

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА

Пояснювальна записка

рівень вищої освіти _____ другий (магістерський) _____

_____ Упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері _____

(тема)

Виконав:
студент 2 курсу, групи ПММ-19-1
Луньова О.С.
(прізвище, ініціали)

Спеціальність 113 Прикладна математика
(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма _____
Прикладна математика _____
 (повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Стоян Ю.Г.
(посада, прізвище, ініціали)

Зав. кафедри ПМ

Тевяшев А.Д.
(прізвище, ініціали)

2020 p.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 113 Прикладна математика

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Прикладна математика

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ ____ ” _____ 2020 р.

ЗАВДАННЯ
НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові Луцьовій Олені Сергіївні

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері

затверджена наказом по університету від 23 жовтня 2020 р. № 1422 Ст

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії 10 грудня 2020 р.

3. Вихідні дані до роботи поставлена задача упаковки

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз проблеми упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз проблеми _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	вересень 2020 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	жовтень – листопад 2020 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	листопад – грудень 2020 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	листопад – грудень 2020 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	грудень 2020 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	грудень 2020 р.	виконано

Дата видачі завдання 1 вересня 2020 р.

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Стоян Ю.Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 77 с., 7 табл., 13 рис., 2 дод., 16 джерел.

ГЕОМЕТРИЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ, НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ, Ф-ФУНКЦІЯ, Ф-ОБ'ЄКТ, УПАКУВАННЯ КУЛЬ, ГІПЕРКУЛЯ, ГІПЕРСФЕРИЧНИЙ КОНТЕЙНЕР, ЛОКАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ, ДЕКОМПОЗИЦІЯ.

Об'єкт дослідження – упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері з урахуванням геометричних обмежень та функції цілі.

Мета роботи – проаналізувати задачі геометричного проектування та побудувати алгоритм розв'язання поставленої задачі за допомогою методів нелінійного програмування. Ефективно застосувати отриманий алгоритм і отримати точку локального максимуму задачі у вигляді вектору координат центрів куль, отриманих значень радіусів та графічної 3D-моделі.

Методи дослідження – математичний апарат аналітичної та обчислювальної геометрії, метод Ф-функцій Стояна, теорія геометричного проектування, методи нелінійного програмування для пошуку локально-оптимального розв'язку.

У атестаційній роботі розглянуті основні аспекти, що впливають на розв'язок задачі упакування гіперкуль у гіперсферичному контейнері. У системному аналізі розглянуто основні методи рішення проблеми упаковки гіперкуль, обраний метод нелінійного програмування з мінімальними втратами якості результату. У теоретичній частині зібрані відомості про φ -об'єкт, його геометричну інформацію, перелічені потрібні Ф-функції для розв'язання поставленої задачі, розглянуті за міжнародною класифікацією два види задачі пакування гіперкуль та обрана стратегія розв'язку в залежності від функції цілі. Практична частина містить реалізацію поставленої задачі з теоретичної частини за допомогою програмного продукту написаного на Delphi, наведені результати побудови розв'язку з різними метричними характеристиками.

ABSTRACT

Introductory note: 77 pages, 7 tables, 13 figures, 2 appendixes, 16 sources.

GEOMETRIC DESIGN, NONLINEAR PROGRAMMING, F-FUNCTION, F-OBJECT, SPHERE PACKAGING, HYPERSPHERE, HYPERSPHERIC CONTAINER, DECOMPOSE.

Object of research – the task of packing uneven hyperspheres in a hyperherical container, taking into account the geometric constraints and functions of the target.

Purpose of work – to analyze the problem of geometric design and in the future the algorithm for solving the mail problem using nonlinear programming methods. The obtained algorithm was effectively applied and the most approximate result was obtained in a graphic graphic 3D-model.

Methods of research – mathematical apparatus of analytical and computational geometry, Φ -function theory of Stoyan's, theory of geometric design, methods of nonlinear programming to construct an approximate solution.

The master's certification work considers the main aspects that affect the solution of the problem of packing hyperspheres in a hyperspherical container. In the system analysis by the method of analysis of hierarchies the basic methods of the decision of a problem of packing of hyperspheres are considered in detail, the effective method of nonlinear programming with the minimum losses of quality of the decision is chosen. The theoretical part collects information about the Φ -object, its geometric information, lists the required Φ -functions to solve the problem, considered the international classification of two types of packing problems of hyperspheres and selected solution strategy depending on the type of target function. The practical part contains the implementation of the considered strategy from the theoretical part with the software product written in Delphi, the results of construction of the approximate solution with different metric characteristics of hyperspheres and the container are given.

ЗМІСТ

	С.
Вступ	8
1 Системний аналіз проблеми упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері та постановка задач дослідження	9
1.1 Системний аналіз проблеми упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері	9
1.1.1 Вербальна модель системи	9
1.1.2 Морфологічний опис системи	10
1.1.3 Функціональна модель системи	12
1.1.4 Інформаційна модель системи	13
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері	13
1.2.1 Модель аналізу проблеми	13
1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій	14
1.2.3 Модель вирішення проблеми	19
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	24
1.3.1 Змістовна постановка задачі	24
1.3.2 Формальна постановка задачі	24
2 Вибір та обґрунтування методу розв'язання	26
2.1 Основні відомості з теорії Φ -функцій	26
2.1.1 Поняття геометричної інформації та ϕ -об'єкту	26
2.1.2 Метод Φ -функцій Стояна.....	28
2.2 Задачі розміщення гіперкуль	33
2.2.1 Математична модель задачі упаковки рюкзака	36
2.2.2 Дослідження особливостей математичної моделі задачі ODP	38
2.3 Моделювання відношень гіперкуль у задачах розміщення різних вимірностей.....	40

2.4 Метод розв'язання задачі упаковки нерівних куль у гіперсферичному контейнері	42
2.4.1 Побудова допустимих точок	44
2.4.2 Метод локальної оптимізації	46
2.4.3 Метод глобальної оптимізації.....	50
3 Програмна реалізація	51
3.1 Бібліотека OpenGL для візуалізації.....	51
3.2 Опис програми.....	51
4 Результати обчислювального експерименту	53
4.1 Обчислювальні експерименти	53
4.2 Аналіз результатів експериментів	59
5 Аналіз можливих застосувань	60
Висновки	62
Перелік джерел посилання	63
Додаток А Системний аналіз проблеми	65
Додаток Б Лістинг програми	70

ВСТУП

Сучасний світ відрізняється збільшенням виробництва і зменшенням ресурсів планети. Тому економія ресурсів на сьогодні є першочерговою проблемою будь-якої галузі людства. Технології 3D-друку полегшили процес виробництва, але наступним кроком до оптимізації процесу є застосування адитивних технологій, що допомагають витратити якомога менше матеріалів без значної втрати необхідних фізичних властивостей виготовлених деталей. Задача упаковки нерівних гіперкуль у гіперсферичному просторі є безпосереднім способом реалізації економного 3D-друку, тому ця задача саме зараз без перебільшень є значущою і актуальною.

З 1950-х років науковий світ займається задачами упаковки і розкрою, такі задачі є NP-повними, тому для них необхідно знайти наближені методи розв'язку із заданим рівнем точності результатів, що будуть задовольняти умовам застосування.

Для модернізації необхідна оптимізація, саме це є причиною актуальності задач упаковки і щільного розміщенню. На сьогодні, існують різні математичні методи розв'язання даної задачі. Метою атестаційної роботи є дослідження існуючих методів та видів задач упаковки, розгляд особливостей поставленої задачі у порівнянні з класичними постановками, пошук оптимальної стратегії, що призведе до максимально наближеного результату при мінімально затраченому часі і її реалізація.

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ УПАКОВКИ ГІПЕРКУЛЬ У ГІПЕРСФЕРИЧНОМУ КОНТЕЙНЕРІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз проблеми упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері

1.1.1 Вербальна модель системи

Об'єкт аналізу – «Упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері».

Предмет аналізу – «Геометричне проектування».

Точка зору: дослідник.

Ціль: побудувати найбільш ефективний метод розв'язку задачі упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері, при якому функція цілі, сума радіусів гіперкуль, досягає свого максимуму при заданих обмеженнях на метричні характеристики об'єктів системи, тобто гіперкулі та гіперсферичний контейнер. Для цього побудувати геометричну модель системи, розрахувати положення нерівних гіперкуль без взаємного накладання у контейнері, проаналізувати проблему різних вимірностей та змодельовати процеси між елементами системи.

Система «Задача упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері» є цілеспрямованою системою, адже вона має чітко визначене цільове призначення із заданими умовами, що були сформульовані всередині цієї системи для виконання певних дій, сприйняття потреб і їх задоволення.

Головний вихід системи – максимальна щільність розміщення гіперкуль у гіперсферичному контейнері. На входи подаються геометричні параметри об'єктів системи, які описують геометричну інформацію гіперкуль та контейнера, що є невід'ємною частиною для побудови моделі. Керування системою здійснюється через дослідника, який у свою чергу реалізує задачу упакування

за допомогою інформаційної бази, результат подається у вигляді програмного продукту.

1.1.2 Морфологічний опис системи

Досліджувана система – «Задача упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері».

Призначення моделі полягає у покращенні методів нерегулярного розміщення геометричних об'єктів. Для реалізації мети системи використовуються технологічні та інформаційні ресурси.

Морфологічний опис почнемо з опису моделі зовнішнього середовища, приведенного на рис. 1.1.

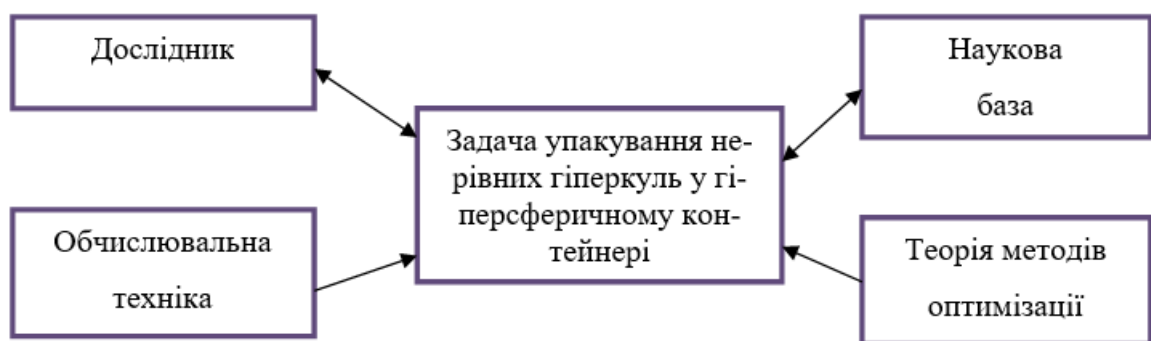


Рисунок 1.1 – Зовнішнє середовище системи

Зовнішнє середовище – це сукупність усіх об'єктів, що оточують систему поза її межах, але саме ці об'єкти мають вплив на систему, а також з об'єктів, властивості яких змінюються в залежності від поведінки системи.

Об'єкти зовнішнього середовища:

- а) науково-інформаційна база;
- б) обчислювальна техніка, за допомогою якої здійснюється процес оптимізації упакування нерівних гіперкуль в гіперсферичний контейнер;

в) дослідник – проводить експерименти, обирає методи і способи оптимізації процесу упакування гіперкуль в гіперсферичний контейнер;

г) теорії методів оптимізації, за допомогою якої встановлюється чи ефективна упаковка [1].

Модель «чорний ящик» системи «Задача упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері» акцентує на тому, що система вивчається не як сукупність взаємодіючих елементів, а як щось ціле та неподільне, взаємодіюче з такою середою на своїх входах та виходах, вона зображена на рис. 1.2. Така модель звертає увагу дослідника на взаємодію системи зі зовнішнім середовищем, вона є вихідною при побудові моделі складної системи. На цьому етапі виходами системи є її цільові продукти, а входами – вплив середовища на систему.

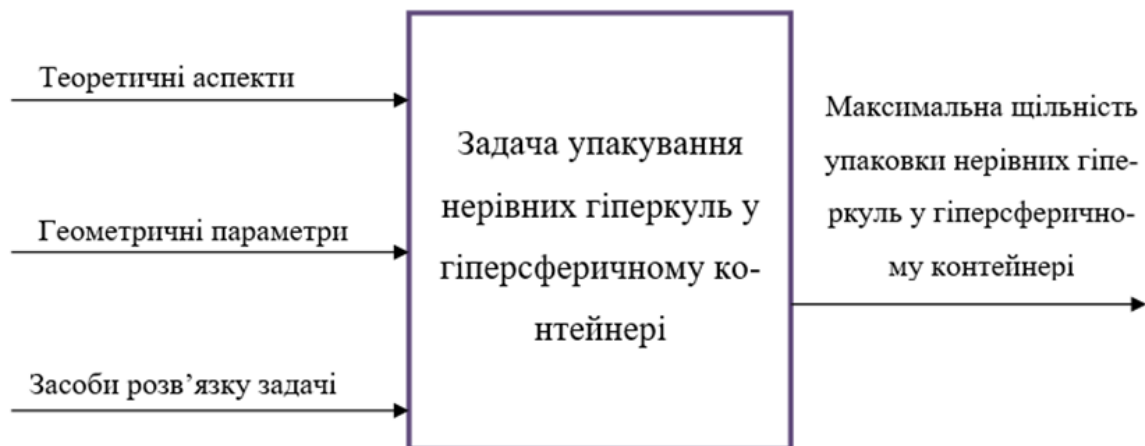


Рисунок 1.2 – Модель «чорний ящик»

У моделі «чорний ящик» увага дослідника звертається тільки на границі системи, тому зміст залишається невідомим. У свою чергу, границя підкреслює цілісність, замкненість системи, відокремлюючи систему від зовнішнього середовища та взаємодії системи зі середовищем [1].

У моделі «білий ящик» (рис. А.1 Додатка А) розкриваються внутрішні елементи, описаний «склад системи» та вказані взаємозв'язки між елементами системи.

Досліджувана система А включає в себе дві підсистеми: А1 і А2:

- а) A1 – апарат управління, який складається з:
 - 1) A11 дослідника;
 - 2) A12 комп'ютеру як апаратного забезпечення (hardware);
- б) A2 – теоретична і обчислювальна база, яка складається з:
 - 1) A21 методів розв'язку: стратегії і розрахункові формули;
 - 2) A22 комп'ютерного програмного забезпечення (software).

1.1.3 Функціональна модель системи

Перша діаграма в ієрархії IDEF0 представлена на рис. А.2 Додатка А. Ця діаграма називається контекстною. У рамках методології IDEF0 процес представляється у вигляді набору елементів, які взаємодіють між собою, а також ресурсів, що споживаються кожною роботою [1].

Як правило, моделювання засобами IDEF0 є першим етапом вивчення будь-якої системи, адже в ієрархії діаграм IDEF0 являє собою саме загальний опис системи та її взаємодії із зовнішнім середовищем. За допомогою графічного представлення діаграм досліджувана система постає перед дослідниками і аналітиками у вигляді набору взаємопов'язаних функцій (функціональних блоків). Контекстна діаграма зображує функціонування системи в цілому, після якої проводиться декомпозиція на великі фрагменти. Далі декомпозиємо кожний попередній фрагмент ієрархії на більш детальні фрагменти, розкриваючи більш глибоко усі внутрішні аспекти системи.

Наступні діаграми будуються тільки після повного опису контексту. Кожна наступна діаграма є більш докладним описом однієї з робіт на віщому рівні діаграмі. У нашому випадку розглядається функціонування системи «Задача упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері». Друга діаграма демонструє основні функції системи і їх деталізацію за рівнями (рис. А.3, А.4 Додатка А).

1.1.4 Інформаційна модель

Діаграми потоків даних (Data Flow Diagramming, DFD) використовуються для опису документообігу та обробки інформації, це методологія графічного структурного аналізу, що описує зовнішні системні джерела і адресата даних, потоки даних, логічні функції і сховища даних, до яких реалізується доступ, акцентуючи увагу дослідника на склад та взаємозв'язки потоків даних. Подібно до IDEF0, DFD є модельною системою [1]. Діаграми потоків даних використовуються для більш поглибленого зображення поточних операцій.

DFD-діаграма представлена на рис. А.5 Додатка А. DFD-діаграма 1-го рівня декомпозиції представлена на рис. А.6 Додатка А.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення проблеми упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері

1.2.1 Модель аналізу проблеми

Об'єктом дослідження є проблемо-змістовна система на основі моделі «Задача упакування нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері».

Виявимо ряд компонентів, які впливають на отримання необхідного результату. Знайдені незадоволеності поділимо на три групи:

а) небажані властивості:

- 1) складність реалізації на ЕОМ;
- 2) невдалий вибір початкової точки;

б) критичні властивості:

- 1) неефективність методу;
- 2) велика похибка обчислень;

в) бажані властивості:

- 1) плавний перехід від одного локального мінімуму до іншого;

- 2) максимальна сума об'ємів гіперкуль;
- 3) краще значення функції цілі;
- 4) можливість модифікувати алгоритм.

1.2.2 Оцінювання вектора пріоритетів незадоволеностей методом аналізу ієрархій

Метод аналізу ієрархій полягає в структуризації задач прийняття рішень, що передбачає декомпозицію проблеми на прості складові частини і обробку суджень особи, яка приймає рішення. У процесі аналізу розраховується відносна значущість досліджуваних альтернатив для всіх критеріїв у вигляді чисельних оцінок інтенсивності взаємовпливу елементів ієрархії, на основі яких оцінюються ступені переваги альтернатив відносно головної мети. Відносна значущість виражається чисельно у вигляді векторів пріоритетів. Отримані таким чином значення векторів є оцінками у шкалі відносин і відповідають так званим жорстким оцінкам [1]. А далі за допомогою методу парних порівнянь оцінюються ступені впливу кожної з груп незадоволеностей на розв'язок проблеми в цілому.

Для проведення аналізу незадоволеностей побудуємо ієрархічну модель:

- а) перший рівень (фокус моделі) – незадоволеності;
- б) другий рівень – класифікація незадоволеностей;
- в) третій рівень – характеристики компонентів, що впливають на розв'язок поставленої задачі.

Ієрархічна модель процесу аналізу незадоволеностей приведена на рис. А.7 Додатка А.

Аналіз вектора пріоритетів першого рівня показав, що найбільш значущими виявилися бажані якості ($W_1 = 0.583$), наступні – критичні ($W_1 = 0.315$), потім небажані ($W_1 = 0.102$).

На рис. 1.3 зображена діаграма пріоритетів за критерієм незадоволеностей.

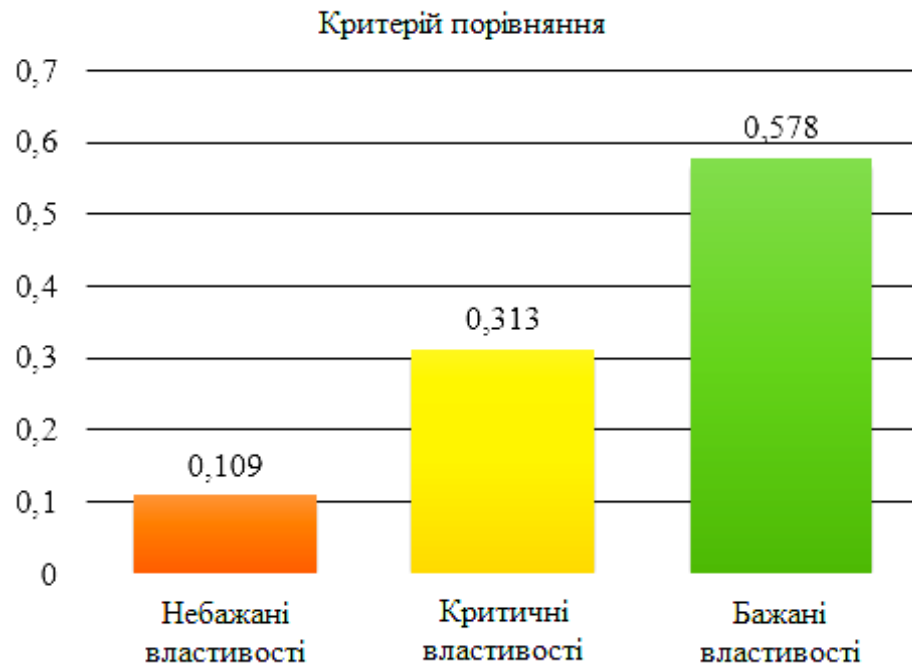


Рисунок 1.3 – Критерій порівняння незадоволеностей

Найбільше власне значення матриці суджень дорівнює $\lambda_{\max} = 3.41$. Індекс узгодженості дорівнює $IS = 0.02$ і відношення узгодженості $OS = 0.05 < 0.1$.

Аналіз переваг кожної з розглянутих незадоволеностей по відношенню до кожної якості першого рівня виявив пріоритети за критеріями порівняння «небажані якості», «критичні якості», «бажані якості».

На рисунках 1.4 – 1.5 приведені діаграми пріоритетів по вище вказаним критеріям порівняння.

Для оцінки узагальнених пріоритетів, іншими словами здійснення синтезу локальних пріоритетів, треба отримати вектор глобальних пріоритетів незадоволеностей стосовно мети (цілі) верхнього рівня (Додаток А, рис. А.7)

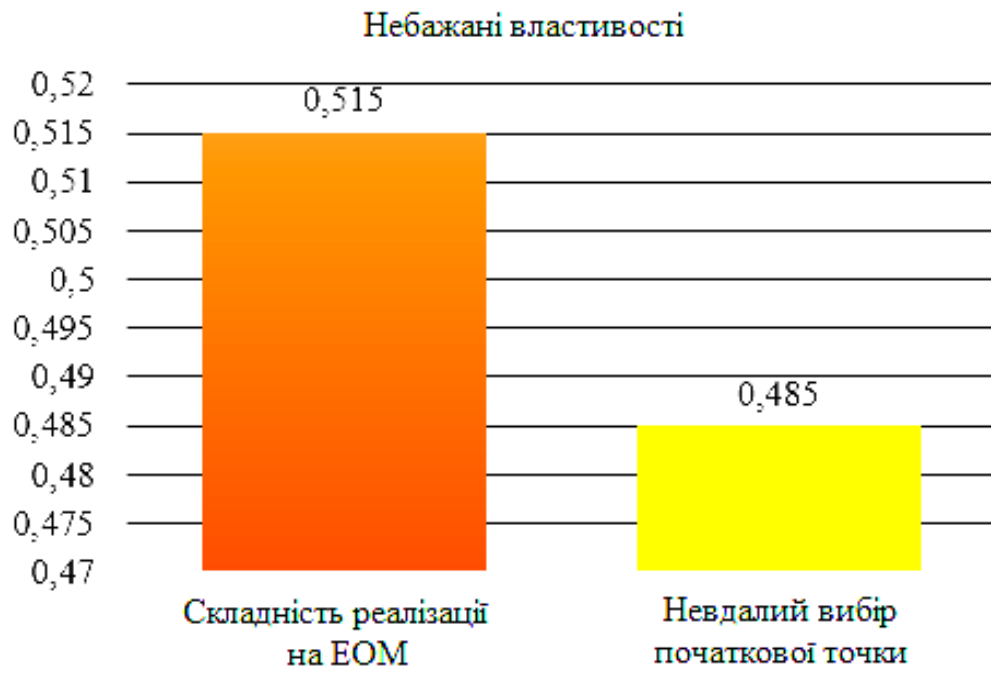


Рисунок 1.4 – Критерій порівняння небажані властивості

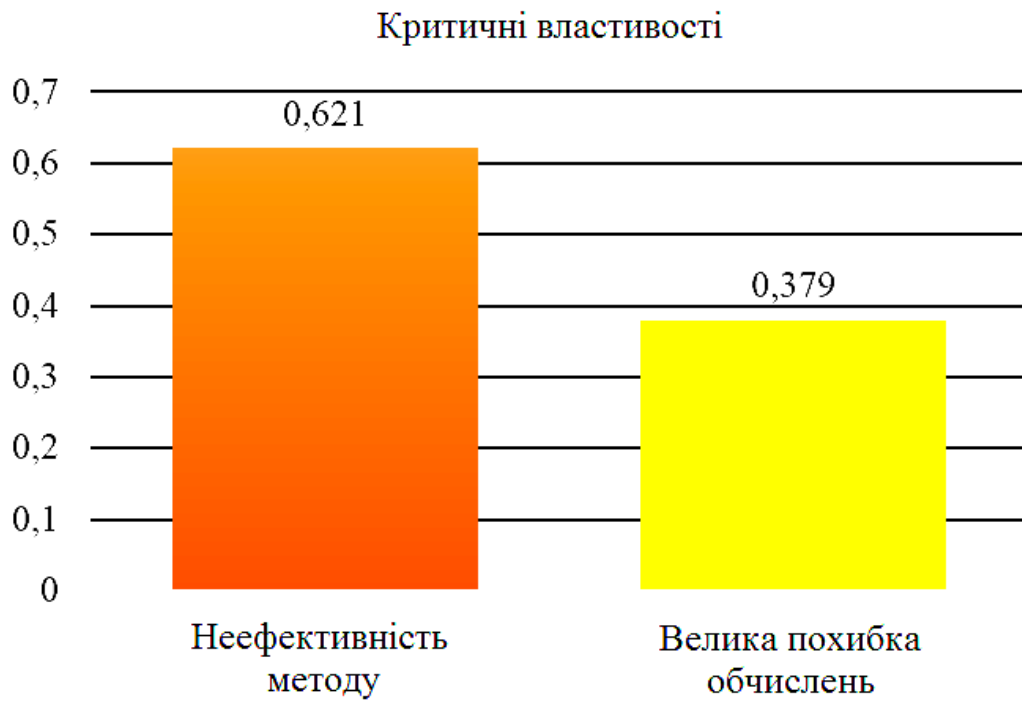


Рисунок 1.5 – Критерій порівняння критичні властивості



Рисунок 1.6 – Критерій порівняння бажані властивості

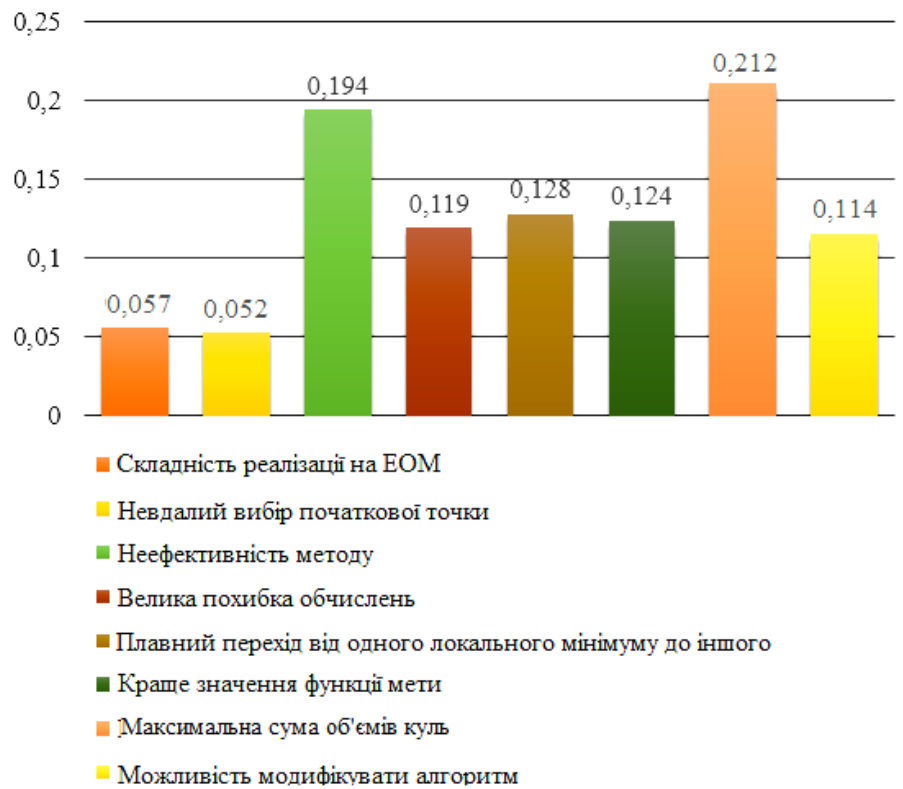


Рисунок 1.7 – Глобальні пріоритети

Скористаємося принципом Парето для зменшення розмірності [1]. Для цього знайдемо усі незадоволеності з діаграми, сума яких дорівнює 0,8. У результаті виділяємо найбільш значущі з них, указавши важливість властивостей:

- неефективність методу – 0,194;
- велика похибка обчислень – 0,119;
- плавний перехід від одного локального мінімуму до іншого – 0,128;
- краще значення функції цілі – 0,124;
- максимальна сума об'ємів куль – 0,212;
- можливість модифікувати алгоритм – 0,114.

Таким чином, найсильніше впливають на проблему розв'язку задачі «максимальна сума об'ємів куль» (0,212), «неефективність методу» (0,194), «плавний перехід від одного локального мінімуму до іншого» (0,128). Можна вирішити вихідну проблему на 53,4%, якщо усунути дані незадоволеності,.

За допомогою перспективного розв'язання проблеми ми можемо зменшити ймовірність прорахунку в можливих наслідках. Виходячи з аналізу незадоволеностей вирішення проблеми, зусилля дослідника будуть спрямовані на досягнення найкращого результату, іншими словами сформульованої бажаної мети до створення у системі нових бажаних властивостей.

На основі проведеного аналізу незадоволеностей, сформулюємо декілька контрастних сценаріїв (можливих результатів) вирішення завдання упаковки гіперкуль у гіперсферичному контейнері:

а) сценарій «Точні методи» (СЦ-1). Цей сценарій характеризує побудову математичної моделі задачі розміщення на основі структур лінійних нерівностей і лінійної функції мети;

б) сценарій «Евристичні методи» (СЦ-2). У разі застосування евристичного методу на одиниці операції, рішення оперують геометричними перетвореннями кожного окремо взятого геометричного об'єкта;

в) сценарій «Гібридний метод» (СЦ-3). При цьому сценарії проблема зводиться до вирішення однієї або послідовного розв'язування кількох простих завдань.

Побудуємо калібрувальну таблицю за психометричною шкалою Т. Сааті для кожного сценарію, де експертним шляхом визначений приріст розглянутих показників [1]. Вона представлена далі у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1 – Відкалібрований приріст розглянутих показників

Показники стану системи	СЦ1 (0,403)	СЦ2 (0,444)	СЦ3 (0,153)	Узагальнений сценарій
Вид результатів	+3	+5	-1	+3,324
Час обчислення	+4	+2	+4	+2,967
Точність розв'язання	+5	+4	+3	+4,153
Універсальність методу	-1	+4	+4	+1,659

1.2.3 Модель вирішення проблеми

Задачі упаковки і розкрою на практиці пов'язані із економією ресурсів і часу для вирішення ряду прикладних задач у різних галузях людської діяльності. Ця проблема має актуальність як у сьогоденні, так і у майбутньому людства.

При вирішенні задач розкрою найважливішим є досягнення максимальної щільності упаковки деталей для мінімізації відходів матеріалів. Такі задачі об'єднані під терміном «задача розкрою-упаковки» (Р-У). У випадку упаковки куль суть проблеми полягає у розміщенні непересічних куль у деякій області евклідового простору з максимальною щільністю, щоб кулями була покрита найбільша частина цієї області. Така задача відноситься до класу NP-важких (Nondeterministic polynomial), тобто обчислювальна складність задачі не дозволяє знаходити точний розв'язок для достатньої кількості геометричних об'єктів за поліноміальний час, та багатоекстремальних задач. У загальному випадку виділяють одномірні, двовимірні і тривимірні задачі розкрою-упаковки.

Задачі розкрою-упаковки поділяють на регулярну і нерегулярну упаковку. Регулярне розміщення зумовлене паралельним розташуванням геометричних об'єктів з однаковими метричними характеристиками, такі задачі добре вивчені і мають ряд перевірених стратегій розв'язку. Зокрема, популярними є точні методи, наприклад, методи апроксимації та декомпозиції. Цей метод добре працює на конгруентних геометричних об'єктах та при невеликій кількості загалом об'єктів розміщення. У процесі вирішення проблеми одним із ключових факторів ефективності методу є час, при великій кількості змінних задачі упаковки точні методи потребують великої потужності ЕОМ та значного часу, що робить такі методи неприйнятними для реальних задач із великою кількістю об'єктів. Ще на практиці ускладнює процес розв'язку складність самої форми об'єктів, а тому більша увага наразі приділяється задачі нерегулярної упаковки і пошуках оптимальних стратегій, що будуть відповідати вимогам швидкої і надійної роботи.

Для вирішення проблеми нерегулярного фігурного розкрою-упаковки найчастіше користуються евристичними методами. Вони оперують перетвореннями кожного окремо взятого геометричного об'єкта на одиницю операції. Серед евристичних методів популярністю користуються імітація відпалу, пошук із заборонами, генетичний алгоритм, тощо.

Імітація відпалу і пошук із заборонами характеризуються прокладанням траєкторії руху у просторі пошуку, який представляється послідовністю рішень, де кожне наступне рішення є сусіднім для попереднього щодо деякої околиці. У генетичному алгоритмі для нового розв'язку використовуються процедури схрещування і цілеспрямованих мутацій (змін, що відбуваються випадковим чином), він являє собою спосіб кодування рішень, який полягає в отриманні інформації про послідовність розміщення блоків. Кінцевий результат в цьому випадку представляє собою деяку чергу блоків, відповідно до якої алгоритм розміщення упакує блоки в контейнери.

Перспективними методами вирішення завдань нерегулярного розміщення геометричних об'єктів є гібридні методи, адаптація метаевристичних методів

локального пошуку в комбінації з методами моделювання геометричних перетворень, заснованих на виконанні умов взаємного неперетинання.

Для об'єктивної оцінки метаевристичні методи є маловивченими для щільного розміщення геометричних об'єктів в однозв'язній і багатов'язній областях, та серед них перспективним є використання сплайнів і примітивів для аналізу локальних характеристик форми, та метод керованого локального пошуку. Останній представляє собою метаевристичний метод пошуку, тобто накладається на алгоритм локального пошуку з метою змінити його поведінку.

Керований локальний пошук (КЛП) будує штрафи під час пошуку і використовує їх, щоб допомогти локальним алгоритмам піти з локального мінімуму. Коли локальний алгоритм пошуку потрапляє в локальний мінімум, КЛП модифікує цільову функцію за допомогою спеціальної схеми, далі локальний пошук працює з цією збільшеною цільовою функцією. Ключовим питанням є спосіб модифікації цієї цільової функції.

Після розробки моделей контрастних сценаріїв агрегується ієрархія моделей прямого процесу аналізу проблеми.

У моделі системи розглядаються такі елементи за рівнями:

- нульовий рівень (фокус моделі): розв'язання задачі упаковки нерівних гіперкуль у гіперсферичному контейнері;
- перший рівень (актори): вид результатів, час обчислення, ресурси ЕОМ, точність рішення, універсальність методу;
- другий рівень (цілі акторів): отримання адекватного результату, отримання програмного продукту, підвищення точності, можливість застосування методу до інших геометричних об'єктів;
- третій рівень (контрастні сценарії): точні методи, евристичні методи, гібридні методи.

За цією моделлю за допомогою експертних оцінок розрахуємо локальні пріоритети елементів кожного рівня моделі по відношенню до кожного пов'язаного елементу верхнього рівня, а потім оцінимо вектор глобального пріоритету елементів третього рівня.

Змістовна ієрархічна модель прямого процесу аналізу проблеми представлена на рис. А8 Додатка А.

Починаємо перший етап, який полягає в аналізі впливу факторів першого рівня ієрархії на мета аналізу – нульовий рівень. Шкала пріоритетів представлена на рис. А.9 Додатка А.

Коротко прокоментуємо: аналіз векторів пріоритету показує, що найбільш значним виявився фактор «точність розв'язку» ($W_1 = 0.479$).

На наступному етапі розглянемо вплив цілей чинників другого рівня на фактори першого рівня, а саме до аналізу переваги кожної, з розглянутих цілей, по відношенню до кожного фактору першого рівня.

Отримано були такі значущості цілей. Для фактору «вид результату» найбільш пріоритетним є «отримання адекватного рішення» ($W_1 = 0.475$). Для фактору «час обчислення» найбільш пріоритетним є «підвищення точності» ($W_1 = 0.487$). Для фактору «ресурси ЕОМ» – «отримання програмного продукту» ($W_1 = 0.648$).

Із точки зору точності вирішення найбільш пріоритетною виявилася мета «точність рішення». Для фактора «універсальність методу» найбільш пріоритетним є «можливість застосування методу до різних геометричних об'єктів».

Переходимо до сценаріїв третього рівня по відношенню до кожної з цілей чинників другого рівня.

У результаті отримуємо узагальнений вектор пріоритетів сценаріїв по відношенню до кінцевої мети – вирішенню завдання упаковки нерівних гіперкуль у гіперсферичний контейнер.

Таблиця 1.2 – Узагальнений вектор пріоритетів сценаріїв

Сценарії	Вектор пріоритетів
«Точні методи»	0,391
«Евристичні методи»	0,450
«Гібридні методи»	0,159

Після оцінки ймовірних логічних сценаріїв стану проблемо-змістовної системи починаємо розробляти моделі бажаних сценаріїв.

Для вибору одного з сформованих бажаних сценаріїв агрегуючи дві змістовні моделі, рис. А.10 і А.11 Додатка А, по яким експертним шляхом оцінимо їх коефіцієнти значущості (компоненти вектора глобальних пріоритетів) за критеріями «вигода» та «збитки». Результати аналізу змістовних моделей оцінок векторів пріоритетів за критерієм «вигоди» і за критерієм «збитки» занесені в таблицю 1.3.

Розглянуті бажані сценарії проранжуємо в порядку зростання відносин V/U і для подальшого розгляду оберемо сценарій із максимальним значенням величини V/U ; у нашому випадку це Сценарій №2 – «Евристичні методи»

Таблиця 1.3 – Результати сценаріїв за вигодами і збитками

Сценарій Критерії	«Точні методи»	«Евристичні методи»	«Гібридні методи»
Критерій «вигода» V	0,2006	0,5347	0,2561
Критерій «збитки» U	0,4165	0,3997	0,3827
Відношення «Вигода/збиток» V/U	0,4800	1,3600	0,6672

Науковці зазвичай обирають для вирішення проблеми упаковки евристичні методи, за допомогою аналізу ієрархій було доведено, що саме сценарій «евристичні методи» і є найбільш сприятливим для поставленої задачі.

1.2 Змістовна і формальна постановка задачі

1.3.1 Змістовна постановка задачі

Упакування куль – це задача геометричного проектування про розміщення непересічних нерівних куль у евклідовому просторі [2]. Постановка задачі звучить так: розташувати кулі у заданій області (контейнері) таким чином, щоб щільність зайнятого простору у контейнері була максимальна.

Класична постановка задачі збільшення суми зайнятих об'ємів куль у контейнері включає упаковку рівних куль, новизною поставленої задачі буде змінний радіус усіх упакованих куль.

У даній атестаційній роботі упаковка куль із максимальним коефіцієнтом заповнення контейнеру з умовою змінного радіусу кожного розміщеного об'єкта проводиться для ряду прикладних задач економії ресурсів при 3д-друці.

На вхід подаються кулі змінного діаметру з обмеженнями розміру на заданий діапазон, контейнер представляє собою сферу з постійним розміром. Функцією цілі є максимізація суми об'ємів упакованих куль.

У сферичний контейнер подається певний набір куль з обмеженнями, які є рухомими частками. На першому етапі обирається їх довільне розміщення у контейнері, а далі за допомогою ряду обмежень і функцій розміщуємо кулі в їх локальні оптимуми.

Метою задачі є максимізація щільності заповнення контейнера, упакованого кулями змінного розміру.

1.3.2 Формальна постановка задачі

Метою атестаційної роботи є упакування гіперкуль у гіперсферичному контейнері так, щоб щільність заповнення контейнера була максимальною (тобто об'єм упакованих гіперкуль був максимальним) та виконувались усі об-

меження на взаємне розміщення об'єктів упаковки.

На вході задані гіперкулі S_i такі, що

$$S_i(u_i) = \{(u_i) \in \mathbb{R}^d : \|u - u_i\|^2 - \hat{r}_i^2 \leq 0\},$$

де $u_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{di})$, $i \in I = \{1, 2, \dots, n\}$, – координати центру кулі S_i , радіус заданий діапазоном значень від мінімального до максимального і є змінним, необхідно упакувати в гіперкулю $C = \{X \in \mathbb{R}^d : \|X\|^2 \leq \rho_C^2\}$ з радіусом $\rho_C = \text{const}$ і центром на початку координат.

Постановка задачі виглядає наступним чином:

$$\omega^* = (u^*, r^*) = \arg \max_{\omega \in W \subset \mathbb{R}^{(d+1)n}} \kappa(\omega), \quad (1.1)$$

$$\kappa(\omega) = \sum_{i \in I_n} r_i^d - \text{функція цілі.} \quad (1.2)$$

$$W = W = \{\omega \in \mathbb{R}^{(d+1)n} : \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, (i, j) \in I, \Phi_i(u_i, r_i) \geq 0, i \in I_n,$$

$$r_i - r_{\min} \geq 0, i \in I_n, -r_i + r_{\max} \geq 0, i \in I_n\}, \quad (1.2)$$

де $\omega = (u, r)$ – вектор змінних,

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор змінних координат розміщення куль,

$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – вектор змінних радіусів куль,

$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0$ – умова розміщення куль S_i та S_j , $i, j \in I_n$ на мінімальній

відстані ρ на основі псевдонормалізованої Φ -функції.

$\Phi_i(u_i, r_i) \geq 0$ – умова розміщення кожної кулі S_i у контейнері C , Φ -функція

кулі S_i та множини $C^* = \mathbb{R}^d \setminus \text{int } C$,

2 ВИБІР ТА ОБҐРУНТУВАННЯ МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ

2.1 Основні відомості з теорії Φ -функцій

2.1.1 Поняття геометричної інформації та ϕ -об'єкту

Для розв'язання геометричного проектування перш за все необхідно формалізувати поняття геометричної інформації, оскільки в нього в процесі проектування часом вкладається різний зміст.

Усякий ϕ -об'єкт має певну просторову форму, має власні метричні характеристики, займає деяке положення в заданому просторі $\mathbb{R}$ [2].

Такі характеристики визначають геометричну інформацію про ϕ -об'єкт, в яку входять:

- сукупність просторових форм $\{s\}$;
- метричні характеристики $\{m\}$, які визначають розміри точкових множин, що мають форми з $\{s\}$;
- параметри $\{p\}$, які задають місце розташування точкових множин (S) у відповідних просторах;

Тоді геометричну інформацію можна представити у вигляді

$$g = (\{s\}, \{m\}, \{p\}).$$

Просторові форми $\{s\}$ представляють собою множини, елементи яких є класами еквівалентності на сукупності будь-яких точкових множин у відповідних лінійних метричних просторах [2]. Зокрема, кулі, кола. Зауважимо, що сукупність можливих форм точкових множин істотно залежать від того, в яких просторах ці множини розглядаються.

Об'єкт S є точковою підмножиною певного метричного простору H , якщо задані усі його компоненти геометричної інформації. Таким чином, геометрич-

на інформація g індукує об'єкт S у просторі H .

Змінні параметри називаються незалежними змінними геометричної інформації g і позначаються як $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ [2].

Нехай інформація $g = (\{s\}, \{m\}, \{p\})$. індукує точкові множини в метричному просторі H , а $g^* = (\{s^*\}, \{m^*\}, \{p^*\})$. – у метричному просторі H^* , причому компоненти $\{s\} \neq \emptyset$ і $\{s^*\} \neq \emptyset$, де $\emptyset$ – порожня множина.

Відображення наступного вигляду є задачею геометричного проектування

$$g^* = P(g),$$

де P – оператор.

Задачею оптимізації геометричного проектування називається задача геометричного проектування, в якій вектор незалежних змінних $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ визначається як розв'язок задачі оптимізації деякого функціоналу $\Xi(u)$ [3].

На практиці для вирішення завдань проектування реальних об'єктів необхідно звужити клас даних точкових множин, для цього існує поняття ϕ -об'єктів.

Непорожня точкова множина $S \subset \mathbb{R}^d$, $d=2,3$, називається ϕ -об'єктом, якщо:

- а) S – канонічно замкнена або канонічно відкрита множина [4];
- б) внутрішність ($\text{int } S$) і замикання ($\text{cl } S$) множини S мають однаковий гомотопічний тип [5];
- в) у будь-якій точці $x \in \text{cl } S$ існує окрестність $U_x \subset \text{cl } S$, така що $\text{int } U_x$ та $\text{cl } U_x$ мають один й той самий гомотопічний тип [5].

Остання вимога дозволяє виключити випадки самоперетинання границь точкових множин, так як внутрішність і замикання окресностей точок самоперетинання границь мають різні гомотопічні типи.

Ф-об'єкти як точкові множини можуть перебувати в певних відносинах між собою (перетинатися, торкатися, бути на певній відстані один від одного). Далі буде введено поняття ф-функцій, які і відповідають за формалізацію відносин ф-об'єктів [2].

У даній роботі буде розглядатися ф-об'єкт із простору $\mathbb{R}^d$, де $d \geq 4$ гіперкулі

$$S = \{u \in \mathbb{R}^d : \|u - u_0\|^2 \leq r_0^2\}.$$

2.1.2 Метод Ф-функцій Стояна

Для формалізації задач геометричного проектування введемо поняття Ф-функції.

Нехай задані обмежені замкнені ф*-об'єкти $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^d$. При розташуванні об'єктів S_1 і S_2 один відносно іншого можливі такі ситуації:

- ф-об'єкти S_1 і S_2 перетинаються, тобто $\text{int } S_1 \cap \text{int } S_2 \neq \emptyset$, де $\text{int } S_1$ – внутрішність множини S_1 ;
- ф-об'єкти S_1 і S_2 не мають спільних точок, тобто $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ та ф-об'єкти знаходяться на деякій відстані один від одного;
- ф-об'єкти S_1 і S_2 доторкаються, тобто $\text{fr } S_1 \cap \text{fr } S_2 \neq \emptyset$ та $\text{int } S_1 \cap \text{int } S_2 = \emptyset$, де $\text{fr } S_1$ – границя множини S_1 [2].

Для опису цих ситуацій у $\mathbb{R}^2$ у роботах Стояна [2, 6, 7] введено Ф-функцію, визначення якої можна розповсюдити для простору $\mathbb{R}^d$.

Характеристичні властивості Ф-функцій між ф-об'єктами S_1 і S_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(u_1, u_2) &> 0, \text{ якщо } \text{cl } S_1(u_1) \cap \text{cl } S_2(u_2) \neq \emptyset, \\ \Phi_{12}(u_1, u_2) &= 0, \text{ якщо } \text{int } S_1(u_1) \cap \text{int } S_2(u_2) = \emptyset, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\text{та } \text{fr } S_1(u_1) \cap \text{fr } S_2(u_2) \neq \emptyset, \quad (2.2)$$

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо } \text{int } S_1(u_1) \cap \text{int } S_2(u_2) \neq \emptyset. \quad (2.3)$$

Таким чином, характеристична властивість Φ -функції дозволяє визначити перетин, дотик і неперетинання відповідних точкових множин.

Будь-яка всюди визначена і неперервна функція в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, яка має властивості (2.1–2.3), називається Φ -функцією об'єктів $S_1(u_1)$ та $S_2(u_2)$, де u_1 та u_2 – параметри розміщення об'єктів S_1 і S_2 [2]. Φ -функцію можна розглядати як функцію, задану на підпросторі простору геометричної інформації.

Φ -функція $\Phi_{12}(u_1, u_2)$ називається нормалізованою, якщо її значення дорівнюють евклідовим відстаням між об'єктами $S_1(u_1)$ та $S_2(u_2)$ за умови

$$(u_1, u_2) \in G = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2d} : \text{int } S_1(u_1) \cap \text{int } S_2(u_2) = \emptyset\},$$

тобто

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) = \text{dist}(S_1(u_1), S_2(u_2)), \text{ якщо } \text{int } S_1(u_1) \cap \text{int } S_2(u_2) = \emptyset,$$

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) < 0, \text{ якщо } \text{int } S_1(u_1) \cap \text{int } S_2(u_2) \neq \emptyset,$$

де $\text{dist}(S_1(u_1), S_2(u_2)) = \min_{x_{S_1} \in S_1, x_{S_2} \in S_2} \text{dist}(x_{S_1}, x_{S_2})$ – евклідова відстань між множинами [2].

Нормалізована Φ -функція потрібна для моделювання обмежень на відстані між геометричними об'єктами.

Поверхню 0-рівня Φ -функції позначимо через

$$\gamma_{12} = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{2d} : \Phi_{12}(u_1, u_2) = 0\}.$$

Для побудови Φ -функції один з ϕ -об'єктів фіксується на початку систе-

ми координат, а неперервні трансляції відбуваються тільки зі сторони другого об'єкту, щоб вони доторкалися. У формальному вигляді це так:

$$\Phi_{12}(v_1, v_2) = \Phi_{12}(v_1 - v_2, 0) = \Phi_{12}(0, v_2 - v_1) \forall (v_1, v_2),$$

а поверхня 0-рівня Φ -функції тоді

$$\gamma_{12} = \{v \in \mathbb{R}^d : \Phi_{12}(0, v) = 0\}.$$

Ця множина конгруентна ($\simeq$) границі суми Мінковського двох об'єктів [4]. Множина $\gamma_{12} = \{v \in \mathbb{R}^d : \Phi_{12}(0, v) = 0\}$ називається також годографом функції щільного розміщення [7].

В деяких задачах побудова нормалізованих Φ -функцій є досить складною процедурою, тому при мінімально допустимих відстанях обмежень між об'єктами використовуються псевдонормалізовані Φ -функції.

Неперервна, всюди визначена функція $\hat{\Phi}^{AB} : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^1$, називається псевдонормалізованою Φ -функцією об'єктів $S_1(u_1)$ та $S_2(u_2)$, якщо вона задовольняє таким вимогам:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{12}(u_1, u_2) &< 0, \text{ якщо } \text{dist}(S_1(u_1), S_2(u_2)) < \rho, \\ \hat{\Phi}_{12}(u_1, u_2) &= 0, \text{ якщо } \text{dist}(S_1(u_1), S_2(u_2)) = \rho, \\ \hat{\Phi}_{12}(u_1, u_2) &> 0, \text{ якщо } \text{dist}(S_1(u_1), S_2(u_2)) > \rho. \end{aligned}$$

Розглянемо побудову Φ -функцій для наступних пар об'єктів: дві кулі S_1 та S_2 , доповнення до кулі S_1^* і куля S_2 .

Нехай кулі S_1 і S_2 задані відповідними радіусами r_1 та r_2 . Тоді отримаємо

$$T_{12} = S_1(0) + (-1)S_2(0) = \{(x, y, z) : \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - (r_1 + r_2)^2 \leq 0\}.$$

Поверхню $\gamma_{12} = \text{fr} T_{12}$ (рис. 2.1) можна описати рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$. Рівняння $\varphi(x, y, z) = 0$ – орієнтовне.

Φ -функція куль $S_1(u_1)$ і $S_2(u_2)$ задається таким чином:

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) = \varphi(u_2 - u_1).$$

Для побудови нормалізованої Φ -функції куль $S_1(u_1)$ та $S_2(u_2)$ функцію $\varphi(x, y, z)$ замінюємо функцією

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (r_1 + r_2).$$



Рисунок 2.1 – Функція γ_{12} для $S_1(u_1)$ та $S_2(u_2)$

Таким чином нормалізована Φ -функція куль $S_1(u_1)$ і $S_2(u_2)$ прийме вигляд:

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) = \tilde{\varphi}(u_2 - u_1). \quad (2.4)$$

Зауважимо, що

$$\min\{\Phi_{12}(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^6\} = -(r_1 + r_2)^2,$$

$$\min\{\Phi_{12}(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^6\} = -(r_1 + r_2).$$

Нехай тепер S_1^* і S_2 задані радіусами r_1 та r_2 , відповідно, при цьому $r_1 \geq r_2$. У такому випадку отримаємо

$$T_{12} = S_1^*(0) + (-1)S_2(0) = \{(x, y, z) : \varphi(x, y, z) = (r_1 - r_2)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 0\}.$$

Отже, поверхню γ_{12} (рис. 2.2) можна описати рівнянням $\varphi(x, y, z) = 0$.

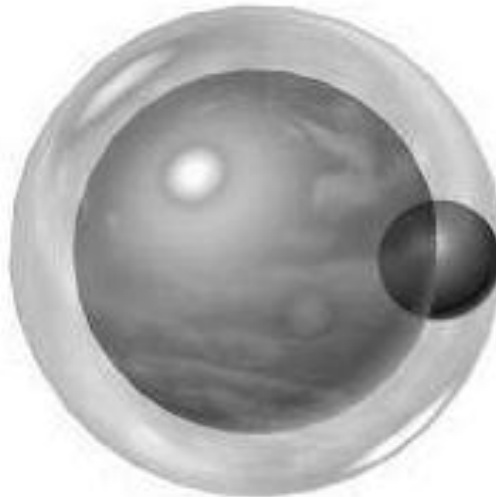


Рисунок 2.2 – Функція γ_{12} для $S_1^*(u_1)$ та $S_2(u_2)$

Φ -функція $S_1^*(u_1)$ та кулі $S_2(u_2)$ задається так:

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) = \varphi(u_1 - u_2).$$

Для побудови нормалізованої Φ -функції потрібно замість функції φ використати функцію

$$\varphi(x, y, z) = (r_1 - r_2) - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Таким чином, нормалізована Φ -функція $S_1^*(u_1)$ та кулі $S_2(u_2)$ приймає наступний вигляд:

$$\Phi_{12}(u_1, u_2) = \tilde{\varphi}(u_2 - u_1). \quad (2.5)$$

Зауважимо, що

$$\max\{\Phi_{12}(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^6\} = (r_1 - r_2)^2$$

та

$$\max\{\Phi_{12}(u_1, u_2) : (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^6\} = r_1 - r_2.$$

2.2 Задачі розміщення гіперкуль

Модель задачі розміщення гіперкуль.

Нехай задані гіперкулі

$$S_i = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^d : \|X - u_i\|^2 \leq r_i^2\},$$

де $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$ – вектор координат центру r_i – радіус гіперкулі S_i , $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ та контейнер $A(\mu) \subset \mathbb{R}^{nd+k}$, де $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ – вектор змінних метричних характеристик контейнеру. У нашому випадку контейнер $A(\mu)$ має форму гіперсфери. Необхідно розмістити кулі $\{S_i, i \in I_n\}$ у області $A(\mu)$ таким чином, щоб виконувалися обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij}

між гіперкулями S_i та S_j , $i < j \in I$, тобто

$$d_{ij} = \text{dist}(S_i(u_i), S_j(u_j)) = \min_{a \in S_i(u_i), b \in S_j(u_j)} \rho(a, b),$$

де $\rho(a, b)$ – евклідова відстань [3] між точками $a, b \in \mathbb{R}^d$, при цьому функція цілі $\kappa(\omega)$ досягла свого екстремального значення.

Математична модель задачі розміщення гіперкуль буде виглядати наступним чином:

$$\omega^* = (u^*, \mu^*, t^*) = \arg \max_{\omega \in D \subset \mathbb{R}^{(n+k)-d}} \kappa(\omega), \quad (2.6)$$

де $\omega = (u, \mu, t)$ – вектор змінних; область допустимих розв’язків:

$$D = \{\omega \in \mathbb{R}^{nd+k} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I, j > i, \Phi_i(u_i, t) \geq 0, i \in I\},$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор координат центрів гіперкуль;

$t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ – вектор бінарних змінних: $t_i \in B = \{0, 1\}$,

$$t_i = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, \\ 0, \text{ в іншому випадку;} \end{cases}$$

Φ -функція куль S_i та S_j , $i < j \in I$;

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2, \quad (2.7)$$

$\Phi_{i0}^c(u_i, \mu)$ – Φ -функція гіперкулі S_i та множини $A^*(\mu) = \mathbb{R}^{d+k} \setminus \text{int } A(\mu)$, $i \in I_n$.

Основними особливостями задачі розміщення гіперкуль є наступне:

- область допустимих розв’язків D є незв’язною множиною з багатозв’язними компонентами зв’язності [1];
- якщо Φ -функції, які описують область допустимих розв’язків D , містять оператори максимумів, вона може бути подана як

$$D = \bigcup_{t=1}^{\eta} D_t,$$

де множини D_t описуються системами двічі неперервно диференційованих функцій;

- кількість змінних задачі (2.6)–(2.7) оцінюється як $O(n)$, а кількість нерівностей, які описують область D , – як $O(n^2)$ [3].

Загалом, існує два основні види задач розміщення гіперкуль: задача зі змінними метричними характеристиками (розміром) контейнера (Open Dimension Problem – ODP) або задача, сформульована як задача про рюкзак (knapsack Problem – KP) [11].

Задача пакування рюкзака (KP) пов’язана із вибором підмножини гіперкуль із заданого набору, що мають бути щільно розміщені у «рюкзак», тобто фіксований контейнер. Функцією цілі є максимізація коефіцієнту щільності заповнення контейнера. У випадку розміщення нерівних гіперкуль задача еквівалентна максимізації об’єму розміщених гіперкуль, а у випадку рівних гіперкуль – їх кількості.

У задачі відкритого виміру (open dimension problem – ODP) зі змінним розміром контейнеру треба розмістити всі гіперкулі із заданого набору, а метричні характеристики контейнеру виступають незалежними змінними [10]. Функція цілі – мінімізація змінної метричної характеристики контейнеру.

2.2.1 Математична модель задачі упаковки як задачі про рюкзак (3P Knapsack Problem)

Розглянемо постановку задачі про рюкзак (ЗР).

Нехай задані гіперкулі S_i із однаковими радіусами r_i , $i \in I_n$, та область розміщення $C \in \mathbb{R}^d$. Необхідно розмістити гіперкулі з набору S_i , $i \in I_n$, в області C таким чином, щоб між гіперкулями S_i і S_j , $i < j \in I_n$, виконувалось обмеження на мінімально допустимі відстані d_{ij} , при цьому коефіцієнт заповнення області C був максимальним. Тобто у результаті потрібно знайти координати центрів упакованих гіперкуль із максимальною сумою d -вимірних об'ємів [3].

Математична модель ЗРГ (2.6) – (2.7) для упаковки рюкзак в такому випадку виглядає наступним чином:

$$(u^*, t^*) = \arg \max_{(u, t) \in W_{KP} \subset (\mathbb{R}^{nd} \times B^n)} \Psi(u, t), \quad (2.8)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, $t_i \in B = \{0, 1\}$, $i \in I_n$;

$$\Psi(u, t) = \sum_{i=1}^n r_i^d t_i,$$

$$t_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$W_{KP} = \{(u, t) \in (\mathbb{R}^{nd} \times B^n) : t_i t_j \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i < j \in I_n, g_q(u, t) \geq 0, q \in I_q\}, \quad (2.9)$$

$$\Phi_i(u_i) = \min\{\Phi_{i0}^c(u_i), \Phi_{il}^c(u_i), l \in I_p\},$$

$$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + d_{ij})^2. \quad (2.10)$$

У моделі задачі упаковки рюкзак нерівність $\Phi_i(u_i) \geq 0$ гарантує розміщення гіперкуль S_i , $i \in I_n$, в області C ; двійкова змінна t_i показує, чи

знаходиться гіперкуля S_i у контейнері C ; нерівність на основі нормалізованої Φ -функції куль $\widehat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ забезпечує розміщення гіперкуль S_i та S_j на мінімально допустимій відстані d_{ij} , $i < j \in I_n$.

Основні властивості поставленої задачі (2.8)–(2.10).

Властивість 1. Вона є задачею змішаного цілочислового нелінійного програмування (mixed-integer non-linear programming) [12]: змінні t_i , $i \in I_n$, є бінарними (двійковими), а змінні u_i , $i \in I_n$, – неперервні;

Властивість 2. Функція цілі $\Psi(u, t)$ – кусково-стала через множники t_i та пропорційна сумі d -вимірних об'ємів гіперкуль, що розмістилися у контейнері ($t_i = 1$).

Властивість 3. Якщо всі гіперкулі з набору куль, упаковані в контейнер, то функція цілі $\Psi(u, t)$ досягає глобального максимуму $\Psi^* = \sum_{i=1}^n r_i^d$.

Властивість 4. Глобальні і локальні максимуми є нестрогими.

Властивість 5. Кожному $t \in B^n$ відповідає деякий набір гіперкуль, для яких частина значень $t_i = 1$, а решта – $t_i = 0$, $i \in I_n$. Тоді множина $W^t = \{u \in \mathbb{R}^{dn} : (u, t) \in W_{KP}\}$ задає допустимі розміщення гіперкуль в області C , для яких $t_i = 1$, $i \in I_n$.

Властивість 6. Кількість обмежень, що задають множину W^t , – не більше, ніж C_n^2 та визначається кількістю пар компонентів одночасно не рівних нулю у наборі $t \in B^n$.

Властивість 7. Кількість елементів $t_i = 1$, $i \in I_n$, відповідає кількості рівних гіперкуль.

Розв'язанням задачі буде здійснення перебору всіх 2^n елементів $t \in B^n$ та визначення точки $u^t \in W^t$ для кожної множини W^t .

Математичні моделі задачі упаковки рюкзака можуть мати додаткові обмеження і властивості залежно від вимірності гіперкуль, просторової форми області розміщення, особливостей метричних характеристик гіперкуль,

наявності додаткових обмежень [3].

2.2.2 Дослідження особливостей математичної моделі задачі ODP

У задачі відкритого виміру змінні метричні характеристики контейнеру виступають у ролі незалежних змінних, що впливають на розмірність і складність задачі. Далі для теоретичного підґрунтя представлена класична задача open dimension problem для куль у контейнері [11].

Необхідно розмістити кулі S_i , з радіусами r_i , $i \in I$, в області розміщення $C(\mu)$, де μ – змінна метрична характеристика контейнера, таким чином, щоб функція цілі досягала свого екстремального значення. Функцією цілі обирається метрична характеристика контейнеру μ , яку треба мінімізувати. Можна також обрати будь-яку іншу функцію.

Математична модель задачі може бути зображена в такий спосіб: знайти

$$(u^*, \mu^*) = \arg \min_{(u, \mu) \in D_{ODP} \subset \mathbb{R}^{nd+k}} \kappa(u, \mu), \quad (2.11)$$

де $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор координат центрів гіперкуль;

$$D_{ODP} = \{(u, \mu) \in \mathbb{R}^{nd+k} : \Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0, i, j \in I, j > i, \Phi_i(u_i, \mu) \geq 0, i \in I, g_q(u, \mu) \geq 0, q \in I_q\} \quad (2.12)$$

– область допустимих розв'язків;

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2 \quad (2.13)$$

– Φ -функція куль S_i та S_j , $i < j \in I$;

$g_q(u, \mu) \geq 0$, $q \in I_q$, – додаткові обмеження на розміщення гіперкуль та мет-

ричні характеристики контейнера, $g_q(u, \mu)$ – двічі неперервно диференційовані функції;

$\Phi_i(u_i)$ – Φ -функція кулі S_i та множини $C^* = cl(\mathbb{R}^{nd} \setminus C)$, де $cl(\circ)$ – замкнення множини $(\circ)$ [3].

Нерівності $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$, $i, j \in I$, забезпечують не перетинання куль S_i та S_j ($\text{int } S_i \cap \text{int } S_j = \emptyset$, $\text{int}(\circ)$ – внутрішність множини $(\circ)$), а нерівності $\Phi_i(u_i) \geq 0$, $i \in I$, гарантують знаходження куль S_i у контейнері C ($S_i \subset C$).

Вигляд функції $\Phi_i(u_i, \mu)$ залежить від типу контейнеру C . У роботі розглядається сферичний тип контейнеру різної вимірності.

Розглянемо основні особливості задачі (2.11) – (2.13):

а) кількість змінних $nd + k$ залежить від кількості куль, розміру простору, в якому відбувається розміщення, та кількості змінних метричних характеристик контейнеру;

б). кількість нерівностей, які описують область допустимих розв'язків, – $n + C_n^2$;

в) матриці Якобі й Гесса функцій, які описують обмеження, є сильно розрідженими. (Обмеження $g(\omega) \geq 0$ називається активним в точці ω^0 , якщо $g(\omega^0) = 0$.) У міру того як розмірність збільшується, кількість активних обмежень значно зростає. Тому збільшення розмірності спричиняє збільшенню обчислювальної складності алгоритмів для щільного розміщення гіперкуль;

г) область допустимих розв'язків D є незв'язною множиною, тобто D можна зобразити таким чином

$$D = \bigcup_{l=1}^{\eta} D_l, D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j.$$

За певних співвідношень розмірів куль та контейнеру багатозв'язність може виникнути й при розміщенні в просторах розмірності $d \geq 3$ [3];

д) кожна компонента зв'язності області D є багатозв'язною.

Кожна нерівність $\|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2 \geq 0$ визначає двозв'язну множину у просторі $\mathbb{R}^{nd+k}$. Тому, D є принаймні $\frac{n(n-1)}{2}$ – зв'язною множиною;

е) задача є нестійкою, невеликі зміни початкових даних значною мірою впливають на результат розв'язку та значення функції цілі;

є) якщо межа контейнера складається із поверхонь або гіперповерхонь, що описуються лінійними та обернено-опуклими функціями, тоді екстремум лінійної функції цілі знаходиться в крайніх точках області D , що є розв'язком системи з $nd + k$ рівнянь, які описують межу D . Цей факт впливає з аналізу необхідної та достатньої умов оптимальності в задачах. У випадку, коли присутні опуклі обмеження, в крайніх точках можуть бути активними й менше, ніж $nd + k$ нерівностей, які описують область D .

2.3 Моделювання відношень гіперкуль у задачах розміщення куль різних вимірностей

Об'єктами розміщення у задачах розміщення є гіперкулі різної вимірності $S_i \subset \mathbb{R}^d$, $i \in I_n$, $d \geq 2$. Для опису допустимих розміщень між геометричними об'єктами задачі (задач (2.8) – (2.10) та (2.11) – (2.13)) використовуються Φ -функції [2]. Нагадаємо, що Φ -функція двох гіперкуль має вигляд:

$$\Phi_{ij}(u_i, u_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j)^2.$$

Розглянемо Φ -функції гіперкуль та куль у різних арифметичних евклідових просторах розмірностей $d = 2$, $d = 3$, та $d \geq 4$.

Почнемо огляд задачі упакування куль з двовимірного простору. За контейнер візьмемо круг S_2 .

Нехай задані круги $S_i = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$ із радіусом r_i , $u_i = (x_i, y_i)$,

$i \in I_n$, – координати центра круга.

Параметри контейнера круга $C2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho \}$ із радіусом ρ , центр знаходиться на початку координат, за допомогою Φ -функції круга S_i та об'єкта $C^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int}(C2)$ отримуємо нерівність розміщення круга в контейнері [13]

$$\Phi^{SC}(x_i, y_i) = -x_i^2 - y_i^2 + (\rho - r_i)^2 \geq 0. \quad (2.14)$$

Для моделювання відношень куль та 3D кулі маємо наступне.

Розглядається просторова форма контейнера – куля $S3$. Контейнер є областю розміщення. Якщо куля $S3$ має одну зону заборони – кулю (центри куль співпадають), то отримуємо кульовий шар SL .

Куля S_i і контейнер куля $S3 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| \leq \rho\}$: Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта $S3^*$ має вигляд

$$\Phi^{SS3}(x_i, y_i, z_i) = -x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 + (\rho - r_i)^2 \geq 0. \quad (2.15)$$

Моделювання відношень гіперкуль та dD контейнеру, $d \geq 4$.

Розглянемо відношення гіперкуль $S_i = \{u \in \mathbb{R}^d : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$ з радіусом r_i , де $u_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$, $i \in I_n$, та контейнеру гіперкулі HS з центром на початку координат

Гіперкуля S_i , $i \in I_n$, і гіперкуля

$$HS = \{u = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \|u\|^2 \leq \rho^2$$

з радіусом ρ . Φ -функція S_i , $i \in I_n$, та об'єкта HS^* має вигляд

$$\Phi^{SHS}(u_i) = -\|u_i\| + (\rho - r_i)^2 \geq 0. \quad (2.16)$$

Функція 2.16 знадобиться для побудови відносин гіперкуль у постановці задачі і контейнеру.

2.4 Метод розв'язання задачі упаковки нерівних куль у гіперсферичному контейнері

Нехай задані кулі $S_i = S_i(u_i) = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^d : \|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$, де $u_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{di})$ – вектор змінних координат центрів, r_i – змінний радіус кулі S_i , $i \in I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $r_{\min} < r_i < r_{\max}$, $r_{\max} > r_{\min} > 0$, $r_{\max}, r_{\min}$ – межі діапазону радіусів куль S_i . Задана область у вигляді гіперсфери :

$$C \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d,$$

де $C = \{X \in \mathbb{R}^d : \|X\|^2 \leq \rho^2\}$, – рівняння сферичного контейнеру.

Умови розміщення куль S_i , $i \in I_n$, у контейнері C виглядають наступним чином:

– умови включення куль до області

$$S_i \subset C, i \in I_n;$$

– умови реального застосування вимагають мінімально допустимої відстані $\rho > 0$ між кулями

$$\text{dist}(S_i, S_j) \geq \rho, S_i \text{ та } S_j, (i, j) \in \Xi,$$

де $\Xi = \{(i, j) \mid i < j \in I_n\}$, $\text{dist}(S_i, S_j) = \min_{a \in S_i, b \in S_j} \rho(a, b)$, $\rho(a, b)$ – евклідова відстань між $i \in \mathbb{R}^d$ та $j \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

Метою задачі є розміщення куль S_i , $i \in I_n$, в області C таким чином, щоб n куль належали гіперсфері C , $\sum_{i \in I_p} \tau_i = N$, і дотримувалася мінімально допустима відстань ρ між кулями S_i та S_j , $i, j \in I_n$, при цьому коефіцієнт заповнення контейнера був максимальним.

Математична модель поставленої задачі виглядає так:

$$\omega^* = (u^*, r^*) = \arg \max_{\omega \in W \subset \mathbb{R}^{(d+1)n}} \kappa(\omega), \quad (2.17)$$

де $\omega = (u, r)$ – вектор змінних,

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – вектор змінних координат розміщення куль,

$r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – вектор змінних радіусів куль,

$$\kappa(\omega) = \sum_{i \in I_n} r_i^d \quad (2.18)$$

– функція цілі,

$$W = \{\omega \in \mathbb{R}^{(d+1)n} : \hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0, (i, j) \in I, \Phi_i(u_i, r_i) \geq 0, i \in I_n, \quad (2.19)$$

$$r_i - r_{\min} \geq 0, i \in I_n, -r_i + r_{\max} \geq 0, i \in I_n\},$$

$\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) \geq 0$ – умова розміщення куль S_i та S_j , $(i, j) \in I_n$ на мінімальній відстані ρ , $\hat{\Phi}_{ij}(u_i, u_j, r_i, r_j) = \|u_i - u_j\|^2 - (r_i + r_j + \rho)^2$ – псевдонормалізована Ф-функція куль S_i та S_j , $i, j \in I$,

$\Phi_i(u_i, r_i) \geq 0$ – умова розміщення кожної кулі S_i у контейнері C , на основі

Φ -функція кулі S_i та множини $C^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } C$,

$$\Phi_i(u_i, r_i) = -\|u_i\|^2 + (\rho_C - r_i + \rho)^2, \quad i \in I_n,$$

Основні властивості даної задачі:

- належить до нелінійного програмування;
- область допустимих розв'язків W є незв'язною множиною з багатозв'язними компонентами зв'язності;
- якщо Φ -функції, які описують область допустимих розв'язків W , містять оператори максимумів, вона може бути подана як

$$W = \bigcup_{t=1}^{\eta} W_t,$$

де множина W_t описується системами з неперервно диференційованими функціями;

- кількість змінних задачі (2.17) – (2.19) оцінюється як $O(N)$, а кількість нерівностей, які описують область W , – як $O(N^2)$.

Стратегія розв'язку поставленої задачі проходить у три етапи:

- а) методи побудови допустимих початкових точок області допустимих розв'язків;
- б) методи локальної оптимізації;
- в) методи глобальної оптимізації.

2.4.1 Побудова допустимих початкових точок

Для побудови початкових точок оберемо гіперсферичну систему координат [3]. Розміщення точок:

$$\tilde{X}^j = (\tilde{r}_1^j, \tilde{r}_2^j, \dots, \tilde{r}_\lambda^j, \tilde{u}_1^j, \tilde{u}_2^j, \dots, \tilde{u}_\lambda^j) \in M_\lambda, j \in J_\xi = \{1, 2, \dots, \xi \leq 100\},$$

здійснюється випадковим способом за таким алгоритмом:

а) задаємо початковий діапазон значень радіусів гіперкуль $r_i \in [r_{\min}, r_{\max}]$, $r_{\min} < r_{\max}$;

б) задаємо $i=1$ (номер гіперкулі). Випадково вибираємо значення $\mu_i \in [0, \rho - r]$, $\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{i,(d-2)} \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\phi_{i,(d-1)} \in [-\pi, \pi]$ та обчислюємо координати центрів гіперкуль S_1

$$\begin{aligned} x_{i1} &= \mu_i \cos \phi_{i1}, \\ x_{i2} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \cos \phi_{i2}, \\ x_{i3} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \sin \phi_{i2} \cos \phi_{i3} \dots, \\ x_{i,(d-1)} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \sin \phi_{i2} \dots \sin \phi_{i,(d-2)} \cos \phi_{i,(d-1)}, \\ x_{id} &= \mu_i \sin \phi_{i1} \sin \phi_{i2} \dots \sin \phi_{i,(d-2)} \sin \phi_{i,(d-1)}; \end{aligned} \quad (2.20)$$

в) збільшуємо i на 1, $t=0$, $r_2 = 0.9^t r$;

г) задаємо $c=0$ (кількість спроб);

д) випадково вибираємо $\mu_i \in [0, \rho - r]$, $\phi_{i1}, \phi_{i2}, \dots, \phi_{i,(d-2)} \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\phi_{i,(d-1)} \in [-\pi, \pi]$ та за формулами (2.20) обчислюємо координати центрів гіперкуль S_i ;

е) якщо $\Phi_{li}(r_l, r_i, u_l, u_i) \geq 0$ для всіх $l=1, 2, \dots, i-1$, то переходимо до п. 9.

є) збільшуємо c на 1;

ж) якщо $c=10000$, то збільшуємо t на 1, задаємо $r_i = 0.9^t r$ і повертаємося до п. 8. В іншому випадку ($c < 10000$) і повертаємося до п. 5;

з) якщо $i = \lambda$, то всі гіперкулі розміщені (критерій зупинки). В іншому випадку повертаємося до п. 3.

2.4.2 Метод локальної оптимізації

Для пошуку локального максимуму задачі використовується метод декомпозиції задачі (2.17) – (2.19). Для зменшення обчислювальної складності алгоритму застосовано метод декомпозиції та стратегію активного набору нерівностей. Після локальної оптимізації необхідно виконати пошук глобального оптимуму. Використання метода мультистарту дає змогу вибрати ліпшу точку локального максимуму задачі.

Стратегія розв’язання задачі упаковки куль у сферичний контейнер складається з трьох основних етапів. Спочатку ми генеруємо ряд вихідних точок з допустимого набору (2.17). Потім, починаючи з кожної точки, отриманої на першому етапі, шукаємо локальний мінімум цільової функції $\omega^*(u^*, r^*)$ завдання (2.17) – (2.19). Останнім етапом ми обираємо кращий локальний мінімум зі знайдених на Етапі 2. Це наше краще наближення до глобального розв’язку задачі (2.17) – (2.19).

Істотною частиною схеми локальної оптимізації (етап 2) є алгоритм декомпозиції, який зменшує розмірність проблеми і час обчислень. Завдяки цьому зменшенню така стратегія може обробляти великі набори неідентичних опуклих об’єктів (100 і більше). Схема, яка використовується алгоритмом, описана нижче. Фактично пошук локального мінімуму здійснюється за допомогою створеного програмного продукту (лістинг програми у Додатку Б)

Наведемо опис алгоритму декомпозиції.

Нехай $u^{(0)} \in W$ одна з вихідних точок, знайдених попереднім методом. Розглянемо основну ідею алгоритму.

Спочатку опишемо кулю C_i радіусу a_i , навколо кожний об’єкт E_i , $i=1,2,\dots,n$. Тоді для кожної кулі C_i будується власний великий контейнер $\Omega_i \supset C_i \supset E_i$ з рівносторонніми лінійними обмеженнями $a_i + \varepsilon$, $i=1,2,\dots,n$ такі, що C_i , E_i Ω_i мають однаковий центр (x_i^0, y_i^0) за умови, що сторони Ω_i паралельні сторонам Ω , а a_i діаметр E_i . Беремо фіксоване значення ε із

$\varepsilon = \sum_{i=1}^n a_i / n$. Далі ми фіксуємо положення кожного окремого контейнера Ω_i , нехай алгоритм локальної оптимізації розміщує відповідний об'єкт E_i тільки всередині контейнера. Очевидно, що якщо два окремі контейнери Ω_i і Ω_j не мають спільних точок $\rho = 0$, $\Phi^{\Omega_i \Omega_j} \geq 0$ (або відстань $\text{dist}(\Omega_i, \Omega_j) \geq \rho$ for $\rho > 0$, тобто $\widehat{\Phi}^{\Omega_i \Omega_j} \geq 0$), тоді нам не потрібно перевіряти перетинання або відстань у відповідній парі об'єктів E_i і E_j .

Вищевказана ключова ідея зі статті [8] дозволяє нам виділити підмножини нашого можливого набору W з поставленої задачі на кожному кроці алгоритму оптимізації наступним чином.

Ми створюємо систему нерівностей додаткових обмежень на трансльованому векторі v_i кожного об'єкта E_i у вигляді $\Phi^{C_i \Omega_{li}^*} \geq 0$, $i \in I_n$, де $\Phi^{C_i \Omega_{li}^*} = \min\{-x_i + x_i^0 + \varepsilon, -y_i + y_i^0 + \varepsilon, x_i - x_i^0 + \varepsilon, y_i - y_i^0 + \varepsilon\}$ – Φ -функція для кулі C_i і об'єкта $\Omega_{li}^* = \mathbb{R}^d / \text{int} \Omega_{li}$.

Нерівність $\Phi^{C_i \Omega_{li}^*} \geq 0$ еквівалентна системі нерівностей

$$\begin{cases} -x_i + x_i^0 + \varepsilon \geq 0, \\ -y_i + y_i^0 + \varepsilon \geq 0, \\ x_i - x_i^0 + \varepsilon \geq 0, \\ y_i - y_i^0 + \varepsilon \geq 0. \end{cases}$$

Тоді ми формуємо новий підпростір, визначений

$$W_1 = \{u \in R^{\sigma - \sigma_1} : \widehat{\Phi}_{ij}' \geq 0, (i, j) \in I_1, \widehat{\Phi}_i \geq 0, \Phi^{C_i \Omega_{li}^*} \geq 0, i \in I_n\},$$

де $I_1 = \{(i, j) : \widehat{\Phi}^{\Omega_{li} \Omega_{lj}} < 0, i > j = 1, 2, \dots, n\}$.

Іншими словами, ми видаляємо зі системи, яка описує можливу область

W , нерівності квазі- Φ -функцій для всіх пар об'єктів, окремі контейнери яких не перекриваються, і додаємо додаткові нерівності. $\Phi^{C_i \Omega_{1i}} \geq 0$, які описують утримання куль C_i в окремих контейнерах Ω_{1i} , $i = 1, 2, \dots, n$ [2]. Таким чином зменшуємо кількість додаткових змінних σ_1 . Тоді наш алгоритм шукає точку локального мінімуму $u_{w_1}^*$ підзадачі

$$\min_{u_{w_1} \in W_1 \subset R^{\sigma-\sigma_1}} F(u_{w_1}^*).$$

Коли точка $u_{w_1}^*$ знайдена, вона використовується для побудови вихідної точки $u^{(1)}$ для наступної ітерації процедури оптимізації.

На цій ітерації ми знову визначаємо всі пари об'єктів в окремі контейнери, що не перетинаються, утворюючи відповідний підпростір W_2 (аналогічно до W_1), і тепер нехай алгоритм шукає локальний мінімум $u_{w_2}^* \in W_2$. Отриманий локальний мінімум $u_{w_2}^*$ використовується для побудови стартової точки $u^{(2)}$ для третьої ітерації, тощо.

Далі розв'язуємо k -ту підзадачу з початковою точкою $u^{(k-1)}$ у підпросторі W_k :

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset R^{\sigma-\sigma_1}} F(u_{w_k}^*),$$

$$W_k = \{u \in R^{\sigma-\sigma_1} : \hat{\Phi}_{ij}' \geq 0, (i, j) \in I_k, \hat{\Phi}_i \geq 0, \Phi^{C_i \Omega_{1i}} \geq 0, i \in I_n\},$$

де $I_k = \{(i, j) : \hat{\Phi}^{\Omega_{ki} \Omega_{kj}} < 0, i > j = 1, 2, \dots, n\}$.

Якщо точка $u_{w_k}^*$ є точкою локального мінімуму k -ї підзадачі, вона належить до межі «штучної» підмножини

$$\Pi_k^\varepsilon = \{u \in R^{\sigma-\sigma_k} : -x_i + x_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, -y_i + y_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0,$$

$$x_i - x_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, y_i - y_i^{(k-1)} + \varepsilon \geq 0, i = 1, \dots, n\},$$

тобто $u_{w_k}^* \in fr \Pi_k^\varepsilon$, беремо точку $u_{w_k}^* = u^{(k)}$ у якості центру для нової підмножини Π_{k+1}^ε і продовжуємо оптимізаційний процес, в іншому випадку, якщо $u_{w_k}^* \in \text{int} \Pi_\varepsilon^k$, можемо припинити ітераційний процес [9].

Зазначимо, що відстань $\text{dist}(u_{w_k}^*, u_{w_k}^*) \geq \varepsilon$, якщо $u_{w_{k+1}}^* \in fr \Pi_\varepsilon^k$, і значення ε значно більше, ніж точність програми 10^{-8} . Таким чином, можна зробити висновок, що умова зупину алгоритму декомпозиції завжди досягається за скінченну кількість ітерацій.

Ми стверджуємо, що точка $u^* = u^{(k)*} = (u_{w_k}^*, \tau_{k*}) \in R^\sigma$ є точкою локального мінімуму задачі, де $u_{w_k}^* \in R^{\sigma-\sigma_k}$ – остання точка ітераційного процесу і τ_k^* – є вектором перевизначених значень раніше видалених додаткових змінних $\tau_k \in R^{\sigma_k}$. Твердження походить від того, що будь-якому розташуванню кожної пари об'єктів E_i та E_j , $(i, j) \in I \setminus I_k$, гарантує, що завжди існує вектор τ_k додаткових змінних, таких що $\hat{\Phi}_{ij}' \geq 0$, $(i, j) \in I \setminus I_k$ у точці $u^{(k)*}$. Тут $I = \{(i, j), i > j = 1, 2, \dots, n\}$. Тому значення додаткових змінних вектора τ_k не впливають на значення цільової функції $F(u_{w_k}^*) = F(u^{(k)*})$. Ось чому не потрібно перевизначати видалені додаткові змінні вектора τ_k на останньому кроці алгоритму.

Тож, доки є $O(n^2)$ пар об'єктів у контейнері, алгоритм може в більшості випадків лише активно керувати $O(n)$ парами об'єктів (залежить від розміру об'єктів і значення ε), оскільки для кожного об'єкта слід контролювати його «k-сусідів» [9].

Параметр ε забезпечує баланс між кількістю нерівностей у кожній підзадачі нелінійного програмування та кількістю підзадач, які нам потрібно генерувати та розв'язувати для отримання локального оптимального рішення пробле-

ми.

2.4.3 Методи глобальної оптимізації

З урахуванням багатоекстремальності задач розміщення є необхідність вибору кращого варіанту розміщення об'єктів. Загалом, безпосередній перебір усіх варіантів неможливий через NP-складність задач розміщення. Тому для цілеспрямованого пошуку кращих варіантів обираються методи, в основі яких перегляд частини множини розв'язків із відтинанням заздалегідь неперспективних підмножин (методи гілок та меж й околів, що звужуються). Розробляється метод гомотетичних перетворень, який за рахунок уведення змінних метричних характеристик дає можливість отримати наближення до глобального екстремуму задачі розміщення рівних гіперкуль, та метод спрямованого перебору локальних екстремумів, що здійснює плавний перехід від одного локального екстремуму до іншого, з кращим значенням функції цілі.

Метод мультистарту застосовується разом з усіма методами локальної й глобальної оптимізації, окрім методу гілок та меж. Як наближення до глобального екстремуму задачі вибирається найкращий локальний екстремум або наближення до локального екстремуму. Він є узагальненим підходом до розв'язання задачі глобальної оптимізації. Велика частина ефективних методів глобальної оптимізації заснована на ідеї запуску алгоритмів локального пошуку з множини точок, рівномірно розподілених у просторі $\mathbb{R}$. Методи випадкового пошуку глобальних екстремумів багатовимірних функцій дають високу ймовірність досягнення поставленої мети [14].

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Бібліотека OpenGL для візуалізації

Візуалізація результатів обчислювального експерименту зроблена за допомогою бібліотеки OpenGL, з використанням інструментарію C / C ++, для побудови тривимірних зображень, так само як реалізують найпростіші тривимірні перетворення (обертання, переміщення в площині, тощо).

Картинка, яка відображається на екрані монітора, являє собою двовимірний масив найпростіших елементів зображення (растр пікселів). Кожен з пікселів відображається на екрані у відповідному положенні певним кольором заданим в системі RGB. Графічні бібліотеки операційних систем, які використовуються в основному для формування призначеного для користувача інтерфейсу, надають функції саме для формування растрового зображення (відображення двовимірних графічних примітивів, визначення властивостей олівця і пензля, заливки кольором областей растра, тощо). При візуалізації, моделюванні та проектуванні цих можливостей явно недостатньо. У першу чергу, хотілося б працювати не з цілочисельними індексами растра, а з моделлю в тривимірній системі координат. По-друге, потрібні ефективні операції для реалістичного відображення складних об'єктів з урахуванням властивостей матеріалів і освітлення. По-третє, необхідні ефективні операції для організації інтерактивної взаємодії зі сценою в цілому і з кожним об'єктом окремо. Такі можливості надає нам бібліотека OpenGL [15].

3.2 Опис програми

Для розв'язання задач лінійного та нелінійного програмування використовувався пакет програм IPOPT.

Для побудови використаного розв'язку у вигляді 3d-моделі використовувався програмний продукт, який розроблено з використанням мови Delphi та

може бути використане як при розв'язанні окремих задач розміщення гіперкуль різної вимірності, так і при створенні інформаційної системи підтримки прийняття рішень у геометричному проектуванні. Лістинг програми у Додатку Б.

Програмне забезпечення складається з таких модулів [3]:

- введення початкових даних;
- обчислення Φ -функцій;
- формування початкових точок;
- локальної оптимізації;
- глобальної оптимізації;
- графічної візуалізації.

Модульність програмного забезпечення дозволила виконати декомпозицію алгоритму, що скорочує час розв'язання задач.

Далі запрограмуємо розв'язок задачі для 25 куль вимірності 3D з різним параметром відстані між кулями у сферичному контейнері.

Параметри комп'ютера, на якому проводились обчислювальні експерименти: процесор AMD Ryzen 5 4500U 2,38 GHz, 8 Gb оперативної пам'яті.

Розв'язання задачі нелінійного програмування (2.17) – (2.19) здійснюється за допомогою програмного продукту написаного на мові програмування Delphi. Незважаючи на те, що для розв'язання задач використовуються наближені методи й тому отримані локальні екстремуми є наближеними, в наведених прикладах виконуються всі геометричні обмеження задачі: ненакладання куль та розміщення куль у контейнері.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

4.1 Обчислювальні експерименти

Приклад 1. На вхід подаються кулі $S_i = S_i(u) = \{\|u - u_i\|^2 \leq r_i^2\}$, де $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots, 25$, зі змінним радіусом $r_i \in [0.3, 2.5]$ необхідно розмістити у контейнер шар C із постійним радіусом $\rho_C = 5.2$. Нехай задана дистанція між кулями $\rho = 0.5$.

Результати чисельного розв'язку задачі (2.1-2.3) із заданими умовами (отримані координати центрів куль та радіуси) наведені в табл. 4.1. Максимальне значення суми об'ємів куль у контейнері – $\omega^*(u^*, r^*) = 0.4158$.

Таблиця 4.1 – Результати першого обчислювального експерименту

S_i	r_i	x_i	y_i	z_i
1	1.2472	0.7031	-3.8897	0.0248
2	1.7923	-2.0451	1.3449	-2.3709
3	1.0399	3.3329	2.2711	1.0198
4	1.0407	-3.6684	1.8987	0.4870
5	0.8436	0.9071	1.0696	4.1244
6	0.6602	0.0851	1.1086	-4.4015
7	1.6684	-0.2845	-2.1812	-2.7629
8	0.4205	1.0069	4.6267	-0.6506
9	1.9793	2.2080	1.0648	-2.0889
10	0.9425	0.0884	3.7501	-2.0139
11	0.5200	0.4372	-0.9242	-0.4988
12	0.3552	-0.1870	-4.5027	-1.7785
13	2.2114	-2.3199	-1.9946	1.0642
14	0.7419	2.4831	1.9946	3.1194
15	0.7229	2.3839	3.7701	-0.3846
16	0.6997	-1.4936	-4.1188	-1.0282
17	0.8699	-3.2406	-1.5825	-2.3966
18	0.9869	-1.3576	0.5479	3.9505
19	0.8757	-0.2916	-1.5594	4.0228

Кінець таблиці 4.1

20	2.0960	-0.2509	2.7738	1.3703
21	0.6226	2.3350	-1.6570	-3.5714
22	0.7291	4.3410	-0.8510	-0.6489
23	1.1778	2.7889	-2.4936	-1.4771
24	0.4077	1.9279	3.9344	-1.9415
25	2.0294	2.3180	-1.0361	1.8989

Час обчислення експерименту – 6.64 мс.

На рисунку 4.1 представлена візуалізація прикладу 1 з різних проекцій за допомогою програмного продукту Φ -functions 3D [рис. Б.2 Додатку Б].

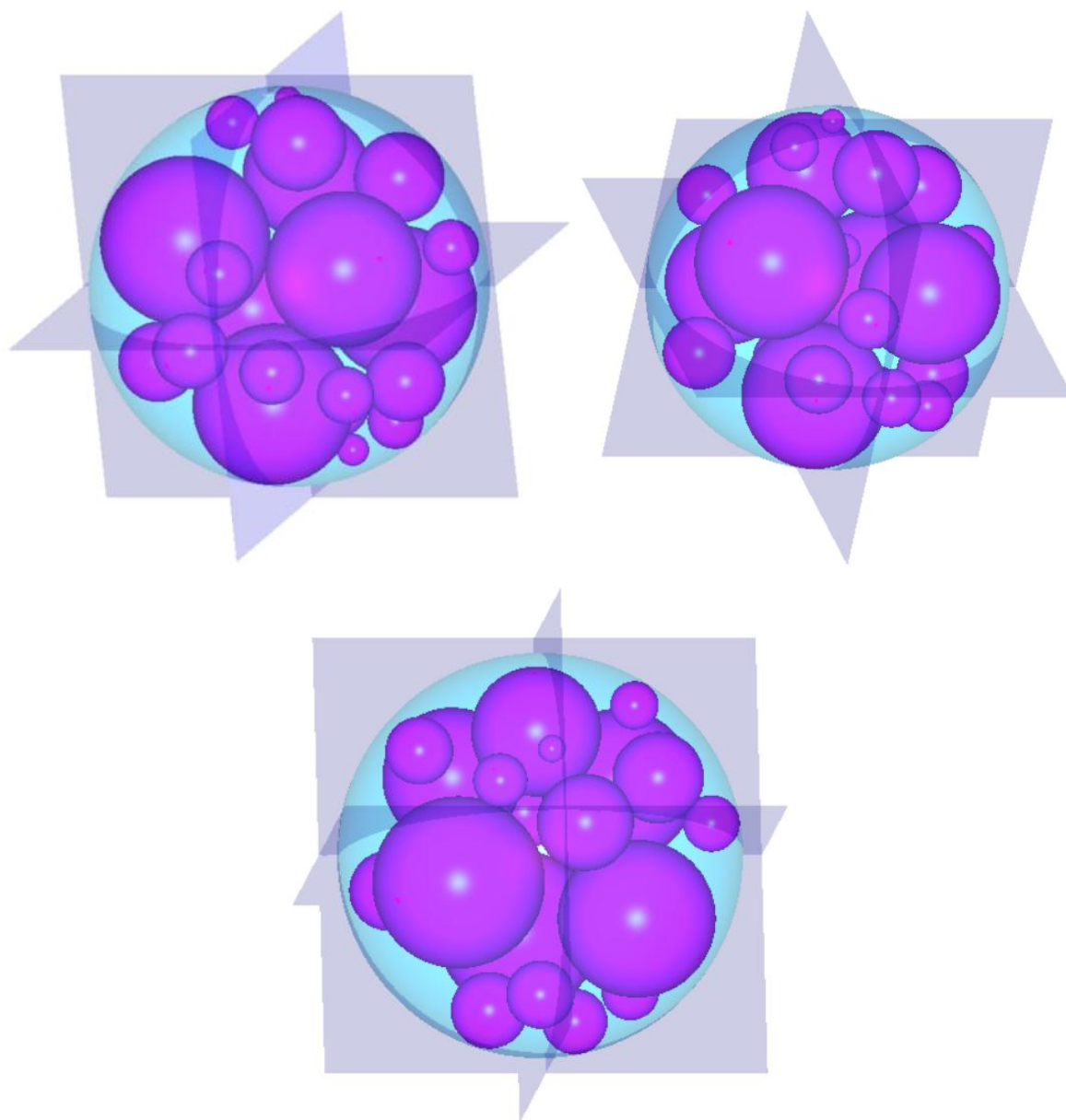


Рисунок 4.1– Проекції розміщення 25 куль із $\rho = 0.5$

Приклад 2.

Кулі S_i , $i=1,2,\dots,25$, зі змінним радіусом $r_i \in [0.3, 2.5]$ розміщуються у сферичному контейнері C з радіусом $\rho_C = 5.2$. Нехай дистанція між кулями $\rho = 0.17$.

Результати чисельного розв'язку – приведено в табл. 4.2.

Максимальне значення суми об'ємів куль у контейнері – $\omega^*(u^*, r^*) = 0.4941$.

Таблиця 4.2 – Результати другого обчислювального експерименту

S_i	r_i	x_i	y_i	z_i
1	0.6591	0.6007	4.0873	-1.8849
2	0.8923	-1.9948	-3.8097	-0.2522
3	0.7288	-3.4017	2.2147	1.8750
4	0.9793	-0.4565	3.6367	2.0929
5	1.0909	1.3372	-0.9300	3.7725
6	2.0806	0.4756	-2.5506	-1.7318
7	1.2581	-3.6344	0.0994	1.5230
8	1.5755	2.4941	-2.1634	1.4954
9	1.5166	3.5026	-0.4098	-1.0637
10	2.0734	2.0318	1.6195	1.7391
11	0.7641	3.3206	-2.8368	-0.7765
12	1.1100	0.1953	1.5549	-3.7779
13	1.9642	-1.1607	-2.1408	2.1308
14	0.7465	-4.3929	0.5692	-0.4602
15	0.6452	0.8980	-0.7119	0.4652
16	0.6649	-0.9801	-0.5100	4.3985
17	1.2922	-1.7830	-0.4304	-3.4506
18	0.7583	1.1930	0.3648	-0.8555
19	1.5813	-3.1360	-1.5315	-0.9566
20	0.5292	0.7501	0.6558	-2.3093
21	1.4997	2.1269	2.3290	-1.9349
22	0.9731	1.1739	4.0567	-0.1766
23	1.5203	-1.4776	1.3748	3.0768

Кінець таблиці 4.2

24	1.1715	2.0237	-0.0512	-3.4830
25	2.2936	-1.6717	2.2361	-0.8079

Час обчислення – 6.58мс.

Графічне представлення експерименту далі на рисунку 4.2.

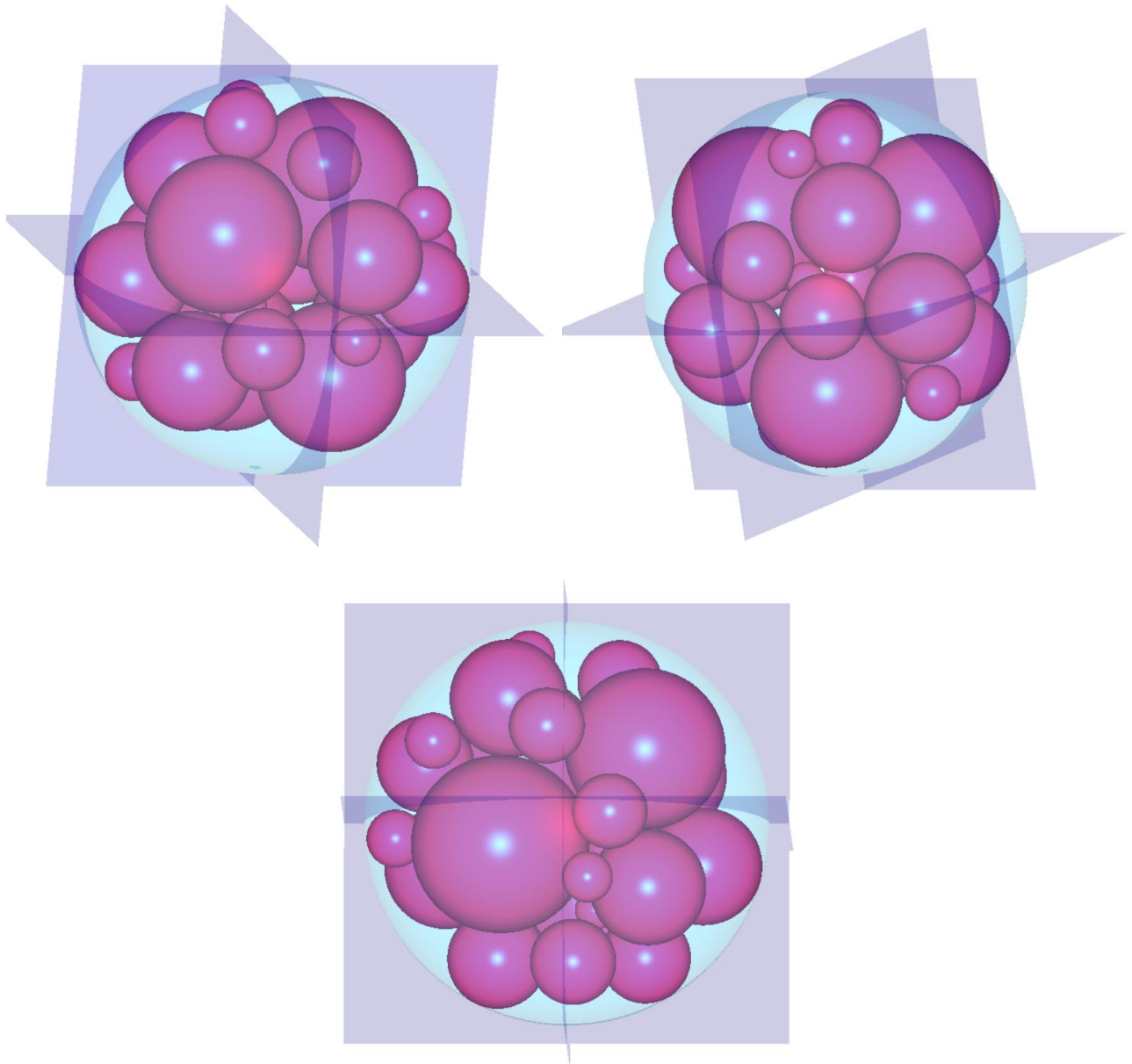


Рисунок 4.2 – Проекції розміщення 25 куль із $\rho = 0.17$

Приклад 3.

Кулі S_i , $i = 1, 2, \dots, 25$, зі змінним радіусом $r_i \in [0.3, 2.5]$ розміщуються у

сферичному контейнері C з радіусом $\rho_C = 5.2$. Нехай дистанція між кулями відсутня, тобто $\rho = 0$.

Результати чисельного розв'язку – в таблиці 4.3.

Максимальне значення цільової функції – $\omega^*(u^*, r^*) = 0.548$.

Таблиця 4.3 – Результати третього обчислювального експерименту

S_i	r_i	x_i	y_i	z_i
1	0.8898	-3.6335	-0.0234	-2.3185
2	0.4128	1.2258	-2.1276	-0.1111
3	0.7103	-4.2491	1.3797	0.4463
4	1.3604	3.6361	1.0098	0.7081
5	0.7066	-1.0015	0.6652	1.4808
6	1.9706	1.9531	-1.5188	2.0755
7	1.1331	-2.0513	2.5970	2.3637
8	0.7872	0.4020	3.4906	-2.6696
9	2.0500	2.3917	-0.8508	-1.8650
10	1.6032	2.0662	2.7148	-1.1390
11	2.3374	-1.4999	-2.4144	-0.3398
12	1.1234	-0.0213	-2.1582	-3.4583
13	1.9208	0.9769	2.2468	2.1796
14	0.9606	0.4322	4.2148	0.1467
15	1.1299	-1.3090	0.9558	3.7335
16	1.5107	-3.1184	0.2121	1.9600
17	0.9407	-0.1739	-3.4677	2.4671
18	0.8174	3.2301	0.8384	2.8409
19	2.2648	-1.7551	2.1345	-0.9895
20	1.0817	-4.0936	-0.1877	-0.4085
21	1.1707	1.8040	-3.5920	-0.2797
22	1.3963	-1.1934	-1.5255	3.2736
23	1.3096	-1.7874	-0.4851	-3.4213
24	0.8509	4.1860	-1.1097	0.3998
25	1.3050	0.7486	1.5911	-3.4755

Час обчислення – 6,74мс.

На рисунку 4.3 проекції розміщення упакованих куль у контейнері.

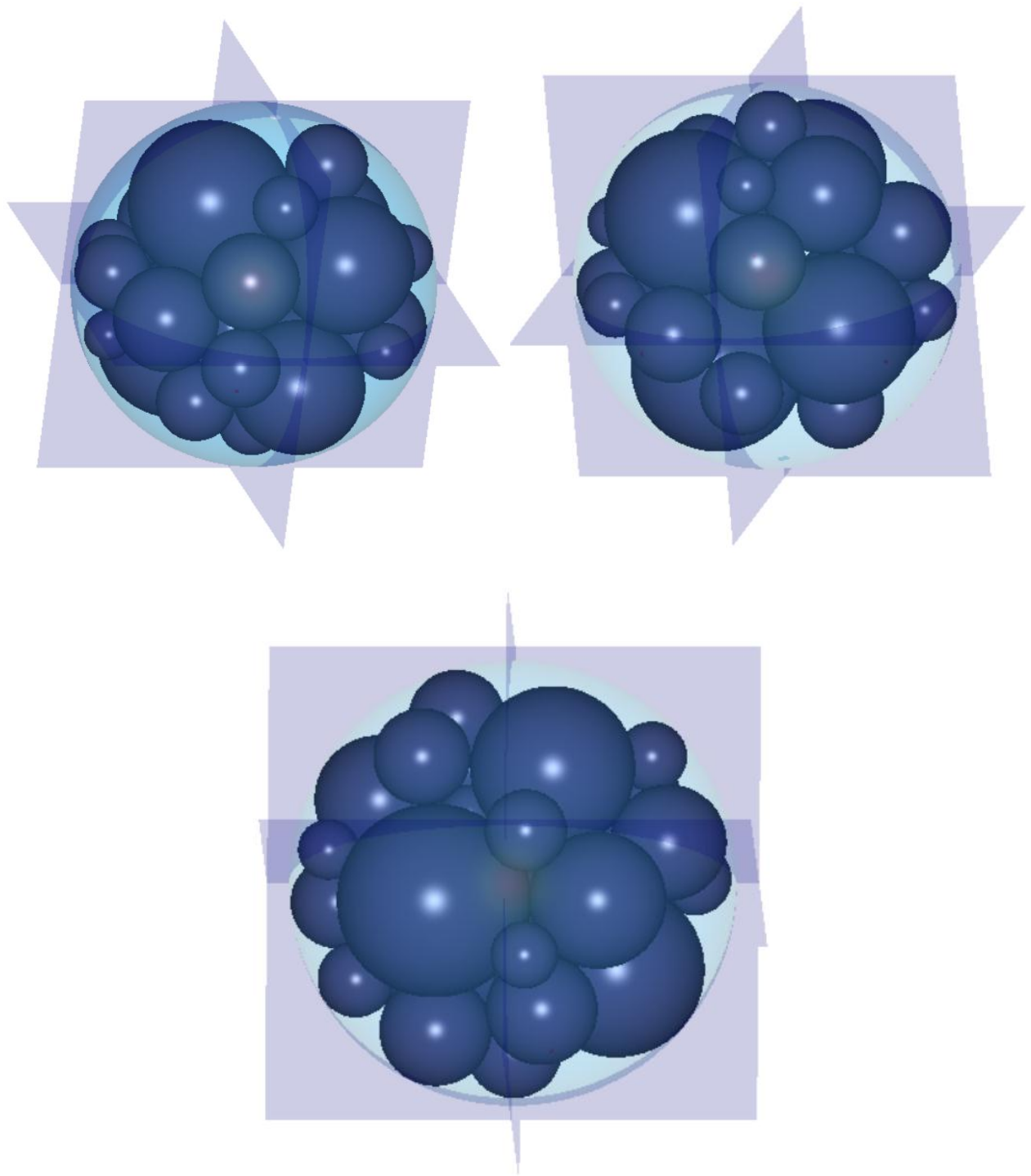


Рисунок 4.3 – Проекції розміщення 25 куль, $\rho = 0$

4.2 Аналіз результатів експериментів

Зведена таблиця отриманих результатів обчислювальних експериментів наведена в таблиці 4.4

Таблиця 4.4 – Порівняння результатів експериментів

№	ρ_c	Кількість S_i	Радіуси r_i	ρ	$\omega^*(u^*, r^*)$	Час(мс)
1	5.2	25	0.3-2.5	0.5	0.4158	6.64
2				0.17	0.4941	6.58
3				0	0.548	6.74

З результатів розрахункових експериментів можемо сказати, що витрачений час приблизно однаковий через однакові умови і змінну тільки відстань між кулями. Зі зменшенням дистанції між кулями – зменшується значення цільової функції через збільшення простору розміщення у контейнері. Аналіз результатів виявив вплив параметру відстані між кулями у сферичному контейнері. Через обов'язкову відстань між кулями, збільшується значущість великих куль (куль із радіусом наближеним до максимального), адже тільки після розташування великих куль можна заповнити місця у контейнері, що залишились вільними. Тобто зі зміною параметру ρ з нуля до заданого значення збільшується кількість активних обмежень задачі.

5 АНАЛІЗ МОЖЛИВИХ ЗАСТОСУВАНЬ

Сукупність розроблених математичних моделей, методів, алгоритмів та програмних комплексів може використовуватися при: моделюванні властивостей сплаву в порошковій металургії; аналізі й розробці процесів у хімічних та ядерних реакторах; оптимізації топології виробів у адитивних технологіях (3D-друк).

Детально розглянемо напрямок застосування задачі упаковки куль різного радіусу у сферичний контейнер у топологічній оптимізації при 3d-друку. Топологічною оптимізацією, у свою чергу, є процес зміни конструкції, структури деталі і її змінних параметрів при заданому критерії оптимальності зі збереженням або поліпшенням її функціоналу. Топологічна оптимізація - це метод автоматизованого проектування силових схем, що дозволяє створювати інструкції з високим ваговим досконалістю з першого разу на противагу традиційному ітераційного проектування. Топологічна оптимізація, яку часто асоціюють також з терміном «біонічний дизайн», – це знаходження найвигіднішого з точки зору мінімуму маси розподілу матеріалу в силових конструкціях. Вихідними даними для неї виступають габаритні (компонувальні або геометричні) обмеження і граничні умови. Основна ідея найпростішого алгоритму топологічної оптимізації полягає в поступовому «відключенні» елементів конструкції, які не беруть участі в передачі зусиль.

Сам процес 3D-друку вже вимагає значно менше для виробництва деталей, але на цьому покращення не зупиняються. Коли ще не існувало адитивних технологій, а були тільки субтрактивні, то питання геометрії не стояло так гостро і вирішувалося доступними методами. Топологічна оптимізація дозволила змінити стандартну геометрію на геометрію, спеціально адаптовану під певну технологію. І це може бути традиційна технологія (наприклад, лиття), і адитивний процес.

Згідно з даними зі статті [16], у другій деталі на рисунку 5.1 менша напруга, менше переміщення під навантаженням і, найголовніше, вага зменшила-

ся на 1 кг. Для однієї деталі це небагато, але якщо їх випускають сто тисяч в рік, то сумарно ми можемо заощадити сто тонн металу на одній деталі.

		 3D-друк
маса	3,703 кг	2,670 кг (↓ 28%)
максимальні напруги	1045/1045 МПа	897/600 МПа
Переміщення під навантаженням	2,29 / 2,15 мм	1,72 / 1,45 мм

Рисунок 5.1 – Оптимізація деталі засобами адитивних технологій

Програмне забезпечення для топологічної оптимізації не будує модель об'єкта з нуля, воно вже має геометричну модель раніше виготовленого виробу іншим методом. Потім відзначаються значущі місця конструкції, що не підлягають зміні (каркас, кріплення). Всі зони, що не є обов'язковими, можна оптимізувати і мінімізувати за допомогою геометричної оптимізації.

Зараз процес побудови нової моделі досить витратний за часом і вимагає великих обчислювальних ресурсів. Цей метод моделювання називається методом кінцевих елементів. Для кожної точки виробу програма складає і вирішує інтегральні рівняння, враховуючи при цьому взаємозв'язку між усіма точками. Метою роботи було оптимізувати процес розміщення куль у контейнер покращеними методами геометричного розміщення, з чим нам допомогли Ф-функції і методи локальної та глобальної оптимізації.

ВИСНОВКИ

У атестаційній роботі досліджена задача геометричного проектування упаковки нерівних гіперкуль у гіперсферичний контейнер, проаналізовані сфери прикладного застосування, зокрема актуальність в адитивних технологіях. У теоретичній частині розглянуті основні види задач упаковки куль, задача зі змінною характеристикою контейнера та задача про рюкзак, їх особливості, та запропонована модель поставленої задачі. Вона є модифікацією задачі про рюкзак, але зі змінними радіусами упакованих куль за обмежень на мінімальне та максимальне значення радіуса. Таким чином є множина куль, що має бути розміщена у контейнері. У практичній частині використані теоретичні здобутки видатних вчених і побудовані наочні результати роботи.

Застосований метод дає змогу швидко отримувати локальний розв'язок задачі. У разі використання методу мултистарту можна отримати наближення до глобального екстремуму задачі.

Такі задачі знаходять застосування для оптимізації топології деталі у адитивних технологіях (3D-друці) і дають змогу зекономити матеріали не втрачаючи міцнісних характеристик деталей. Задача упаковки нерівних виникають під час вивчення властивостей сплаву та композитних матеріалів, у порошковій металургії, тощо.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Ієвлева С.М. Основы системного анализа : навч.-метод. комплекс. Харків : ХНУРЕ, 2017. 240 с.
2. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования : монография. Киев : Наук. думка, 1986. 267 с.
3. Яськов Г.М. Оптимізаційні задачі розміщення гіперкуль: математичні моделі розв’язання, застосування : дис. на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук : [спец.] 01.05.02 “математичне моделювання та обчислювальні методи” / Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, 2019, 356 с.
4. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию : монография Москва : Наука, 1977. 367 с.
5. Фукс Д.Б., Фоменко Ф.Т., Гунтмахер В.Л. Гомотопическая топология : монография. Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1969. 459 с.
6. Стоян Ю.Г., Пономаренко Л.Д. Сумма Минковского и годограф вектор-функции плотного размещения. Докл. АН УССР. 1977. № 10. С. 888–890.
7. Стоян Ю. Г., Шайтхауер Г., Яськов Г.М. Пакування нерівних куль у різні контейнери // Кибернетика и системный анализ. 2016, №3 (52). С. 97–105.
8. Яськов Г.Н. Методология решения задач размещения многомерных шаров // Journal of Mechanical Engineering. 2019, vol. 22, №1. С. 1–7.
9. Pankratov A., Romanova T. Decomposition algorithm for optimization placement problems // Технічні науки. Випуск 19. 2019. С. 126–132.
10. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е. Математическая модель $E_k(R^2)$ -задач размещения в R^2 // Ин-т пробл. машиностроения АН Украины. 1989. С. 12.
11. Waescher G., Haussner H., Schumann H. An improved typology of cutting and packing problems // European Journal of Operational Research. 2007. Vol. 183. P. 1109–1130.

12. Schewe L., Schmidt M. Computing feasible points for binary MINLPs with MPECs // Mathematical Programming Computation 2019. Vol. 11. Iss. 1. P. 95–118.
13. Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T. Phi-function for 2D primary objects // Studia Informatica. 2002. Vol. 2. Iss. 1. P. 1–32.
14. Титов Д.А., Юнкин И.В., Рубан Н.В. Основы оптимизации в радиотехнических системах : практикум. Омск: ОмГТУ, 2016. 120 с.
15. Визуализация с использованием OpenJL. URL: http://aco.ifmo.ru/el_books/computer_visualization/lectures/3.html
14. Топологическая оптимизация геометрии как путь повышения прибыльного предприятия. URL: <http://additiv-tech.ru/publications/topologicheskaya-optimizaciya-geometrii-izdeliya-kak-put-povysheniya-pribylnosti>