга; p_3 – порядок модели ОАР; 1 – сдвиг моментной функции, по которой рассчитывались $\Phi_3^1[i]$; $Q_2[n]$ – коэффициенты модели СС второго ранга; q_2 – порядок модели СС; $a_2[t]$ – ошибки предсказания модели $\text{ОАР}\times\text{СС}$.

Уравнения для расчета параметров модели получают из условия оптимальности моделей. Оно заключается в статистической независимости ошибок предсказания для разных сдвигов времени:

$$E\{a_2[t]x[t-j]\} = E\{a_2[t]a_2[t-j]\} = 0,$$

$$E\{a_3^l[t]x[t-j]x[t-l]\} = E\{a_3^l[t]a_3^l[t-j]a_3^l[t-l]\} = 0 \ , \ 0 < j \ , \ l \geq 0 \ , \qquad (2)$$

где $a_3^l[t]$ – ошибка предсказания модели ОАР.

Параметры модели ОАР 3-го ранга вычисляются по системе уравнений, следующей из рекуррентного выражения [2]

$$m_3[j, j-l] = \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3^l[i] m_3[j-i, j-l], \ 0 < j \leq p_l, \qquad (3)$$

здесь $m_3[j, j-l]$ – моментные функции 3-го порядка при фиксированном сдвиге l.

После синтеза модели ОАР можно найти ошибку предсказания из выражения, следующего из (1):

$$x[t] - \sum_{i=1}^{p_3} \Phi_3^l[i] x[t-i] = a_3^l[t]. \qquad (4)$$

Широкополосная ошибка предсказания на выходе обеляющего ОАР фильтра будет коррелированной. Поэтому для расчета коэффициентов СС используется система уравнений [3]

$$r[j] = \left(\sum_{n=1}^{q_2} Q_2[n-j]Q_2[n] - Q_2[j] \right) \Bigg/ \left(\sum_{n=1}^{q_2} (Q_2[n])^2 + 1 \right), j = 1,2,...,q_2. \qquad (5)$$

Таким образом, уравнения (3) и (5) используются для расчета параметров комбинированной модели, а порядок моделей ОАР и СС определяется из условия их оптимальности (2).

3. Параметрическая оценка спектров комбинированной модели ОАР$\times$СС

Найдем выражения для параметрических спектров комбинированной модели ОАР$\times$СС. Уравнение (1) описывает формирующий фильтр с рациональной частотной характеристикой

$$H(\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{q_2} Q_2[n] e^{-j\omega Tn}}{\sum_{i=0}^{p_3} \Phi_3^l[i] e^{-j\omega Ti}}, \qquad (6)$$

на вход которого подается негауссов белый шум. Формирующий фильтр комбинированной модели состоит из соединенных каскадно различных комбинаций фильтров. Амплитудно-частотная характеристика линейной системы, состоящей из n каскадно соединенных фильтров, описана в [4]. Спектр r-го порядка процесса на выходе такого формирующего фильтра равен произведению r-го центрального момента m_{ra} негауссова порождающего процесса на частотные характеристики r-го порядка $A_{ri}(\omega)$:

$$P_r(\omega) = A_r(\omega) m_{r,a} = A_{r1}(\omega) \cdot ... \cdot A_{rn}(\omega) m_{ra}, \qquad (7)$$

где

$$A_{ri}(\omega) = H_i(\omega_l) \cdot ... \cdot H_i(\omega_{r-1}) H_i(-\omega_l - ... - \omega_{r-1}). \qquad (8)$$

Нулевое сечение спектральной плотности r-го порядка, определяемое условием $\omega_2, ..., \omega_{r-1} = 0$, описывается выражением

$$P_r(\omega) = |H_r(\omega)|^2 m_{r,a} = |H_{r1}(\omega)|^2 \cdot ... \cdot |H_{rn}(\omega)|^2 m_{ra}. \qquad (9)$$

Из (6)-(9), используя ОАР параметрическую оценку спектральной плотности [5] и параметрическую оценку спектра третьего порядка модели СС [3], запишем выражение для оценки спектра второго порядка комбинированной модели ОАР$\times$СС в виде

$$P_2(\omega) = D_{a_2} \mid \sum_{n=0}^{q_2} Q_2[n] e^{-j\omega Tn} \mid^2 / \mid \sum_{i=0}^{p_3^1} \Phi_3^1[i] e^{-j\omega Ti} \mid^2. \qquad (10)$$

Спектральная плотность третьего порядка представляется параметрическим выражением

$$P_3(\omega_1, \omega_2) = m_{3a_2} \frac{\sum_{n=0}^{q_2} Q_2[n] e^{-j\omega_1 Tn} \sum_{n=0}^{q_2} Q_2[n] e^{-j\omega_2 Tn} \sum_{i=0}^{q_2} Q_2[n] e^{j(\omega_1+\omega_2)Tn}}{\sum_{i=0}^{p_3^1} \Phi_3^1[i] e^{-j\omega_1 Tk} \sum_{i=0}^{p_3^1} \Phi_3^1[i] e^{-j\omega_2 Ti} \sum_{i=0}^{p_3^1} \Phi_3^1[i] e^{j(\omega_1+\omega_2)Ti}},$$

а ее нулевое сечение имеет вид

$$P_3(\omega) = m_{3a_2} K \mid \sum_{n=0}^{q_2} Q_2[n] e^{-j\omega Tn} \mid^2 / \mid \sum_{i=0}^{p_3^1} \Phi_3^1[i] e^{-j\omega Ti} \mid^2, \; K = \sum_{n=0}^{q_2} Q_2[n] / \sum_{i=0}^{p_3^1} \Phi_3^1[i].$$

Спектральная плотность присоединенных комбинированных моделей линейного предсказания представляется произведением спектральных плотностей обобщенных или классических моделей линейного предсказания.

4. Синтез комбинированной модели ОАР×СС

Методом статистического моделирования исследовалась комбинированная модель ОАР×СС негауссова процесса, полученного в виде аддитивной смеси негауссова узкополосного ОАР и гауссова широкополосного СС процессов в отношении 5/1 по мощности. Центральная частота СС составляющей процесса выбиралась равной $f_1 = 50$, а для ОАР составляющей центральная частота равнялась $f_2 = 10$ при интервале дискретизации $T = 0{,}01$. Коэффициент асимметрии негауссовой составляющей был равен $\gamma_1 = 1{,}066$, а для смеси он составлял $\gamma_1 = 0{,}8173$. На рис. 1 показан график теоретической спектральной плотности, рассчитанный по формуле (10), в предположении, что смесь является комбинированным процессом линейного предсказания с указанными выше частотами пиков составляющих.

Покажем, как комбинированная модель линейного предсказания применяется для моделирования смеси, состоящей из гауссовой и негауссовой составляющих. При построении комбинированной модели полученной негауссовой смеси вначале была построена модель ОАР(2) третьего ранга, параметры которой рассчитывались из системы уравнений (3). Так как у гауссова процесса моментная функция третьего порядка равна нулю, то коэффициенты ОАР(2) третьего ранга не зависят от гауссовой составляющей, являющейся процессом СС.

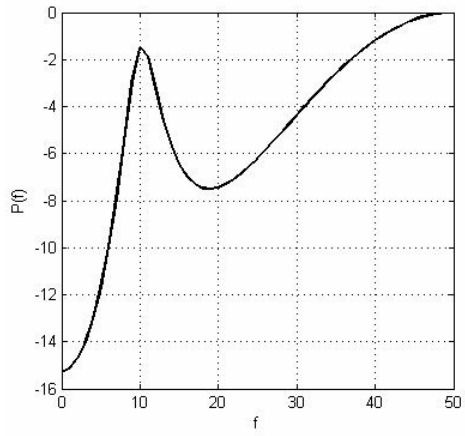

Рис. 1. Теоретический спектр комбинированной модели смеси негауссова процесса ОАР (2) и гауссова процесса СС (8)

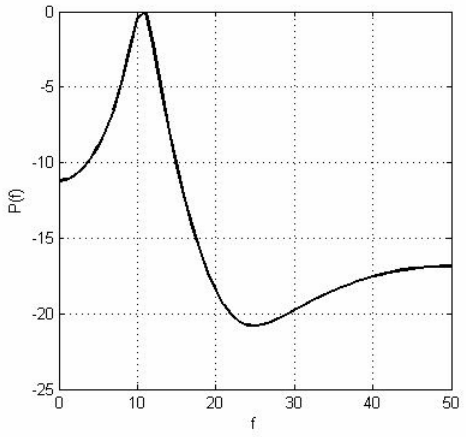

Рис. 2. Выборочный спектр смеси негауссова процесса комбинированной модели ОАРСС

Модель ОАР(2) третьего ранга использовалась для выделения ошибки предсказания $a_3^1[t]$. Для этого применялось соотношение (4). Затем для ошибки предсказания строилась модель СС(3) второго ранга, параметры которой рассчитывались с использованием (5). На рис. 2 показан график выборочной параметрической спектральной плотности, рассчитанной по комбинированной модели ОАР $\times$ СС смеси при сдвиге $1=1$. Сравнение графиков, представленных на рис. 1 и 2, показывает, что они соответствуют заданным спектрам негауссовой и гауссовой составляющих смеси. Отметим, что график на рис. 2 показывает не только спектральные характеристики смеси, но и указывает на гауссову и негауссову составляющие спектра смеси. Отличие уровней спектральных пиков от теоретических вызвано тем, что аддитивная смесь не является истинным комбинированным процессом ОАР $\times$ СС. Наличие аддитивного гауссова процесса несколько смещает выборочные оценки коэффициентов ОАР негауссова процесса, найденные по смеси. Кроме этого, необходимо учитывать, что негауссова составляющая была мощнее в 5 раз гауссовой составляющей, что также повлияло на форму выборочного спектра.

5. Заключение

Практическая значимость: предложенные модели могут быть полезны для моделирования негауссовых сигналов и помех, для выделения полезных сигналов на фоне помех и шумов, для спектрального анализа случайных процессов в присутствии помех и шумов, при решении задач линейного прогнозирования.

Научная новизна: впервые получены спектральные оценки комбинированных моделей линейного предсказания негауссовых процессов, полностью описывающихся одним разностным уравнением.

Список литературы: 1. *Тихонов В. А., Кудрявцева Н. В.* Присоединенные комбинированные модели линейного предсказания-обобщенного линейного предсказания негауссовых процессов // Радиотехника. 2008. №154. С. 152–155. **2.** *Тихонов В.А.* Обобщенная модель авторегрессии негауссовых процессов // Радиотехника. 2003. №132. С. 78–82. **3.** *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. **4.** *Гольденберг Л.М.* и др. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1985. 312 с. **5.** *Тихонов В.А*. Параметрические оценки спектров высших порядков негауссовых статистически связанных процессов // Радиоэлектроника. 2005. № 11. С. 27–39.

Поступила в редколлегию 11.09.2009

Тихонов Вячеслав Анатольевич, д-р физ.-мат.наук, проф. кафедры РЭС ХНУРЭ. Научные интересы: статистическая радиофизика, статистические модели, негауссовы процессы, экономическая статистика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-15-87.

Кудрявцева Наталья Валериевна, стажер-исследователь кафедры РЭС ХНУРЭ. Научные интересы: теория линейного предсказания, статистическая обработка сигналов, негауссовы процессы. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 702-15-87.