УДК 510.62

В. В. ШЛЯХОВ

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛИНЕЙНО-ПОРОЖДЕННЫХ ПРЕДИКАТОВ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ КОНУСЕ

Нами изучены экспериментально проверяемые условия, при выполнении которых произвольная динамическая система, заданная на положительном конусе и обследуемая методом нуль-органа [1], может быть математически описана системой интегралов со строго положительными ядрами. Такие динамические системы широко распространены в природе и технике. В подобной форме задача рассматривалась в работах [2, 3]. Однако в данной статье мы исключаем ноль как элемент положительного конуса, что ведет к некоторым принципиальным различиям в аксиоматике и в доказательстве. В целом же работа продолжает исследования, начатые в перечисленных выше статьях.

Обозначим через L_2 [0, 1] пространство суммируемых с квадратом функций на отрезке [0, 1] со стандартным скалярным произведением; через K — множество функций, принадлежащих L_2[0, 1], которые почти всюду строго больше ноля, и будем называть это множество положительным конусом.

Пусть предикат $T(x, y)$ задан на $K\times K$. Поставим задачу найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых предикат $T(x, y)$ представим в виде $T(x,y)=D\Big(\int_0^1 x(t)\times$

$$\times e_1(t)\,dt, \ldots, \int_0^1 x(t)\,e_n(t)\,dt;\ \int_0^1 y(t)\,e_1(t)\,dt, \ldots,\ \int_0^1 y(t)\,e_n(t)\,dt\Big), \quad (1)$$

где D — предикат равенства на $R^n\times R^n$; $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ — линейно независимая система функций, принадлежащая K. Такие предикаты мы будем называть положительными n-мерными линейно-порожденными.

Нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть* $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^n$ — *система линейно-независимых линейных функционалов, заданных на K и удовлетворяющих следующему свойству:*

1) *для любого* $x\in K$ *существует номер k такой, что* $\beta_k(x)>0$.

Тогда найдется невырожденная n-мерная матрица A, которая переводит данную систему в систему $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{n*}$, *обладающую свойством* $\alpha_i(x)>0$ *при любом i, x.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что для доказательства леммы необходимо просто показать, что в пересечении

---

* Здесь имеется в виду, что $\alpha_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j(x)$, где $A=(a_i{}^j)$.

линейной оболочки данной системы функционалов и положительного конуса найдутся n линейно независимых векторов. Это мы и сделаем.

Обозначим через $L=L(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — линейную оболочку. Предположим $L\cap K=\varnothing$, тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств в линейном пространстве [4] существует ненулевой линейный функционал $h(x)$ и число C такие, что $h(x)\geqslant \geqslant C$ при $x\in K$ и $h(x)\leqslant C$ при $x\in L$. Причем C не может быть меньше нуля, иначе бы функционал $h(x)$ нельзя было ограничить снизу на положительном конусе. С другой стороны, так как любой линейный функционал на K может быть сколь угодно мал, то C не может быть и строго больше нуля. Значит $C=0$. Более того, $h(x)>0$ при $x\in K$, поскольку при существовании $x_0\in K$, для которого $h(x_0)=0$, нашелся бы элемент $x_1\in K$ такой, что $h(x_1)<0$. В итоге получаем, что $h\in K$, и в то же время $\beta_i(h)\leqslant 0$ при любом i. Это противоречит условию леммы. Следовательно, $L\cap K\neq\varnothing$.

Возьмем элемент $e\in L\cap K$. Так как K—открытое множество, то e входит в K с какой-то окрестностью, и значит, для любого β_i существует $\varepsilon_i>0$ такое, что $\alpha_i=\varepsilon_i\beta_i+e\in K$. В силу линейной независимости системы $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ можно подобрать ε_i такими, чтобы система $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ тоже была линейно независима. С другой стороны, $\{\alpha_i\}_{i=1}^n\subset L\cap K$. Лемма доказана.

Сформулируем и докажем теорему об условиях существования положительных линейно-порожденных предикатов на положительном конусе.

Теорема 1. *Для того, чтобы предикат $T(x, y)$, заданный на $K\times K$, был положительным линейно-порожденным, необходимо и достаточно, чтобы он был аддитивным, n-мерным, непрерывным и удовлетворял следующему свойству:*

А) *для любых $x, y, z\in K$ из равенства $T(x+z, y+z)=1$* ***вытекает*** *$T(x, y)=1$.*

Предикат $T(x, y)$ назовем *аддитивным*, если при любых $x, y, x', y'\in K$ и условиях $T(x, y)=T(x', y')=1$ следует $T(x+ + x', y+y')=1$, $T(x+y', y+x')=1$; *n-мерным*, если существует система функций $\{a_i(t)\}_{i=1}^n\subset K$ таких, что для любого $x\in K$ найдется единственное собственное подмножество $I(x)\subset \subset\{1, \ldots, n)$ и единственный набор чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$, для которых выполняется

$$T\left(x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)\,a_i, \sum_{i\in \overline{I}(x)}\alpha_i(x)\,a_i\right)=1,$$

$\alpha_i(x) \geqslant 0$ при $i \in I(x)$ и $\alpha_i(x) > 0$ при $i \overline{\in} I(x)$; *непрерывным*, если существует точка $x_0 \in K$, в которой при любом i непрерывны $\beta_i(x)$, где

$$\beta_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x), & i \overline{\in} I(x) \\ -\alpha_i(x), & i \in I(x). \end{cases}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $T(x, y)$ определяется зависимостью (1), тогда простая проверка дает возможность убедиться в его аддитивности и в выполнении свойства A). Покажем, что он n-мерен и непрерывен.

Возьмем систему линейно-независимых векторов $\{e_i(t)\}_{i=1}^n \subset K$. Тогда для любого вектора $x \in K$ существует единственный набор чисел $\beta_i(x)$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\int_0^1 x(t) e_k(t)\, dt = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) \int_0^1 e_i(t) e_k(t)\, dt, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Здесь мы использовали то, что $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ — линейно-независима и матрица системы (2), равная матрице Грамма, имеет детерминант, не равный 0. Причем, так как $x, \{e_i(t)\}_{i=1}^n \subset K$, то множество индексов, для которых $\beta_i(x) > 0$, не пусто. Поэтому каждому $x \in K$ можно сопоставить единственное собственное подмножество $I(x) \subset \{1, \ldots, n\}$, $I(x) = \{i : \beta_i(x) \leqslant 0\}$ и единственный набор неотрицательных чисел

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} \beta_i(x), & i \overline{\in} I(x); \\ -\beta_i(x), & i \in I(x), \end{cases}$$

для которых

$$\int_0^1 x(t) e_k(t)\, dt + \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) \int_0^1 e_i(t) e_k(t)\, dt = \sum_{i \overline{\in} I(x)} \alpha_i(x) \int_0^1 e_i(t) e_k(t)\, dt,$$

$$k = \overline{1, n},$$

$$\text{т. е.} \quad T\left(x + \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) e_i, \quad \sum_{i \overline{\in} I(x)} \alpha_i(x) e_i\right) = 1,$$

$$\alpha_i(x) \geqslant 0, \ i \in I(x) \ \text{и} \ \alpha_i(x) > 0, \ i \overline{\in} I(x).$$

Функционалы $\beta_i(x)$ непрерывны в любой точке. Необходимость доказана.

Достаточность. Из n-мерности и аддитивности при произвольных $x, y \in K$ имеем

$$T\left(x+\sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x)\, a_i,\quad \sum_{i \in \bar{I}(x)} \alpha_i(x)\, a_i\right)=1; \tag{3}$$

$$T\left(y+\sum_{i \in I(y)} \alpha_i(y)\, a_i,\quad \sum_{i \in \bar{I}(y)} \alpha_i(y)\, a_i\right)=1, \tag{4}$$

$$T\left(x+y+\sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (\alpha_i(x)+\alpha_i(y))\, a_i+\sum_{i \in I(x) \setminus I(y)} \alpha_i(x) a_i+\right.$$

$$\left.+\sum_{i \in I(y) \setminus I(x)} \alpha_i(y)\, a_i\ ;\right.$$

$$\left.\sum_{i \in \bar{I}(x) \cap \bar{I}(y)} (\alpha_i(x)+\alpha_i(y)) a_i+\sum_{i \in I(x) \setminus I(y)} \alpha_i(y)\, a_i+\sum_{i \in I(y) \setminus I(x)} \alpha_i(x) a_i\right)=1, \tag{5}$$

где через $\bar{I}(x)$ мы обозначили $\{1, \ldots, n\} \setminus I(x)$ и использовали равенство $I(x) \setminus I(y)=\bar{I}(y) \setminus \bar{I}(x)$.

Введем теперь следующие множества:

$$N_1=\{i \in I(x) \setminus I(y) : \alpha_i(x) \geqslant \alpha_i(y)\};$$
$$N_2=\{i \in I(x) \setminus I(y) : \alpha_i(x) < \alpha_i(y)\};$$
$$N_3=\{i \in I(y) \setminus I(x) : \alpha_i(y) \geqslant \alpha_i(x)\};$$
$$N_4=\{i \in I(y) \setminus I(x) : \alpha_i(y) < \alpha_i(x)\}$$

и воспользуемся свойством А). Тогда равенство (5) можно переписать в следующем виде:

$$T\left(x+y+\sum_{i \in I(x) \cap I(y)} (\alpha_i(x)+\alpha_i(y)) a_i+\sum_{i \in N_1} (\alpha_i(x)-\alpha_i(y)) a_i+\right.$$

$$+\sum_{i \in N_3} (\alpha_i(y)-\alpha_i(x))\, a_i,\quad \sum_{i \in \bar{I}(x) \cap \bar{I}(y)} (\alpha_i(x)+\alpha_i(y)) a_i+$$

$$\left.+\sum_{i \in N_2} (\alpha_i(y)-\alpha_i(x))\, a^i+\sum_{i \in N_4} (\alpha_i(x)-\alpha_i(y))\, a_i\right)=1. \tag{6}$$

Заметим, что множества $I(x) \cap I(y)$, $\overline{I}(x) \cap \overline{I}(y)$, $\{N_i\}_{i=1}^4$ — непересекающиеся, и в объединении дают все множество индексов. В этом случае из n-мерности и равенства (6) вытекает

$$I(x+y) = (I(x) \cap I(y)) \cup N_1 \cup N_3,$$

$$\alpha_i(x+y) = \begin{cases} \alpha_i(x) + \alpha_i(y), & i \in I(x) \cap I(y) \\ \alpha_i(x) - \alpha_i(y), & i \in N_1 \\ \alpha_i(y) - \alpha_i(x), & i \in N_2 \\ \alpha_i(x) + \alpha_i(y), & i \in \overline{I}(x) \cap \overline{I}(y) \\ \alpha_i(x) - \alpha_i(y), & i \in N_4 \\ \alpha_i(y) - \alpha_i(x), & i \in N_3. \end{cases}$$

Положим $\beta_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x), & i \in \overline{I}(x) \\ -\alpha_i(x), & i \in I(x). \end{cases}$

Рассмотрим $\beta_i(x+y)$. Допустим $i \in I(x) \cap I(y)$, тогда $i \in I(x+y)$ и $\beta_i(x+y) = -\alpha_i(x+y) = -\alpha_i(x) - \alpha_i(y) = \beta_i(x) + \beta_i(y)$.

Пусть $i \in N_1$, тогда $i \in I(x+y)$ и $\beta_i(x+y) = -\alpha_i(x+y) = \alpha_i(y) - \alpha_i(x) = \beta_i(x) + \beta_i(y)$, так как $i \in I(x) \setminus I(y)$ в силу определения N_1 и т. д. Рассмотрев все шесть случаев, легко убедиться, что при любом индексе i $\beta_i(x+y) = \beta_i(x) + \beta_i(y)$.

Докажем теперь одно вспомогательное

Утверждение. Если предикат $T(x, y)$ обладает перечисленными в теореме свойствами, то он рефлексивен, т. е. для любого $x \in K$ $T(x, x) = 1$; симметричен, т. е. для любых $x, y \in K$ равенства $T(x, y) = 1$ и $T(y, x) = 1$ эквивалентны; транзитивен, т. е. для любых $x, y, z \in K$ из равенств $T(x, y) = T(y, z) = 1$ следует $T(x, z) = 1$.

Действительно, для любого $x \in K$ из n-мерности и аддитивности вытекает

$$T\left(x + \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) a_i, \quad \sum_{i \in \overline{I}(x)} \alpha_i(x) a_i\right) = 1;$$

$$T\left(x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) a_i, \quad x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) a_i\right) = 1.$$

Учитывая свойство А), имеем $T(x, x) = 1$. Далее, если $T(x, y) = 1$ и из рефлексивности $T(y, y) = 1$, то по аддитивности и свойству А): $T(y+y, x+y) = 1$, $T(y, x) = 1$.

Теперь допустим $T(x, y) = 1$, $T(y, z) = 1$, тогда ясно, что $T(x+y, y+z) = 1$ и $T(x, z) = 1$. Утверждение доказано.

Пусть $T(x, y)=1$. Используя свойства теоремы и доказанное утверждение, нетрудно убедиться в правильности следующей цепочки равенств:

$$T\left(x+\sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) a_i, \quad \sum_{i\,\overline{\in}\, I(x)} \alpha_i(x) a_i\right)=1;$$

$$T\left(\sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) a_i, \quad \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) a_i\right)=1;$$

$$T\left(x+\sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) a_i, \quad y+\sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) a_i\right)=1;$$

$$T\left(y+\sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) a_i, \quad \sum_{i\,\overline{\in}\, I(x)} \alpha_i(x) a_i\right)=1.$$

Из единственности $I(x)$ и набора чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{n}$ имеем $I(x)=$ $=I(y)$ и $\alpha_i(x)=\alpha_i(y)$, что означает $\beta_i(x)=\beta_i(y)$, $i=1, \ldots, n$.

Эти рассуждения можно провести и в обратном порядке. В итоге $T(x, y)=D(\beta(x), \beta(y))$ (7), где $\beta(x)=\beta_1(x), \ldots, \beta_n(x))$, а D — предикат равенства на $R^n \times R^n$.

Раньше была доказана аддитивность функционалов $\beta_i(x)$ и по условию они еще непрерывны в точке x_0, следовательно, это набор линейных функционалов в $L_2[0, 1]$ (так как их можно единственным образом продолжить с положительного конуса). Докажем их линейную независимость.

Пусть $\beta_n(x)=\lambda_1\beta_1(x)+\ldots+\lambda_{n-1}\beta_{n-1}(x)$. С другой стороны, из рефлексивности и n-мерности следует

$$T(a_n, a_n)=1;\ I(a_n)=\{1, \ldots, n-1\},\ \alpha_1(a_n)=\ldots=$$
$$=\alpha_{n-1}(a_n)=0;\ \alpha_n(a_n)=1.$$

Значит, $\beta_n(a_n)=\alpha_n(a_n)=1=\lambda_1\beta_1(a_n)+\ldots+\lambda_{n-1}\beta_{n-1}(a_n)=$ $=-\lambda_1\alpha_1(a_n)-\ldots-\lambda_{n-1}\alpha_{n-1}(a_n)=0$. Противоречие.

Следовательно, $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — линейно независимая система функционалов и при этом из n-мерности вытекает, что для любого $x\in K$ существует i такое, что $\beta_i(x)>0$. Отсюда по лемме найдется матрица $A(\det A\neq 0)$, для которой $h(x)=A\beta(x)$ и $h(x)>0$, $x\in K$. Это отображение взаимно-однозначное, поэтому $T(x, y)=D(\beta(x), \beta(y))=D(A\beta(x), A\beta(y))=D(h(x), h(y))$, где $h(x)=(h_1(x), \ldots, h_n(x))$, $h_i(x)>0$, $x\in K$, $i=1, \ldots, n$. Функционалы $h_i(x)$ — линейные с положительными ядрами, но это и означает, что предикат $T(x, y)$ представим в виде (1). Теорема доказана.

Нижеследующая теорема свидетельствует о том, что система условий теоремы 1 несократима.

Теорема 2. *Условия аддитивности, n-мерности, непрерывности и свойство A) независимы.*

Чтобы доказать эту теорему, необходимо привести примеры предикатов, обладающих всеми перечисленными свойствами, кроме одного.

Доказательство.

I. Свойство A). Рассмотрим предикат

$$T(x, y) = D\left(\int_0^1 x(t)\,e_1(t)\,dt, \ldots, \int_0^1 x(t)\,e_n(t)\,dt;\ \int_0^1 y(t) e_n(t)\,dt,\right.$$

$$\left.\int_0^1 y(t)\,e_2(t)\,dt, \ldots, \int_0^1 y(t)\,e_{n-1}(t)\,dt,\ \int_0^1 y(t)\,e_1(t)\,dt\right),$$

где $\{e_i(t)\}_{i=1}^n \subset K$ — линейно независимая система и $\int_0^1 (e_1(t) - e_n(t))\,dt \neq 0$. Тогда, если $T(x, y) = 1$, $T(x', y') = 1$, то

$$\int_0^1 x(t)\,e_1(t)\,dt = \int_0^1 y(t)\,e_n(t)\,dt,\quad \int_0^1 x(t)\,e_k(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 y(t)\,e_k(t)\,dt,\ k = 2, \ldots, n-1,\ \int_0^1 x(t)\,e_n(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 y(t)\,e_1(t)\,dt,\ \int_0^1 x'(t)\,e_1(t)\,dt = \int_0^1 y'(t)\,e_n(t)\,dt,$$

$$\int_0^1 x'(t)\,e_n(t)\,dt = \int_0^1 y'(t)\,e_1(t)\,dt,\ \int_0^1 x'(t)\,e_k(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 y'(t)\,e_k(t)\,dt,\quad k = 2, \ldots, n-1.$$

Отсюда

$$\int_0^1 (x(t)+x'(t))\,e_1(t)\,dt=\int_0^1 (y(t)+y'(t))e_n(t)\,dt;$$

$$\int_0^1 (x(t)+x'(t))e_n(t)\,dt=\int_0^1 (y(t)+y'(t))\,e_1(t)\,dt;$$

$$\int_0^1 (x(t)+x'(t))\,e_k(t)\,dt=\int_0^1 (y(t)+y'(t))e_k(t)\,dt,\ k=2,\ldots,$$

$n-1$, т. е. $T(x+x', y+y')=1$. С другой стороны,

$$\int_0^1 (x(t)+y'(t))\,e_1(t)\,dt=\int_0^1 (y(t)+x'(t))e_n(t)\,dt,$$

$$\int_0^1 (x(t)+y'(t))\,e_n(t)\,dt=\int_0^1 (y(t)+x'(t))e_1(t)\,dt;$$

$$\int_0^1 (x(t)+y'(t))e_k(t)\,dt=\int_0^1 (y(t)+x'(t))\,e_k(t)\,dt,\ k=2,\ldots,\ n-1,$$

т. е. $T(x+y', y+x')=1$. Таким образом, $T(x, y)$ обладает аддитивностью. В справедливости для этого предиката n-мерности и непрерывности можно убедиться тем же путем, как и при доказательстве необходимости в теореме 1.

Пусть $c_1, c_2=\text{const}>0$ такие, что $T(c_1, c_2)=1$, а $0<\lambda<$ $<\min(c_1, c_2)$. Положим $x=c_1-\lambda$, $y=c_2-\lambda$, $z=\lambda$. Тогда $T(x+z,$ $y+z)=1$, однако

$$\int_0^1 x(t)\,e_1(t)\,dt-\int_0^1 y(t)\,e_n(t)dt=\lambda\int_0^1 (e_n(t)-e_1(t))dt\neq 0,$$

т. е. $T(x, y)=0$. Значит свойство A) не выполняется.

II. Аддитивность. Положим

$$T(x,y)=D\left(\int_0^1 x(t)\,e_1(t)\,dt+1,\ldots,\int_0^1 x(t)\,e_n(t)\,dt;\right.$$

$$\left.\int_0^1 y(t)\,e_1(t)\,dt,\ldots,\int_0^1 y(t)\,e_n(t)\,dt\right).$$

Этот предикат не аддитивен, так как если

$$\int_0^1 x(t)\,e_1(t)\,dt + 1 = \int_0^1 y(t)\,e_1(t)\,dt, \quad \int_0^1 x'(t)\,e_1(t)\,dt + 1 =$$

$$= \int_0^1 y'(t)\,e_1(t)\,dt, \text{ то } \int_0^1 (x(t) + x'(t)\,e_1(t)\,dt + 1 =$$

$$= \int_0^1 (y(t) + y'(t))\,e_1(t)\,dt - 1.$$

С другой стороны, справедливость остальных свойств очевидна.

III. n-мерность. Допустим $T(x, y) \equiv 1$. Этот предикат не n-мерен, однако все остальные свойства выполняются.

IV. Непрерывность. В $L_2[0, 1]$ существуют аддитивные, но разрывные функционалы. Если производить разбиение на классы эквивалентности с их помощью, то ясно можно построить предикат, не обладающий непрерывностью, но удовлетворяющий остальным свойствам. Теорема доказана.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Применение метода нуль-органа в психофизике. — Пробл. бионики, 1978, вып. 21, с. 25—30. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Математические модели зрения. — К.: Техника, 1966. — 95 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Аксиоматическое построение модели цветного зрения. — Пробл. бионики, 1970, вып. 4, с. 20—23. 4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функции и функционального анализа. — М.: Наука, 1972. — 140 с.

Поступила в редколлегию 13.05.82.