Г. Г. ЧЕТВЕРИКОВ, канд. техн. наук, *Т. В. КИРИЛЕНКО*

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ СОВОКУПНОСТИ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Статья основана на результатах работы [1], которые получили в ней дальнейшее развитие. Предложенный подход является обобщением известного метода Шайнмана [2] для минимизации переключательных функций алгебры логики, СДНФ которой задается множеством десятичных эквивалентов ее конституент. При этом данный метод более удобный и наглядный, чем классический метод Квайна — Мак-Класки. Его легко можно распространить на случай совместной минимизации совокупности функций. Последняя может быть и полностью, и частично определенной. В работе [3] исследованы два подхода обобщения метода Шайнмана: с отметкой поглощаемых эквивалентов и элементов признаков. Остановимся на втором. Покажем справедливость его распространения на случай алгебры конечных предикатов. Укажем рамки его разумного применения.

Конечные предикаты, задающие в явном виде значение той или иной буквы выбранного конечного алфавита, имеют вид

$$y_i^j = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, p},$$

где p — значность исходного алфавита (полагаем, что все предикаты определены на одном и том же алфавите). Представим указанную совокупность предикатов в виде

$$Y = \bigvee x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} (\beta_1 y_1^j, \ \beta_2 y_2^j, \ldots, \beta_n y_n^j),$$
$$f(\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 1,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — набор показателей узнаваний переменных ис ходных предикатов, играющих также роль индексов логического суммирования. Запись $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = 1$ под знаком логической суммы означает, что суммирование ведется только по тем наборам индексов, которые обращают предикат в единицу. Здесь $\beta_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \in \overline{1, n}$; $\alpha_j \in \{0, 1, \ldots, p\}$. Выражение $(\beta_1 y_1^j, \beta_2 y_2^j, \ldots, \beta_m y_m^j)$ назовем признаком конъюнкции $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m}$. При этом понимать его следует так, что если значение y_i^j на рассматриваемом наборе равно единице, т. е. $\beta_i = 1$, то в выражении признака оставляем вместо записи $\beta_i y_i^j$ индекс i, в противном случае ($\beta_i = 0$) — запись опускаем. Удалим также из Y все конъюнкции, в признаке которых отсутствуют все записи $\beta_i y_i^j$. Окончательно выражение для Y можно записать так:

$$Y = \bigvee_{M} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} (i_1, i_2, \ldots, i_l).$$

Здесь M — множество наборов конституент, на которых хотя бы один предикат совокупности обращается в единицу ($l \leqslant n$).

Разложим предикат Y по переменной x_1. Так, если область изменения переменной x_1 ограничена значениями $0, 1, \ldots, K$, то любой конечный предикат можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^0 f(0, x_2, \ldots, x_m) \vee x_1^1 f(1, x_2, \ldots, x_m) \vee \\ \vee \ldots \vee x_1^k f(k, x_2, \ldots, x_m).$$

Тогда справедливо

$$Y = \bigvee_{M_1} x_1^0 x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} (i_1', i_2', \ldots, i_m') \vee \bigvee_{M_2} x_1^1 x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_m^{\alpha_m} (i_1'', i_2'', \ldots, i_m'') \vee \\ \vee \ldots \vee \bigvee_{M_{k+1}} x_1^k x_2^{\alpha_2} \ldots x_m^{\alpha_m} (i_1^*, i_2^*, \ldots, i_m^*),$$

где M_j — множество, $j = \overline{1, k+1}$. Если присвоить переменным $x_1, x_2, \ldots, x_m$ соответственно веса $p^{m-1}, p^{m-2}, \ldots, p^1, p^0$ и заменить конъюнкции $x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_m^{\alpha_m}$ десятичными эквивалентами наборов $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$, то исходный предикат можно представить следующим образом:

$$Y = T(R) = x_1^0 T_1(R_1) \vee x_1^1 T_2(R_2) \vee \ldots \vee x_1^k T_{k+1}(R_{k+1}). \quad (1)$$

Здесь $T(R)$ — множество целых чисел, являющихся десятичными эквивалентами наборов из множества M, совместно с их признаками; $T_1(R_1)$ — множество десятичных чисел, которые содержат все числа из $T(R)$, меньшие веса переменной x_1; $T_2(R_2)$ — множество положительных чисел, содержащих числа из $T(R)$, уменьшенные на вес данной переменной и не превосходящие ее веса и т. д.; $T_{k+1}(R_{k+1})$ — множество тех десятичных чисел из $T(R)$, которые представляют собой положительную разность последних и в k раз увеличенного веса переменной x_1. Далее условимся под записью $t_i(r_i)$ понимать элемент множества $T_i(R_i)$, т. е. $t_i(r_i) \in$

$\in T_i(R_i)$. Заметим, что рассмотрению подлежат лишь те элементы множества $T_i(R_i)$, для которых справедливо соотношение $t_1 = t_2 = \ldots = t_{k+1} = t$. Это требование является существенным на этапе анализа элементов множеств $T_i(R_i)$ на возможность склеивания. При наличии такой возможности выражение (1) сводится к виду

$$Y = x_1^0 T_1(R_1) \vee x_1^1 T_2(R_2) \vee \ldots \vee x_1^k T_{k+1}(R_{k+1}) \vee T_{k+2}(R_{k+2}), \quad (2)$$

где $T_{k+2}(R_{k+2})$ — множество конъюнкций (в десятичных эквивалентах), не зависящих от переменной, по которой велись разложение и склейка.

Изложим теперь суть данного подхода к упрощению исходной формы задания совокупности предикатов. Как более общий случай рассмотрим минимизацию не полностью определенной совокупности предикатов. Для последней характерно наличие наборов во множестве $T(R)$, на которых предикаты совокупности не определены. Номера таких предикатов в признаках наборов множества $T(R)$ будем отмечать символом $''$. В связи с этим общий вид таких наборов следующий: $t(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}, b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_n}) = t(r_1'', r_2)$. Здесь r_1'' — множество отмеченных элементов; r_2 — множество неотмеченных элементов признака набора с эквивалентом t. С целью получения правил склеивания и отметок номеров в признаках наборов введем ряд обозначений. При этом дальнейший ход рассуждений рассмотрим для $p = 3$, что позволит, не теряя общности, сохранить наглядность и избежать ненужной громоздкости. Итак, для определения возможного поглощения в выражении

$$x^0 t(r_1'', r_2) \vee x^1 t(r_3'', r_4) \vee x^2 t(r_5'', r_6)$$

введем обозначения:

$$r_1'' \cap r_3'' \cap r_5'' = r_7'', \quad r_1'' \cap r_3'' \cap r_6 = r_8, \quad r_1'' \cap r_4 \cap r_5'' = r_9,$$
$$r_1'' \cap r_4 \cap r_6 = r_{10}, \quad r_2 \cap r_3'' \cap r_5'' = r_{11}, \quad r_2 \cap r_3'' \cap r_6 = r_{12},$$
$$r_2 \cap r_4 \cap r_5'' = r_{13}, \quad r_2 \cap r_4 \cap r_6 = r_{14}.$$

Как следует из приведенных соотношений, символ $''$ в правой части появляется только в случае его наличия над каждой переменной левой части. Тогда справедливость следующих равенств очевидна:

$$r_1'' = (r_1'' | r_7'' | r_8 | r_9 | r_{10}) \cup r_8 \cup r_7'' \cup r_9 \cup r_{10}; \quad r_2 = (r_2 | r_{11} | r_{12} | r_{13} | r_{14}) \cup$$
$$\cup r_{11} \cup r_{12} \cup r_{13} \cup r_{14}; \quad r_3'' = (r_3'' | r_7'' | r_8 | r_{11} | r_{12}) \cup r_7'' \cup r_8 \cup r_{11} \cup r_{12};$$
$$r_4 = (r_4 | r_9 | r_{10} | r_{13} | r_{14}) \cup r_9 \cup r_{10} \cup r_{13} \cup r_{14}; \quad r_5 = (r_5'' | r_7'' | r_9 | r_{11} | r_{13}) \cup$$
$$\cup r_7'' \cup r_9 \cup r_{11} \cup r_{13}; \quad r_6 = (r_6 | r_8 | r_{10} | r_{12} | r_{14}) \cup r_8 \cup r_{10} \cup r_{12} \cup r_{14}.$$

Если теперь с целью сокращения формы записи последующих соотношений, обозначить $|$ знаком $:$, а знак $\cup$ опустить, то, произведя несложные преобразования, получим следующие правила склеивания и отметок номеров в признаках наборов с различным значением эквивалента t:

$$
\begin{gathered}
x^0t(r_1'', r_2) \vee x^1t(r_3'', r_4) \vee x^2t(r_5'', r_6) = x^0t(r_1'' : r_7'' : r_8 : r_9 : r_{10}, r_7'', r_8, r_9, r_{10}, \\
r_2 : r_{11} : r_{12} : r_{13} : r_{14}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}) \vee x^1t(r_3'' : r_7'' : r_8 : r_{11} : r_{12}, r_7'', r_8, r_{11}, \\
r_{12}, r_4 : r_9 : r_{10} : r_{13} : r_{14}, r_9, r_{10}, r_{13}, r_{14}) \vee x^2t(r_5'' : r_7'' : r_{11} : r_9 : r_{13}, \\
r_7'', r_{11}, r_9, r_{13}, r_6 : r_8 : r_{12} : r_{10} : r_{14}, r_8, r_{12}, r_{10}, r_{14}) = x^0t(r_1'' : r_7'' : r_8 : r_9 : r_{10}, \\
r_7'', r_8'', r_9'', r_{10}'', r_2 : r_{11} : r_{12} : r_{13} : r_{14}, r_{11}'', r_{12}'', r_{13}'', r_{14}'') \vee x^1t(r_3'' : r_7'' : r_8 : r_{11} : r_{12}, \\
r_7'', r_8'', r_{11}'', r_{12}'', r_4 : r_9 : r_{10} : r_{13} : r_{14}, r_9'', r_{10}'', r_{13}'', r_{14}'' \vee x^2t(r_5'' : r_7'' : r_{11} : r_9 : r_{13}, \\
r_7'', r_{11}'', r_9'', r_{13}'', r_6 : r_8 : r_{12} : r_{10} : r_{14}, \\
r_8'', r_{12}'', r_{10}'', r_{14}'') \vee t(r_7'', r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}).
\end{gathered}
$$

В процессе применения полученного выше правила следует помнить, что если элемент признака был отмечен до разложения по переменной x, то он должен сохранить отметку и после разложения по этой переменной (x^j, $j = 0, 1, \ldots, p$).

Проведение разложения по всем переменным согласно правилу и замечанию позволяет получить все множество простых импликант исходной совокупности предикатов. Однако как только в процессе разложения по какой-либо переменной во множестве $T_i(R_i)$, $i = \overline{1, \kappa + 2}$ все номера в признаках окажутся отмеченными, его следует исключить из дальнейшего рассмотрения. Избыточными считаются те простые импликанты, в признаках которых все (!) номера отмечены. Полученные простые импликанты включаются в импликантную таблицу в качестве строк (метки опустим). В качестве столбцов последней следует применять исходное множество $T(R)$ конституент минимизируемой совокупности. Отсутствовать в качестве столбцов должны только те конституенты множества $T(R)$, все элементы признаков которых отмечены. В свою очередь, в конституенте отмечены элементы признаков.

Проиллюстрируем рассмотренный способ на примере минимизации совокупности из трех предикатов, имеющих значность, равную трем. В силу полной идентичности алгоритма выкладки приведем только для нулевого узнавания совокупности предикатов y_1^0, y_2^0, y_3^0. Последние заданы табл. 1. Далее в табл. 2 приведена последовательность описанных ранее действий при разложении заданной совокупности предикатов по переменным x_1, x_2, x_3. Веса их соответственно равны 9, 3, 0.

Для отыскания буквенного представления простых импликант (или их десятичных эквивалентов) необходимо проделать путь от найденных нулей (в табл. 2 они подчеркнуты двойной линией) в обратном порядке к исходному множеству $T(R)$, образовывая конъюнкции соответствующих узнаваний переменных.

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3	y_1^0	y_2^0	y_3^0
0	0	0	0	1	1	—
1	0	0	1	1	1	0
2	0	0	2	1	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	1	1	0	0	0
5	0	1	2	0	0	0
6	0	2	0	1	1	1
7	0	2	1	0	1	1
8	0	2	2	0	1	1
9	1	0	0	1	0	0
10	1	0	1	0	0	0
11	1	0	2	0	0	0
12	1	1	0	1	1	0
13	1	1	1	0	1	0
14	1	1	2	0	1	0
15	1	2	0	1	0	0
16	1	2	1	0	0	0
17	1	2	2	0	0	0
18	2	0	0	0	0	0
19	2	0	1	0	0	0
20	2	0	2	0	0	0
21	2	1	0	0	0	0
22	2	1	1	0	0	0
23	2	1	2	0	0	0
24	2	2	0	—	—	—
25	2	2	1	—	—	—
26	2	2	2	1	1	1

С помощью импликантной таблицы отсеиваем лишние импликанты и находим существенные. Их дизъюнкция — искомый результат. Например, для первого предиката — это выражение

$$y_1^0 = a^0 b^0 \vee a^0 c^0 \vee a^1 c^0 \vee a^2 b^2.$$

Таблица 2

$T\ (R)$

0 (1, 2, 3″) 1 (1, 2) 2 (1, 2) 3 (1) 6 (1, 2, 3) 7 (2, 3) 8 (2, 3)	9 (1) 12 (1, 2) 13 (2) 14 (2) 15 (1)	24 (1″, 2″, 3″) 25 (1″, 2″, 3″) 26 (1, 2, 3)	—
x_1^0 0 (1, 2, 3″) 1 (1, 2) 2 (1, 2) 3 (1) 6 (1″, 2, 3) 7 (2, 3) 8 (2, 3)	x_1^1 0 (1) 3 (1, 2) 4 (2) 5 (2) 6 (1″)	x_1^2 6 (1″, 2″, 3″) 7 (1″, 2″, 3″) 8 (1″, 2″, 3″)	6(1)
x_2^0 0 (1″, 2,3″) 1 (1, 2) 2 (1, 2)	x_2^1 0 (1″)	x_2^2 0 (1″ 2, 3) 1 (2, 3) 2 (2, 3)	0 (1)
x_3^0 0 (1″, 2″, 3″)	x_3^1 0 (1″, 2″)	x_3^2 0 (1″, 2″)	0 (1, 2)
x_3^0 0 (1″, 2″, 3″,)	x_3^1 0 (2″, 3″)	x_3^2 0 (2″, 3″)	0 (2, 3)
x_3^0 0 (1)	x_3^1 —	x_3^2 —	—
x_2^0 0 (1″)	x_2^1 0(1″, 2) 1 (2) 2 (2)	x_2^2 0 (1″)	0 (1)
x_3^0 0 (1″, 2″)	x_3^1 0 (2″)	x_3^2 0 (2″)	0 (2)
x_3^0 0 (1)	x_3^1 —	x_3^2 —	—
x_2^0 —	x_2^1 —	x_2^2 0 (1″, 2″, 3″) 1 (1″, 2″, 3″) 3 (1, 2, 3)	—
x_3^0 0(1″, 2″, 3″)	x_3^1 0(1′, 2″,3″)	x_3^2 0(1′. 2″, 3)	0(1,2,3)

Список литературы: 1. *Четвериков Г. Г., Чугун А. И., Кириленко Т. В.* Особенности программной реализации методов и алгоритмов минимизации переключательных функций алгебры конечных предикатов // Пробл. бионики.— 1986.— вып. 37.— С. 22—27. 2. *Scheiman A. N.* A Method for Simplfying Boolean Functions Bell System Techn.

Продолжение табл. 2

x_2^0 —	x_2^1 —	x_2^2 0 (1)	—
x_3^0 0 (1)	x_3^1 —	x_3^2 —	—

T., 1962, 41, N 4, — p. 1337 — — 1347. 3. *Грибанов Г. Н.* Минимизация совокупности переключательных функций в десятичных эквивалентах // Деп. в ВИНИТИ, 27 мая № 2422—80. 1980.—32 с.

Поступила в редколлегию
20.01.86