

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ МОДЕЛЯМИ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

Введение

Для решения широкого круга прикладных задач статистической радиотехники необходим синтез и анализ моделей сложных случайных процессов. Известные модели линейного предсказания описывают сложные процессы, состоящие из нескольких связанных или независимых процессов, интегрально, как процессы с многомодовым спектром. Такой подход недостаточно полно и точно описывает такие процессы. Поэтому необходимы исследования для создания новых конструктивных моделей линейного предсказания, позволяющих учитывать тонкую структуру сложных процессов.

Некоторые случайные процессы, исследуемые в статистической радиотехнике, получаются в результате последовательного линейного инерционного преобразования порождающего процесса набором формирующих фильтров (ФФ) [1]. В случае использования мультипликативных моделей линейного предсказания [2], параметры формирующих фильтров рассчитываются по классическим или обобщенным моделям линейного предсказания [3]. Мультипликативные процессы могут быть получены с помощью составного формирующего фильтра линейного предсказания, на вход которого подается гауссов либо негауссов белый шум (БШ). Такие процессы будем называть истинными мультипликативными процессами линейного предсказания, т.к. априори известен порядок использованных моделей и коэффициенты передачи звеньев цифровых формирующих фильтров. В работах [2, 3] показано, что мультипликативную модель негауссовых процессов можно описывать одним разностным уравнением, учитывающим статистики второго и высших порядков. Параметры моделей рассчитываются по корреляционным и моментным функциям путем анализа ошибок предсказания.

В статье исследуется эффективность применения мультимоделей для задачи обеления сложных случайных процессов. В качестве меры эффективности использовалось значение дисперсии ошибки на выходе обеляющего мультипликативного фильтра. Проведена оценка эффективности использования мультимоделей для обеления сложного случайного процесса при помощи классической модели авторегрессии (АР), синтезированной по методу Юла-Уолкера. Эксперименты проводились методом статистического моделирования.

Мультипликативные процессы линейного предсказания

Некоторые гауссовы и негауссовы процессы в природе и технике получаются в результате последовательного преобразования фильтрами порождающего процесса [2]. Если для таких процессов полагать, что порождающим процессом является гауссов или негауссов БШ, а линейные фильтры имеют рациональную передаточную функцию, то их можно описать при помощи мультипликативной АР модели линейного предсказания

$$x[t] = \Phi_1^{-1}(z)\Phi_2^{-1}(z)\dots\Phi_k^{-1}(z)a[t], \quad (1)$$

где $\Phi_i(z)$ – оператор АР, $a[t]$ – ошибка предсказания модели АР типа БШ. Параметры этих фильтров задаются либо из требуемой формы спектра выходного процесса $x[t]$, либо вычисляются в результате анализа выборочных значений моделируемого реального процесса. Блок-схема формирователя мультипликативного процесса с рациональной

системной функцией $H(z)$, представляющего собой последовательное соединение двух формирующих АР фильтров, приведена на рис. 1.

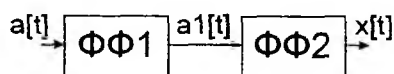


Рис. 1

Системная функция мультипликативного линейного АР фильтра (рис. 1), описываемая мультипликативной моделью $AP_1 \times AP_2$, равна произведению системных функций составляющих его АР фильтров:

$$H(z) = H_{AP_1}(z)H_{AP_2}(z).$$

Для авторегрессионных моделей

$$H(z) = \left(1 - \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i]z^{-i}\right)^{-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]z^{-i}\right)^{-1}, \quad (2)$$

где действие оператора сдвига z^{-k} определяется выражением $z^{-k} \cdot x[t] = x[t-k]$. Исходя из блок-схемы формирователя мультипликативного процесса (рис. 1) с учетом (2) разностное уравнение модели $AP_1 \times AP_2$ можно представить в виде

$$a[t] = x[t] - \sum_{i=1}^{p_2} \Phi_2[i]x[t-i] - \sum_{n=1}^{p_1} \Phi_1[n]a_1[t-n]. \quad (3)$$

Коэффициенты АР уравнения (3) можно рассчитать несколькими способами [4]. В данной работе коэффициенты АР получены в два этапа. На первом этапе для выбранного порядка модели AP_2 процесса $x[t]$ с помощью уравнения Юла – Уолкера рассчитывают коэффициенты $\Phi_2[i]$. Затем находят остаток предсказания $a_1[t]$, пропуская процесс $x[t]$ через обеляющий фильтр на основе модели AP_2 . На втором этапе для процесса $a_1[t]$ с помощью уравнения Юла – Уолкера рассчитывают коэффициенты $\Phi_1[i]$ для модели AP_1 . Порядки моделей AP_1 и AP_2 определяют по минимуму дисперсии ошибки предсказания $a[t]$. Решение уравнений Юла-Уолкера в матричном виде имеет вид

$$\bar{\Phi} = R^{-1}\bar{R},$$

где

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R[1] \\ R[2] \\ \vdots \\ R[p] \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R[0] & R[1] & \dots & R[p-1] \\ R[1] & R[0] & \dots & R[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R[p-2] & R[p-3] & \dots & R[1] \\ R[p-1] & R[p-2] & \dots & R[0] \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi[1] \\ \Phi[2] \\ \vdots \\ \Phi[p] \end{bmatrix}.$$

Корреляционная матрица и вектор \bar{R} составлены из значений функций корреляций, полученных для процессов $x[t]$ и $a_1[t]$ соответственно.

Чтобы получить выражения для расчета параметрических спектров мультипликативных процессов, необходимо сделать замену в (1) $z \rightarrow e^{j2\pi fT}$. Тогда выражение для оценки спектральной плотности мощности (СПМ) случайного процесса на выходе мультипликативной модели записывается в виде

$$P(f) = \left|H_{AP_1}(f)\right|^2 \left|H_{AP_2}(f)\right|^2 \cdot D_a, \quad (4)$$

где D_a – дисперсия порождающего БШ $a[t]$. Из (4) с учетом (2) получим формулу для спектральной оценки модели $AP_1 \times AP_2$

$$P(f) = \frac{D_a}{\left| 1 - \sum_{i=1}^{p_1} \Phi_1[i] e^{-j2\pi f iT} \right|^2 \left| 1 - \sum_{n=1}^{p_2} \Phi_2[n] e^{-j2\pi f nT} \right|^2}$$

Оценку спектральной плотности мощности мультипликативного случайного процесса можно получить и при использовании классической модели АР. Однако, как будет показано в данной работе, в некоторых случаях более эффективным является применение мультипликативной модели АР, учитывающей составляющие ее модели AP_1 и AP_2 . Такими случаями можно считать спектральные оценки случайных процессов, имеющих многомодовый спектр, а также спектральные оценки случайных процессов, не являющихся истинными мультипликативными процессами линейного предсказания.

Статистическое моделирование

Точность спектрального оценивания по мультипликативной модели можно оценить по минимальной мощности ошибки предсказания. Ошибку предсказания мультипликативной модели $a[t]$ получают на выходе обеляющего мультипликативного фильтра. Целью проведенных экспериментов являлось доказательство того, что для некоторых мультипликативных процессов мультипликативная модель АР более эффективна, чем классическая модель. Для этого сравнивались мощности ошибки предсказания процессов, не являющихся истинными процессами линейного предсказания, на выходе мультипликативного и классического АР обеляющих фильтров. Параметры АР моделей вычислялись по уравнениям Юла – Уолкера.

Мультипликативный процесс был получен пропусканием порождающего случайного процесса типа гауссова БШ последовательно через два линейных формирующих фильтра. Первый фильтр ФФ1 на рис. 1 имел дискретную импульсную характеристику [5]

$$c[k] = \frac{\sigma\sqrt{2g}}{4\pi} e^{-2g^2 k^2}, \quad g \leq 1/2.$$

Отсчёты случайного процесса на выходе такого фильтра рассчитываются по формуле свертки

$$a_1[n] = \sum_{k=-v}^v c[k] a[n-k].$$

Первый формирующий фильтр позволяет получать случайные процессы $a_1[t]$ с гауссовой формой корреляционной функции. Эти процессы имеют спектры, сосредоточенные в области низких частот с пиком на нулевой частоте, экспоненциально спадающие с ростом частоты. На рис. 2 показаны оценки корреляционных функций процессов $a_1[t]$, полученные на выходе ФФ1 для параметров: $g_1=0,3$, $v_1=25$ (кривая 1) и $g_2=0,5$, $v_2=40$ (кривая 2). Хотя полученные процессы $a_1[t]$ не являются истинными процессами АР, их можно моделировать моделями АР.

Второй формирующий фильтр ФФ2 на рис. 1 представлял собой авторегрессионный фильтр четвертого порядка, коэффициенты которого рассчитывались по заданным частотам и ширинам полос спектральных пиков согласно методике, изложенной в [4]. При моделировании задавались центральные частоты пиков 15 и 25, а ширины полос спектральных пиков составляли 1 и 2 соответственно, при частоте дискретизации 100. Порождающим процессом для ФФ2 являлся $a_1[t]$. Параметрические АР спектральные оценки двух сформированных процессов $x[t]$ показаны на рис. 3.

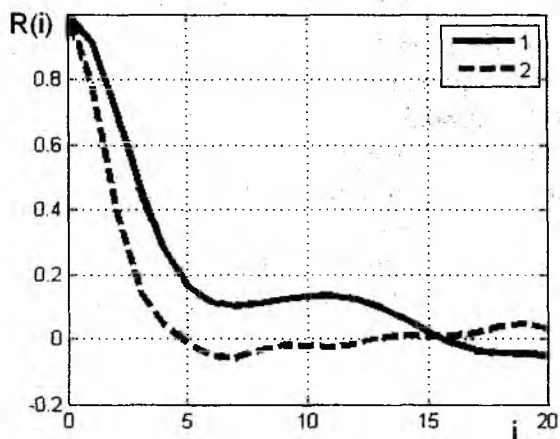


Рис. 2. Корреляционные функции процессов на выходе формирующих фильтров ФФ1

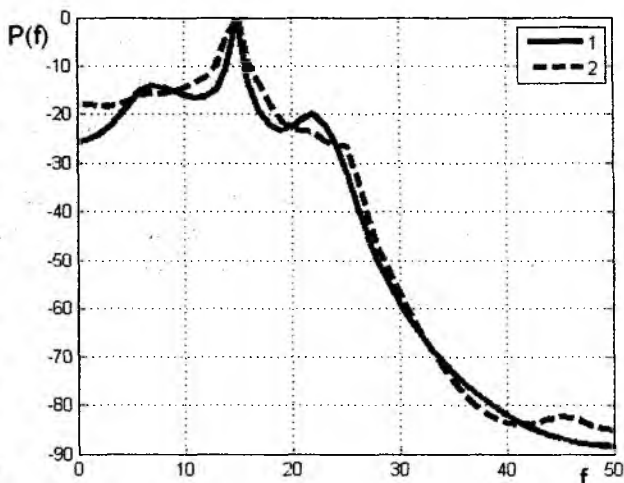


Рис. 3. Параметрические оценки СПМ, полученные при помощи модели АР 6-го порядка

Мультипликативные процессы, полученные описанным выше способом, не являются истинными процессами АР. Точность оценки параметров АР таких процессов ниже, чем для истинных процессов АР. Поэтому представляет практический интерес сравнение эффективностей их описания мультипликативными и классическими моделями АР. Коэффициенты усиления обесцараживающего АР фильтра определяются параметрами модели АР. Поэтому дисперсии ошибки предсказания обесцараживающего АР фильтра могут использоваться для оценки эффективности применения для спектрального оценивания мультимodelей АР. Дисперсии ошибки предсказания позволяют также судить об эффективности обесцараживания коррелированных помех.

Для нахождения ошибок предсказания полученный мультипликативный процесс пропускался через классический АР и мультипликативный обесцараживающий фильтры. Мультипликативный обесцараживающий фильтр состоял из двух включённых последовательно обесцараживающих авторегрессионных фильтров АР₂ и АР₁. Порядок АР₂ фильтра был фиксированным $p_2 = 4$, а порядок АР₁ изменялся. Для получения достоверных значений дисперсии ошибки предсказания D_a использовались выборки по 1000 отсчётов. Результаты вычислений оценок D_a усреднялись по 50 выборкам.

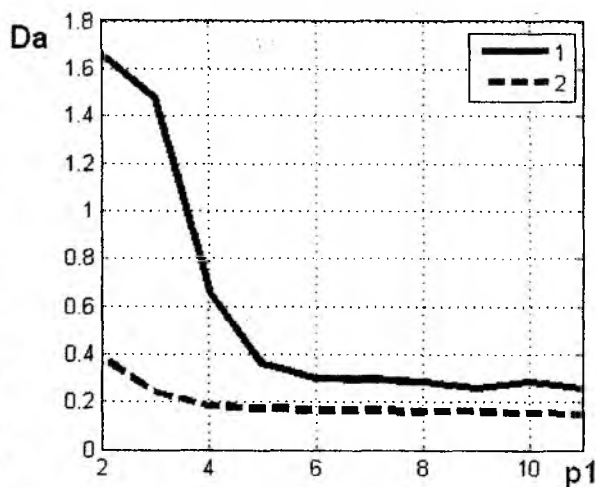
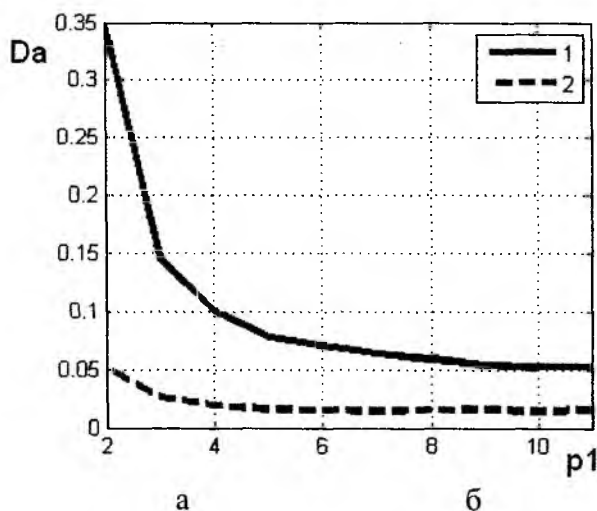


Рис. 4. Дисперсия ошибки предсказания на выходе мультипликативных и классических моделей АР: а – для мультипликативного процесса, сформированного при параметрах ФФ1 $g_1=0,3, v_1=25$; б – для мультипликативного процесса, сформированного при параметрах ФФ1 $g_2=0,5, v_2=40$

На рис. 4 представлены зависимости дисперсии ошибки D_a от порядка p_1 фильтра AP_1 при фиксированном порядке обеляющего фильтра AP_2 $p_2 = 4$. Данные на рис. 4 получены для двух мультипликативных процессов, при формировании которых использовались различные параметры формирующего фильтра ФФ1: $g_1=0,3$, $v_1=25$ (рис. 4а) и $g_2=0,5$, $v_2=40$ (рис. 4, б). Из графиков на рис. 4 следует, что применение мультипликативной модели дает заметное преимущество при всех порядках модели AP_1 . Полученные результаты показывают, что с ростом порядка классической модели AP (кривые 1) нельзя добиться снижения дисперсии обеляющего фильтра до уровня мультипликативного обеляющего фильтра. Применение мультипликативных моделей AP для синтеза обеляющих фильтров снижает дисперсию выходного процесса (кривые 2).

Выводы

Исследования, проведенные в данной работе, показывают, что в случае, когда анализируемые случайные процессы не являются истинными процессами AP , ошибка предсказания на выходе классической модели AP может быть слабо коррелирована. Применение последовательно включенных обеляющих фильтров на основе мультипликативной модели AP , параметры которой рассчитываются методом Юла-Уолкера, снижает дисперсию выходного процесса. Таким образом, для повышения качества спектрального оценивания имеет смысл применять мультипликативную модель AP , которая обеспечивает значительно меньшую дисперсию ошибки предсказания. В серии экспериментов доказано, что мультипликативные модели больше подходят для описания сложных мультипликативных случайных процессов, чем классические модели линейного предсказания.

Список литературы: 1. Гольденберг, Л.М., Матюшкин, М.Н., Поляк, М.Н. Цифровая обработка сигналов : справочник. – М. : Радио и связь, 1985. – 312 с. 2. Тихонов, В.А., Кудрявцева, Н.В. Синтез и анализ мультипликативных процессов линейного предсказания // Радиотехника. 2010, №162. С. 140-143. 3. Тихонов, В. А., Кудрявцева, Н. В. Присоединенные комбинированные модели линейного предсказания – обобщенного линейного предсказания негауссовых процессов // Радиотехника. – 2008. – №154. – С. 152-155. 4. Тихонов, В.А., Русановский, Д.Е., Тихонов, Д.В. Генерирование узкополосных имитационных случайных процессов // Радиотехника и информатика. – 1999. – №4. – С. 83–85. 5. Быков, В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. – М. : Сов. радио, 1971. – 328 с.

*Харьковский национальный
университет радиотехники*

Поступила в редакцию 05.02.2012